E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul V — mai 1954

5

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)

Anul V, Nr. 5 — mai 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Meseria de matematician de Acad. Gr. C. Moisil*	121
2.	*Din istoria logaritmilor de Prof. I. Olivotto* ..	123
3.	*Problema electrizării prin frecare de Árpád Szántó*	127
4.	*Observări prealabile asupra unor probleme de geometrie de Prof. Univ. N. N. Mihăileanu*....	140
5.	*Eclipsa de soare dela 30 Iunie 1954 de Prof. Univ. C. Drâmbă*	142
6.	*Chestiuni de examen (1248—1256)*	146
7.	*Probleme rezolvate (1006, 1010, 1011, 1024, 1028, 1031)*	148
8.	*Probleme propuse (1257—1272)*	152
9.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 471 — E: 480)*	155
10.	*Poşta redacţiei*	156
11.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	157

ANUL V 5 MAI 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi de fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL V * Nr. 5 mai 1954

ÎN AJUTORUL TINERILOR CARE SE PREGĂTESC SĂ INTRE ÎN INSTITUTELE DE ÎNVĂŢĂMÎNT SUPERIOR

MESERIA DE MATEMATICIAN

Acad. GR. C. MOISIL

CONSTRUCŢIA socialismului a făcut să apară necesitatea de a avea la noi în ţară specialişti numeroşi în domenii în care, înainte de 23 august, nu se cerea să avem astfel de specialişti.

Munca de creaţie ştiinţifică originală are, într-o societate socialistă, un loc efectiv printre diferitele categorii de munci. In adevăr, ridicarea productivităţii muncii este o preocupare continuă în societatea socialistă şi această ridicare a productivităţii muncii nu se poate face decît cu o utilizare din ce în ce mai perfecţionată a cunoştinţelor ce avem asupra legilor naturii. Prin mecanizarea şi automatizarea mijloacelor de producţie, munca necalificată a omului este înlocuită prin maşini, omului rămînîndu-i să ducă numai o muncă înalt calificată de a concepe, proiecta, supraveghea şi repara marile uzine automatizate. Se tinde astfel la o îmbinare a muncii manuale cu munca intelectuală.

Această necesitate de continuă calificare şi ameliorare a calificării cere un mare număr de profesori cu o înaltă pregătire ştiinţifică. Dar o înaltă pregătire ştiinţifică a profesorului presupune în mod imperios că profesorul se încadrează în munca de creaţie ştiinţifică.

Pentru acest dublu motiv: a adînci cît mai mult cunoaşterea legilor naturii şi ridicarea profesională a corpului didactic, munca de creaţie ştiinţifică face parte integrantă din Planurile de Stat.

Una din consecinţele importante este creiarea «meseriei de om de ştiinţă». In regimul socialist apare astfel o meserie nouă, meseria de om de ştiinţă, al cărui rost este cercetarea legilor naturii, formularea şi elaborarea lor în vederea aplicaţiilor în practică.

Proiectarea construcţiilor tehnice cere însă cunoaşterea numerică a dimensiunilor construcţiei; dimensionarea trebuie făcută în aşa fel încît să fie cea mai economică dintre cele ce corespund scopului. De exemplu, dacă vrem să construim

un avion, căutăm să dimensionăm toate piesele lui aşa fel încît, pe de o parte să corespundă scopului, avînd iuţeala dorită, putînd transporta o sarcină dorită, putînd zbura la o înălţime dorită, dar în acelaşi timp trebuie ca toate piesele să aibă cele mai mici dimensiuni dintre cele permise, pentru a răspunde scopului.

Pentru a putea da însă date numerice, legile naturii trebuie să fie transcrise sub formă matematică şi aceste legi, puse sub formă matematică, trebuie să fie studiate matematic, tehnica cerînd pentru necesităţile ei, rezolvarea unor probleme matematice. Dar matematica este o disciplină unitară şi progresul uneia din ramurile ei cere progresul tuturor disciplinelor matematice. Astfel, rezumînd, necesităţile actuale sau viitoare ale tehnicii cer progresul continuu al ştiinţelor matematice.

In acest mod, progresul ştiinţelor matematice şi munca de creaţie matematică se încadrează în mod organic în Planurile de Stat pentru construcţia socialismului. O consecinţă a acestui fapt este apariţia, în societatea socialistă, a meseriei de matematician. In institutele de proiectări tehnice, în institutele de cercetări tehnice îşi găsesc locul să muncească matematicieni care au ca rost rezolvarea problemelor matematice grele pe care le ridică respectiva ramură a tehnicii. In institutele de matematică ale Academiei R.P.R. lucrează matematicieni care, prin creaţiile lor matematice originale, fac să progreseze ştiinţele matematice şi crează mijloace matematice noi pentru formularea şi studiul matematic al legilor naturii, pentru rezolvarea problemelor matematice noi pe care le ridică inovaţiile tehnice.

Este greu de închipuit cît de numeroase şi variate sînt teoremele şi teoriile matematice utilizate de fizică şi tehnica modernă. Aceste necesităţi fac ca matematica modernă să facă continue şi nebănuit de mari progrese. Cineva care ar fi fost foarte bine informat asupra matematicii superioare de acum 20—30 ani şi care ar veni brusc în contact cu cercetările matematice actuale, nu s-ar regăsi, atît este de important progresul realizat de matematică în acest timp.

Felul cum s-au dezvoltat în U.R.S.S. ştiinţele matematice este un exemplu pe care matematicienii din ţara noastră îl studiază pentru a trage învăţăminte referitoare la orientarea matematicii în R.P.R. Numărul descoperirilor matematice făcute de savanţii sovietici este deosebit de mare ; ele au făcut să progreseze esenţial toate ramurile matematicilor : logica matematică, teoria numerelor, algebra, geometria, topologia (a se vedea « Revista Matematică şi Fizică » Nr. 11—1953, articolul T. Gane), analiza matematică (calculul diferenţial şi integral) cu numeroasele ei ramuri, calculul probabilităţilor şi mecanica cu diferitele ei ramuri. Importanţa descoperirilor matematice făcute de savanţii sovietici este excepţională.

Paralelismul între uriaşele progrese ale tehnicii şi cele ale matematicii în U.R.S.S. este datorit tocmai interacţiunii între progresele matematicii şi cele ale tehnicii.

DIN ISTORIA LOGARITMILOR

Prof. I. OLIVOTTO

TIRAJ

În secolele al XIV-lea, al XV-lea şi al XVI-lea, ţările din răsăritul Europei şi îndeosebi Rusia, duceau o luptă dîrză şi eroică împotriva atacurilor nestăvilite ale tătarilor şi formau un zid de apărare pentru ţările din apusul Europei, care se puteau dezvolta în linişte. Aceste ţări cunosc noi forme de dezvoltare istorică: în sînul feudalismului apar primele elemente ale unor noi relaţii de producţie, relaţiile capitaliste. Noile mijloace de producţie, şi manufacturile dau un puternic avînt producţiei de mărfuri, care impune o lărgire a pieţei interne şi externe. Banul începe să aibă o valoare din ce în ce mai mare şi treptat se trece de la economia naturală la economia de schimb.

Noua clasă socială care se naşte, burghezia, vine în contradicţie cu interesele nobilimii feudale. Aceste transformări profunde economico-sociale, nu le întîlnim decît la ţările din apusul Europei, care cunosc un avînt nemaiîntîlnit pînă atunci.

Invenţiile tehnice, rezultat al cerinţelor ştiinţei, descoperirile geografice, rezultat al aplicării acestor invenţii tehnice, au determinat progresul acestor ţări. Ţesătoria perfecţionată produce pînze trainice care folosite la velele corăbiilor, rezistă la călătorii îndepărtate; cîrma scufundată în apă permite aceloraşi corăbii să manevreze cu uşurinţă şi să folosească vîntul în direcţia dorită; perfecţionarea busolei îngăduie navigatorilor să se orienteze şi sub cerul acoperit, să se avînte în larg, să nu mai navigheze ca pînă atunci de-alungul coastei; căutarea unor noi drumuri numai pe apă spre Orientul bogat în mirodenii şi aur, aprinde setea de îmbogăţire a aventurierilor din ţările de pe coasta de răsărit a Atlanticului.

Pentru a putea întreprinde călătorii îndelungate era nevoie de dezvoltarea rapidă a navigaţiei.

În aceste ţări în care economia se dezvolta vertiginos, se pun probleme noi, care cer o rezolvare imediată. Arta navigaţiei începe să ia o mare dezvoltare şi este ajutată de astronomie. In secolul al XVI-lea Danemarca devine un important centru de cercetări ale navigaţiei. Descoperirile lui Tycho Brahe în astronomie fac epocă şi încep să fie folosite în navigaţie. Navigatorii încep să stabilească poziţia şi direcţia vapoarelor după stele şi după schimbarea aspectului Lunii. Calculele în astronomie, erau însă laborioase, cu numere uriaşe şi cu multe operaţii, care cereau un efort deosebit celor care le executau. Tot cu numere mari şi cu nenumărate operaţii trebuiau calculate şi dobînzile compuse ale bogăţiilor care se acumulau, în urma marilor călătorii. Pentru aceste calcule se impune descoperirea unor metode noi, care să înlocuiască operaţiile cu numere uriaşe prin altele mai uşoare. Şi fiindcă necesităţile practice au cerut-o, s-au găsit în curînd şi metodele potrivite.

Doi matematicieni danezi Wittich şi Clavius încep să întrebuinţeze tabele trigonometrice pentru uşurarea calculelor; să înlocuiască înmulţirile prin adunări.

Produsul 0,9843·0,77162 se calcula astfel cu ajutorul formulei:

$$\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}=\frac{1}{2}(\sin p+\sin q).$$

Dacă $\widehat{p}=60°40'$ şi $\widehat{q}=40°20'$

$$\sin 50°30'\cos 10°10'=\frac{1}{2}(\sin 60°40'+\sin 40°20')$$

$$0{,}77162\cdot 0{,}98430=\frac{1}{2}(0{,}87178+0{,}64723)$$

$$0{,}77162\cdot 0{,}98430=0{,}759505\approx 0{,}7595$$

Efectuînd produsul după regula cunoscută din aritmetică, obţinem:

$$0{,}77162\cdot 0{,}98430=0{,}7594975660\approx 0{,}7595.$$

Înlocuirea înmulţirilor prin adunări era un pas înainte, un progres, dar acesta nu era suficient pentru nevoile crescînde ale economiei capitaliste.

În acest timp se face în matematici o descoperire, care prin importanţa ei poate fi comparată cu descoperirea Americii, e vorba de descoperirea logaritmilor.

Pînă la descoperirea propriu zisă a logaritmilor, s-au încercat mai multe metode, care e bine să le amintim deoarece ele conţineau germenul logaritmilor, dar nu erau încă calcule cu logaritmi. Astfel Stevinus, care se ocupa cu aritmetica comercială, publică o serie de tabele, cu care se calculau dobînzile compuse, care au la bază două progresii: una aritmetică şi alta geometrică de forma:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & (1+r)^{\frac{1}{4}} & (1+r)^{\frac{1}{2}} & (1+r)^{\frac{3}{4}} & 1+r \end{array}$$

De asemenea Michael Stifel (Iena, 1486—1567) publică «Arithmetica integra» în care se ocupă de dependenţa dintre termenii progresiei aritmetice şi a celei geometrice de forma

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5\ldots \end{array}$$

şi semnalează că:

1. Unei adunări a termenilor progresiei aritmetice îi corespunde o înmulţire a termenilor corespunzători ai progresiei geometrice.

2. Unei scăderi a termenilor progresiei aritmetice îi corespunde o împărţire a termenilor corespunzători ai progresiei geometrice.

3. Înmulţirii cu o constantă a unui termen din progresia aritmetică îi corespunde puterea cu exponentul egal cu constanta, înmulţită, cu exponentul termenului corespunzător din progresia geometrică.

4. Împărţirii unui termen din progresia aritmetică printr-o constantă îi corespunde rădăcina de ordin egal cu constanta din termenul corespunzător din progresia geometrică.

Stifel a făcut observaţii foarte interesante, a mai rămas un singur pas ca să descopere adevărata cale a logaritmilor, dar acest pas nu l-a făcut — el n-a reuşit să umple toate intervalele termenilor progresiei geometrice cu numere şi să găsească în acelaşi timp numerele fracţionare corespunzătoare din progresia aritmetică — dar acest pas l-a făcut Neper.

Chiar şi Arhimede în cercetările sale în domeniul mecanicii, al hidraulicii, a corpurilor rotunde, a observat principiul fundamental şi dependenţa acestor două progresii, dar nu l-a cristalizat într-o formă deosebită.

Omenirii i-au trebuit atîtea sute de ani ca să ajungă dela principiile logaritmilor la aplicarea lor pe scară întinsă şi acest pas s-a făcut numai cînd condiţiile au fost prielnice.

John Neper (1550—1617), scoţian, matematician amator şi germanul Jost Bürgi (1552—1632) sînt aceia care au văzut clar că, în toate cazurile, înmulţirii împărţirii, ridicării la putere şi extragerii de rădăcină a termenilor progresiei geometrice, le corespund adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea termenilor corespunzători din progresia aritmetică.

Este de remarcat că cei doi descoperitori, deşi au lucrat independent unul de altul, au ajuns la acelaşi rezultat, deoarece erau împinşi de aceleaşi necesităţi şi că acest rezultat este rodul unei munci îndelungate şi pline de migală.

Cînd îşi dă seama că proprietăţile celor două progresii sînt valabile în foarte multe cazuri, Neper porneşte la alcătuirea unor tabele, care să uşureze munca oamenilor. Această muncă grea a durat 20 ani; el publică în anul 1614 nişte tabele de logaritmi sub numele «Mirifici logarithmorum canonis descriptio».

Împins de aceleaşi împrejurări Jost Bürgi, ceasornicar din Praga, descoperă şi el principiile de formare a logaritmilor. In anul 1620 se publică la Praga lucrarea lui Bürgi «Progress Tabulen» în care se vede că a luat o progresie aritmetică cu primul termen 0 şi raţia 10 şi o progresie geometrică cu primul termen 100 000 000 şi raţia 1,0001:

0,	10,	20
100 000 000	100 010 000	100 020 001

Tablele lui sînt tipărite în două culori: antilogaritmul cu negru şi logaritmul cu roşu.

Cu aceste table se lucra cam în felul următor:

Înmulţirea a două numere: se adunau numerele roşii corespunzătoare celor negre, iar ca rezultat se citea numărul negru corespunzător sumei roşii.

Nici tablele lui John Neper şi nici ale lui Bürgi n-au rămas în forma lor iniţială.

Opera lui Neper a fost continuată de fiul său Robert Neper, care împreună cu Briggs întocmesc şi publică nişte table asemănătoare cu cele pe care le folosim azi.

Henri Briggs (1556—1630) profesor de matematică la un colegiu din Oxford, întreprinse o călătorie la Edimburg în 1616, unde lucră cîtva timp cu Neper. Se pare că el este cel care i-a sugerat lui Neper întrebuinţarea lui 10 ca bază a sistemului de logaritmi. Numele de logaritm apare odată cu primele table şi este format din prescurtarea a 2 cuvinte greceşti logos şi arithmos, care înseamnă respectiv relaţie şi număr.

Se pare că tot din munca în colectiv a lui Neper cu Briggs ar fi ieşit şi numele de caracteristică şi mantisă.

Briggs publică în anul 1618 o parte din lucrările sale sub numele de « Logarithmorum chilias prima » în care găsim logaritmii numerelor dela 1—1 000. In anul 1624 tipări la Londra sub titlul « Arithmetica logarithmica » o tablă cu logaritmii numerelor dela 1—20 000 şi dela 90 000—100 000.

« Arithmetica logarithmica » mai este interesantă şi prin faptul că în introducerea ei se văd primele începuturi ale metodei diferenţiale şi ale interpolării.

Dar tablele lui Briggs nu se puteau folosi cu prea mult succes deoarece erau incomplete.

Lacunele lăsate de Briggs în tablele de logaritmi sînt completate de Adrien Vlacq, librar şi matematician olandez, care publică în anul 1628 nişte table de logaritmi dela 1 la 10 000 cu 10 zecimale. Tablele mai conţineau şi logaritmii sinusului, tangentei şi secantei, calculate din minut în minut pentru toate gradele primului cadran.

Tablele de logaritmi pentru numere şi funcţii trigonometrice pe care le folosim azi au ca bază tablele lui Adrien Vlacq.

Descoperirea logaritmilor, care pentru matematică preţuieşte tot aşa de mult ca descoperirea telescopului pentru astronomie, provoacă mult interes printre matematicieni.

Astfel Kepler, entuziasmat de această metodă alcătueşte şi el o tablă de logaritmi, pe care o publică sub numele « Chilias logarithmorum ».

Este interesant însă că nici la Neper nici la Briggs nu întîlnim ideea de putere şi nici n-au cunoscut noţiunea de sistem de logaritmi bazat pe funcţia exponenţială. Cei doi descoperitori ai tablelor nu s-au preocupat nici de cele 4 reguli de bază din calculul logaritmic $\left(\log xy = \log x + \log y;\ \log \frac{x}{y} = \log x - \right.$ $\left. - \log y;\ \log x^m = m \log x;\ \log \sqrt[n]{x} = \frac{\log x}{n}\right)$ ci ei se mulţumeau să descrie prin cuvinte cum se lucrează cu aceste table.

Leonard Euler (1707—1783) vestitul academician rus, a fost acela care a arătat lămurit legătura dintre logaritm şi funcţia exponenţială şi a dat o definiţie riguros ştiinţifică a logaritmului.

In tablele alcătuite pînă în secolul al XVIII-lea s-au strecurat totuşi unele inexactităţi, care n-au putut fi înlăturate decît odată cu aplicarea seriilor infinite şi desvoltarea analizei infinitezimale.

Tablele de logaritmi au ajuns un instrument de calcul foarte răspîndit în toată lumea; Cavalieri le-a introdus în Italia, Edmond Wingate în Franţa.

In Rusia ţaristă circulau mai multe feluri de table de logaritmi, dintre care cele mai răspîndite erau cele alcătuite de Vega Georg şi cele ale lui Prjevalschi B.

Astăzi, în Uniunea Sovietică, cele mai întrebuinţate table sînt ale lui V. M. Bradis, publicate sub numele « Tabele matematice cu patru cifre pentru uzul şcolilor medii. Aceste tabele sînt potrivite pentru şcolile medii, deoarece conţin logaritmii numerelor, antilogaritmii, logaritmii funcţiilor trigonometrice, valorile naturale ale funcţiilor trigonometrice, pătrate, cuburi, rădăcini pătrate, rădăcini cubice, lungimea cercului de un diametru oarecare, etc.

Tabelele lui V. M. Bradis au fost reeditate de curînd într-un număr foarte mare de exemplare, deoarece au fost socotite cît se poate de exacte şi complete.

Aceste tabele au fost traduse şi la noi de Editura de Stat Didactică şi Pedagogică.

PROBLEMA ELECTRIZĂRII PRIN FRECARE

ARPÁD SZÁNTÓ

conferenţiar « Universitatea Bolyai » din Cluj.

FENOMENUL electrizării prin frecare are un istoric destul de lung. Incă în secolul al VII-lea înaintea erei noastre, a fost descrisă proprietatea chihlimbarului, observată de o ţesătoare, de a atrage unele obiecte uşoare după ce a fost frecat cu o bucată de stofă de lînă. După mai bine de 2000 de ani (1600), această descoperire este dezvoltată prin observaţia că o serie de alte corpuri, de exemplu sticla, capătă proprietăţi analoage, dacă sînt frecate cu mătase. Pe la mijlocul secolului al XVIII-lea, M. V. Lomonosov, studiind în acelaşi timp cu G. V. Richman descărcările electrice din atmosferă, ajunge la concluzia că electrizarea aerului se produce datorită frecării dintre particulele de aer. In anul 1797, Volta descoperă fenomenul generării sarcinilor electrice prin atingerea suprafeţelor a două metale, numit « electrizare prin contact » şi pune astfel bazele studiului fenomenelor de contact, care se produc la suprafaţa de atingere a diferitelor corpuri. In ce priveşte frecarea, ea este strîns legată de fenomenele de contact, fiind de fapt un contact perfect între diferite corpuri. Dacă se consideră nu

numai alunecarea, dar şi contactul de scurtă durată dintre particulele diferitelor corpuri, acest lucru devine şi mai evident, iar caracterul general al fenomenului în încărcările electrostatice rezultă în mod univoc.

Privind electrizarea prin frecare, ne dăm seama uşor de simplitatea acestui fenomen. Astfel, chiar experienţa zilnică a pieptenatului dovedeşte acest fapt. Totuşi, mecanismul intim al fenomenului este încă şi astăzi foarte puţin cunoscut, iar cercetarea cauzei «electrizării prin frecare» conduce la experimentarea fizică a însuşirilor electrice ale suprafeţelor corpurilor, care de asemenea sînt prea puţin cunoscute pînă în prezent.

Studiul fenomenului este dificil şi prin dependenţa lui de condiţiile exterioare, mai ales de umiditatea aerului înconjurător, precum şi prin faptul că în multe cazuri el se manifestă slab şi durează puţin. Aceste circumstanţe, precum şi imposibilitatea aparentă de a fi folosit în practică, slăbesc interesul cercetărilor pentru studiul său. Unii cercetători au încercat totuşi, să stabilească legile de bază ale fenomenului, iar alţii au studiat cazurile de electrizare observate în procesele tehnologice în industrie. Din cauza divergenţei dintre concluziile trase din experienţe, nu s-a putut ajunge pînă în prezent, la o teorie definitivă şi unitară a fenomenului.

Cercetările efectuate în ultimul timp de savanţi şi tehnicieni sovietici, în frunte cu N. G. Drozdov, au arătat că electrizările prin frecare prezintă un interes practic destul de important; ele au fost observate în numeroase procese tehnologice în diferite uzine şi fabrici, ca fenomene secundare, inevitabile. Din aceste cercetări rezultă că electrizarea prin frecare, contrar părerilor anterioare, trebuie privită ca un fenomen de interes practic real, legat de problemele producţie şi în consecinţă, se impune studiul ei.

In prima parte a lucrării de faţă, sînt analizate cîteva exemple din care reiese că electrizarea prin frecare apare în producţie şi în procesele legate de activitatea de toate zilele, sub diferite aspecte; în a doua parte a lucrării sînt arătate cîteva aparate electronice de măsurat, care pot fi utilizate pentru punerea în evidenţă şi măsurarea sarcinilor obţinute prin frecare, iar ultima parte cuprinde unele consideraţii asupra naturii fenomenului.

1. In fabrici şi uzine, diferitele organe de maşini se leagă între ele prin curele de transmisie. Acestea, prin frecarea lor de părţile metalice constituie una dintre cele mai importante surse de electricitate produsă «prin frecare» în procesul de fabricaţie. Pe suprafeţele metalice ale maşinilor se acumulează electricitate, care poate să dea loc la descărcări electrice periculoase în cazul utilizării unor materiale inflamabile, sau poate deteriora organele respective ale maşinilor. In condiţii de laborator, B. I. Ugrimov a calculat pentru o curea de piele cu viteza de 15 m/s un potenţial de 75—80 kV. După datele obţinute de Drozdov pe curelele transmisiilor puternice există de obicei sarcini la un potenţial de 30—45 kV. Asemenea potenţiale înalte produc scîntei şi descărcări prin arc, care distrug apărătoarea metalică. Se cunosc cazuri cînd un bec cu gaz a putut fi aprins uşor

de la scînteia produsă de electricitatea prin frecare de la o curea de transmisie.

Factorii principali care condiționează mărirea sarcinii sînt natura și gradul de murdărie al suprafeței interioare a curelei, umiditatea aerului înconjurător, viteza de mișcare a curelei.

Măsurile practice de protecție împotriva sarcinilor se bazează pe următoarele principii:

— scurgerea sarcinilor la pămînt imediat după formarea lor,
— evitarea producerii sarcinilor,
— scăderea potențialului pînă la valori nepericuloase.

2. Electrizarea prin frecare apare în industriile care folosesc substanțe măcinate fin: fabrici de zahăr, de sulf, de măcinat pulbere, de acid salicilic, de produse făinoase, etc., precum și în minele de cărbuni. Aceste pulberi ca aerosoli, se încarcă electric și scînteile care se produc deseori în urma încărcărilor cauzează aprinderea amestecurilor la o anumită concentrație.

In urma unor asemenea încărcări s-a produs explozia catastrofală care a avut loc în 1914 într-o fabrică de amidon din New-York. Unii cercetători au cules date privind exploziile care se produc la încărcarea sulfului în nave, cînd s-au putut înregistra potențiale pînă la 25 kV.

La învolburarea sau mișcarea prafului de cărbune de pămînt într-un curent de aer, de asemenea se produce electrizarea. Este foarte probabil că multe explozii în minele de cărbuni au loc în urma descărcărilor produse din cauza sarcinilor care apar pe particulele de praf în mișcare. In norul de praf care se ridică în timpul mersului vagonetului în mine s-a putut măsura un potențial de 300 V.

S-au făcut cercetări asupra electrizării prafului de cărbune într-o instalație de dimensiuni mari și s-a constatat de altfel, că în toate cazurile, umiditatea aerului și a prafului are influență considerabilă asupra electrizării.

In privința aerosolilor sînt interesante experiențele făcute asupra electrizării prin contact a particulelor solide și asupra electrizării prin frecare în cursul mișcării lor într-un curent de aer. Asemenea experiențe au fost efectuate cu sulf, zahăr, naftalină, talc, amidon, grafit și acid boric. Mulți cercetători au încercat să stabilească legătura dintre semnele sarcinilor care apar pe particulele aerosolilor și dimensiunile lor, însă nu s-a putut stabili legea după care se produc aceste fenomene. In unele experiențe, particulele mari purtau sarcini negative, iar cele mici, sarcini pozitive; în alte experiențe, invers.

3. Intr-o serie de întreprinderi unde se lucrează cu fire, plăci, foi sau pelicule, încărcările prin frecarea sau prin contactul pieselor în lucru, chiar dacă nu provoacă incendii, cauzează rebuturi și scăderea productivității mașinilor. De exemplu, în întreprinderile textile, sarcinile electrice apar în timpul afinării și curățirii bumbacului, cînd se produc cantități de electricitate atît de mari, încît se pot amorsa explozii; chiar dacă aceste explozii nu au loc, totuși fibrele încărcate cu electricitate se atrag sau se resping și din această cauză se lucrează greu.

Țesăturile se electrizează în timpul prelucrării lor; întinderea și călcarea electrizează puternic unele țesături. La întindere, firele lunecă reciproc și în urma frecării dintre ele, se electrizează. Călcatul țesăturilor dă naștere de asemenea la sarcini electrice, din care cauză ele se lipesc de mașina de călcat și astfel țesătura nu poate fi supusă unei alte operații pînă nu se îndepărtează sarcinile electrice. Și la tunsul fibrelor apar de asemenea sarcini, cauzate de frecarea cuțitelor de țesătură.

Electrizarea materialelor fibroase este în strînsă legătură cu starea lor higroscopică; ele se electrizează diferit, în funcție de umiditatea lor și a aerului înconjurător, iar viteza de electrizare este în funcție de viteza lor de umezire și de uscare. S-a stabilit că fibrele se electrizează cu atît mai repede, cu cît este mai mare viteza lor de umezire și de uscare. Această regulă poate fi verificată în cazul mătăsii artificiale, care se umezește și se electrizează mai ușor decît alte țesături.

Experiența zilnică arată că dacă scriem cu creionul pe hîrtie într-o cameră caldă și uscată, foile se lipesc una de alta. Cauza acestui fenomen este electrizarea prin frecare a hîrtiei. Se știe că lampa cu neon se aprinde în momentul în care este trecută peste o hîrtie electrizată. Electrizarea hîrtiei se produce într-un grad mai mare în fabricile de hîrtie și în tipografii. In fabricile de hîrtie, un efect al electrizării este lipirea foilor sau prăfuirea hîrtiei de calitate superioară. In tipografii, în timpul imprimării la mașina rotativă, hîrtia se electrizează atît de intens încît se produc scîntei care pot determina uneori, incendii. Factorii care influențează și în acest caz, electrizarea, sînt: umiditatea hîrtiei și a aerului înconjurător. Măsurile de protecție aplicate în fabricile de hîrtie și în tipografii, sînt:

1) mărirea conductibilității superficiale și de volum a hîrtiei,
2) scurgerea sarcinilor direct la pămînt,
3) utilizarea dispozitivelor de descărcare și de neutralizare.

După părerea lui Drozdov, un procedeu simplu și mai puțin periculos de neutralizare a sarcinilor, este suflarea aerului ionizat peste locurile electrizate. Această metodă a fost aplicată de docentul V. A. Smirnov, într-o tipografie și a dat rezultate foarte bune.

4. Cazurile de electrizare a lichidelor în timpul scurgerii prin diverse tuburi sau în interiorul unui vas închis, în timpul filtrării, purificării, pulverizării și a căderii libere, sînt destul de frecvente. Ele pot fi explicate de asemenea, prin fenomenul frecării particulelor de lichid între ele, sau de diverse suprafețe întîlnite în mișcarea lor. Fenomenul apariției sarcinilor în timpul mișcării prezintă interes practic mai ales pentru ramurile de industrii unde se lucrează cu lichide inflamabile, care electrizîndu-se puternic, pot produce incendii. In literatura de specialitate sînt citate multe exemple de aprindere a benzinei, toluenului, sulfurii de carbon, în cursul diferitelor operații cu ele, care implicau mișcarea lor. Astfel, se cunosc cazuri de aprindere a toluenului după condensarea

lui în timpul turnării într-un cazan de oţel emailat; la fel s-a aprins sulfura de carbon în timpul turnării prin pîlnie dintr-o ţeavă de oţel într-un vas de oţel sau de sticlă. Benzina se aprinde adeseori în momentul turnării în recipiente; se citează cazuri de explozie în rezervoarele subterane de benzină, la un scurt interval de timp după umplerea lor. S-au înregistrat de asemenea explozii în timpul pompării uleiurilor fierbinţi în rezervoare aflate în pămînt.

Deşi electrizările din categoria fenomenelor menţionate mai sus, încă nu au fost studiate complet, se poate spune că se cunosc factorii care condiţionează aceste fenomene.

Astfel s-a constatat că benzina, la trecerea prin ţevi metalice, se electrizează negativ. Bulele de aer sau de alt gaz aflate în masa de lichid ridică simţitor intensitatea electrizării; umiditatea aerului de deasupra vasului din care se scurge benzina prin ţevi, influenţează asupra electrizării. Materialul ţevilor de asemenea are influenţă asupra valorii potenţialelor care iau naştere; pe o ţeavă de oţel s-a măsurat 3,6 kV; pe una de alamă — 3 kV, de aluminiu — 2,2 kV, de cupru — 1,0 kV şi de sticlă — 0,8 kV. Drozdov, studiind variaţia potenţialului în funcţie de viteza de scurgere a benzinei printr-un tub de cauciuc, a constatat că la viteze mici potenţialul creşte încet, apoi, după o creştere liniară, tinde spre o anumită limită.

Fenomenul electrizării apei datorită căderii libere şi a pulverizării a fost studiat amănunţit. S-a constatat că semnul sarcinilor este în funcţie de dimensiunea particulelor: apa pulverizată fin capătă sarcini negative, iar picăturile mai mari sarcini pozitive. Impurităţiile au un rol hotărîtor asupra gradului de electrizare. Astfel, apa distilată se încarcă mai mult decît apa obişnuită, iar soluţia de sare de bucătărie aproximativ, de 6—7 ori mai slab decît apa distilată, şi anume, cu sarcini pozitive. Atmosfera în care se pulverizează apa are influenţă mare asupra sarcinilor de pe picături; apa pulverizată în aer poartă sarcini pozitive iar cea pulverizată într-o atmosferă de hidrogen la acelaşi grad de dispersie, se încarcă cu sarcini negative. Au fost efectuate experienţe şi cu alte lichide neconductoare prin pulverizare, precum şi căderea particulelor într-un recipient. S-a constatat un potenţial de 10 kV la căderea unui jet dintr-un amestec de benzină şi benzen, de la o înălţime de circa 1,5 m într-un rezervor de oţel izolat, care era iniţial gol. Potenţialul a scăzut la 7 kV cînd rezervorul a fost umplut iniţial, pînă la 1/4 din capacitatea lui.

La trecerea unui curent de gaz prin diferite lichide, masa de gaz se încarcă cu electricitate. Electrizarea în acest caz, se explică prin frecarea dintre masa de gaz şi lichid. Fenomenul a fost numit baloelectricitate. Experienţele făcute cu apă şi aer pentru cunoaşterea semnului sarcinilor, au arătat că în aceast caz apa se încarcă pozitiv, iar aerul, negativ. Fenomenul a fost constatat şi la electroliţi. Pentru explicarea lui în acest ultim caz se presupune absorbţia unor ioni de către particulele de gaz care traversează lichidul. Mărirea concentraţiei determină schimbarea semnului sarcinilor bulelor de gaz.

Din cele expuse asupra electrizării lichidelor, se poate trage concluzia că electrizarea unor lichide inflamabile ca: benzina, benzenul, toluenul, eterul, etc., poate constitui un pericol mare. Limitele periculoase ale concentraţiei vaporilor acestor lichide în aer se găsesc între 2 şi 7,5%, iar tensiunea de 300 V este suficientă pentru formarea scînteii. Măsurile de protecţie au de scop, fie dispersarea rapidă a sarcinilor apărute, ceea ce se realizează prin mărirea conductanţei lichidului, fie împiedicarea apariţiei sarcinilor sau micşorarea gradului de electrizare prin diferite metode.

5. Electrizarea prin frecare a unor mijloace de transport (autovehicule, aerostate, avioane) prezintă un mare interes practic. Incărcările de acest fel pot produce potenţiale înalte care pot provoca incendii ori cauza perturbaţii în radioreceptoare şi în alte aparate electrice instalate pe maşini.

Pe drumurile prăfuite şi nisipoase apar adesea sarcini pe automobil. Pe şoselele asfaltate se constată la fel electrizarea autovehiculelor. In acest din urmă caz, contactul dintre cauciucul roţilor cu asfaltul constituie cauza principală a apariţiei sarcinilor şi anume, se constată electrizarea negativă a cauciucurilor şi încărcarea pozitivă a pavajului. In general, distribuţia sarcinilor pe diferitele părţi ale maşinii are un aspect destul de complicat. In figura 1 este reprezentată după Drozdov, schematic, repartiţia sarcinilor pe un autovehicul care se deplasează pe un pavaj izolant.

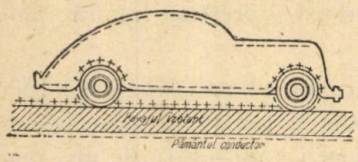


Fig. 1

Sarcinile pozitive apărute pe pavaj se păstrează un anumit timp, contribuind la electrizarea altor vehicule prin fenomenul inducţiei electrostatice.

Datorită potenţialului ridicat la care se încarcă şasiul automobilului, pasagerii la coborîre pot simţi şocuri. De exemplu, să calculăm curentul care poate trece printr-un pasager care coboară dintr-un autobuz. Fie capacitatea autobuzului $C_{au} = 1200\ F$, potenţialul său $V_{au} = 15000$ volţi, rezistenţa electrică a pasagerului $R_{pas} = 20000$ ohmi. Intensitatea curentului:

$$I_0 = \frac{V_{au}}{R_{pas}} = \frac{15000}{20000} = 0{,}75\ A$$

Din calcule rezultă că timpul (t) în decursul căruia va trece prin pasager un curent periculos ($I = 0{,}05\ A$):

$$t = \tau \ln \frac{I_o}{I_t}$$

unde t este timpul de descărcare a sarcinii maşinii prin pasager. Acesta este egal cu

$$\tau = R_{pas}\, C_{au} = 2{,}4 \cdot 10^{-6}\, s$$

deci,

$$t = 2{,}4 \cdot 10^{-6} \ln \frac{0{,}75}{0{,}05} = 120 \cdot 10^{-6}\, s = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\, s$$

In anumite condiţii, rezistenţa pasagerului poate scădea şi împreună cu ea, timpul de descărcare, iar efectul ei poate fi considerabil. Se cunosc cazuri cînd şoferul a fost aruncat la pămînt în urma şocului provocat de autocamionul electrizat.

Incă în anii primului război mondial, s-au observat cazuri de aprindere a dirijabilelor în timpul umplerii lor cu hidrogen. Drept cauză a acestor incendii erau considerate sarcinile apărute pe piesele metalice la trecerea curentului de hidrogen prin ele. Ulterior, cercetătorii sovietici au constatat că această explicaţie nu este satisfăcătoare: fenomenul este mult mai complex şi un rol inportant îl au electrizările produse prin contact şi prin frecare, la dezlipirea şi alunecarea suprafeţelor, precum şi la întinderea, mai ales, în regiunile cusăturilor. Deşi fenomenul sub această formă, nu prezintă un deosebit interes practic, deoarece pentru umplerea aerostatelor se folosese alte substanţe, neinflamabile, totuşi perturbaţiile provocate la aparatele de înregistrare, cu care sînt prevăzute aerostatele pentru observaţii atmosferice, justifică un studiu atent şi al acestui aspect al electrizărilor.

Pe avioanele echipate cu instalaţii de radio se constată perturbaţii create de fenomenele electrostatice. Cercetările efectuate în acest sens, au arătat că electrizarea avionului depinde de mai mulţi factori; cei mai importanţi sînt: viteza, dimensiunile şi suprafaţa avionului în contact cu atmosfera şi expusă direct precipitaţiilor din atmosferă (fulgi de zăpadă, cristale de ghiaţă, grindină, ploaie sau nori). Cauzele principale ale apariţiei sarcinilor electrice pe suprafaţa avionului în timpul zborului sînt:

a) lovirea (frecarea) particulelor precipitaţiei de corpul avionului;

b) influenţa electrostatică în timpul zborului în apropierea norilor încărcaţi.

Prin atingerea particulelor precipitaţiei, sarcinile pot fi comunicate avionului datorită încărcării prealabile a acestor particule; în acest caz, semnul sarcinilor de pe avion va depinde de raportul dintre cantităţile de particule încărcate pozitiv sau negativ care s-au lovit de avion. In ce priveşte semnul electrizării avionului sub acţiunile precipitaţiilor s-a constatat că acesta primeşte totdeauna sarcini negative. Trebuie să admitem deci, că rolul primordial în electrizarea avionului îl are fenomenul de contact între picăturile de apă, sub toate aspectele lor, şi materialul suprafeţei avionului; picăturile de apă în momentul lovirii lor primesc sarcini pozitive, iar avionul rămîne încărcat negativ. Măsurătorile cantitative au arătat că învelişurile de aluminiu obişnuite, se electrizează foarte slab; la fel şi cele acoperite cu o soluţie de silicat coloidal în nitroceluloză. Curentul de încărcare, în funcţie de viteza avionului, poate fi exprimat prin formula:

$$I = c \cdot v^n$$

unde c este o constantă; v este viteza avionului; n este un exponent cu valoarea 3 pentru majoritatea învelişurilor; n este funcţie de temperatură, şi pentru anumite temperaturi poate atinge o valoare apropiată de 5.

Comparînd cele două aspecte ale încărcării — cea prin contact şi cea prin influenţă — putem conclude că prima este un proces mai stabil şi de durată mai lungă, de aceia pericolul întreruperii legăturilór radiofonice datorită electrizării prin contact este mult mai mare decît cel datorit acţiunii norilor încărcaţi, care determină electrizarea prin influenţă.

Dispersarea sarcinilor, deci, înlăturarea perturbaţiilor, se poate realiza prin următoarele procedee:

a) cu descărcare prin efect corona;

b) prin neutralizare cu sarcinile particulelor gazelor de eşapament;

c) prin neutralizare datorită ionilor atmosferici.

6. Un interesant fenomen de electrizare este electrizarea omului. In literatura de specialitate se emite ipoteza că, mişcîndu-se, omul generează în corpul său sarcini electrice. Insă această generare a electricităţii «umane» pare puţin probabilă, deoarece corpul omenesc nu poate fi considerat un dielectric. Mult mai probabilă pare ipoteza că apariţia sarcinilor se datoreşte acţiunii omului asupra dielectricilor în timpul mişcării sale. Drozdov a stabilit că la umiditate redusă a aerului ($h = 20 - 25\%$ şi $t = 25 - 28°C$), omul se încarcă pînă la 10 kV cînd merge pe un covor de lînă cu încălţăminte uscată. Acest potenţial este suficient pentru ca la atingerea diferitelor obiecte el să primească un şoc mai mult sau mai puţin puternic. Un exemplu interesant de electrizare s-a petrecut într-un atelier de croitorie în timpul încercării rochiilor. Umblînd pe covor, lucrătoarele au primit sarcini electrice pe care, la prinderea în ace a rochiei probate, le descărcau persoanei care proba, dîndu-i senzaţia unor înţepături cu acul. Sau un alt caz. Un băiat ţinea în mână un furtun de cauciuc prin care curgea benzină. La un moment dat simţind că i s-a urcat părul pe cap, băiatul a aruncat furtunul, ceea ce a determinat o descărcare la capătul metalic al furtunului şi aprinderea benzinei.

Cizmele de cauciuc sau orice încălţăminte cu talpă de cauciuc, în atingere cu asfaltul, poate genera sarcini pînă la un potenţial de 5—10 kV. Asemenea potenţiale sînt suficiente pentru a produce scîntei cînd omul atinge diferite obiecte, declanşînd chiar explozii în cazul materialelor inflamabile.

In toate cazurile de electrizare a omului, elementul periculos constă în păstrarea sarcinilor de către om un timp mai îndelungat. Pentru scurgerea sarcinilor un rol important are umiditatea aerului cît şi felul încălţămintei şi a duşumelei.

Drept măsuri de protecţie se recomandă evitarea pardoselilor de asfalt şi a covoarelor păroase (de lînă), care prin frecare cu încălţămintea ar putea produce sarcini electrice. Asigurarea contactului cu pămîntul este o măsură de siguranţă care se realizează prin înlăturarea încălţămintei cu talpă de cauciuc sau prin aplicarea pe talpă, a unor plăci subţiri de alamă, puse în legătură cu plăci asemănătoare aplicate sub branţuri. Mărirea umidităţii aerului până la 70% în întreprinderile cu atmosferă uscată este o măsură de protecţie eficace.

In trecut, la metodele de cercetare a electrizării prin frecare erau utilizate în general, diferite tipuri de electrometre. Acestea fie că erau puţin sensibile, fie că erau greu de mînuit, sau din cauza aplicării electrozilor metalici—ceea ce complică măsurătorile — nu erau potrivite pentru studiul comod şi exact al sarcinilor generate prin frecare. De exemplu, electrometrul cu cadran, aparat utilizat frecvent în acest scop, deşi se caracterizează printr-o sensibilitate apreciabilă, nu poate fi folosit la măsurătorile pe teren care implică deplasarea aparatului de la un loc la altul.

Pentru constatarea rapidă a sarcinilor generate prin frecare în particular şi a încărcărilor electrostatice, în general, Drozdov a construit un aparat prevăzut cu un tub electronic amplificator şi cu o lămpă cu neon, care serveşte drept indicator al cîmpului electric. Pe acest principiu, în 1945 a fost construit în laboratoarele de cercetare a materialelor electrotehnice de pe lîngă Ministerul Industriei electrotehnice din U.R.S.S., aparatul cu schema de principiu reprezentată în fig. 2.

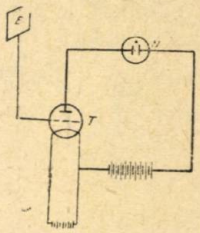


Fig. 2

Lampa cu neon, N este conectată în serie cu trioda T, iar electrodul E, cu formă de disc sau de antenă, este conectat la grilă.

La apropierea unui corp oarecare de electrodul E avînd sarcină negativă, grila va primi un potenţial negativ şi lampa cu neon se va stinge. Acelaşi efect se va produce la îndepărtarea de electrod a unui corp cu sarcini pozitive. In ambele cazuri lampa cu neon se va aprinde din nou de îndată ce dispar prin scurgere, sarcinile apărute pe grilă.

Acest «electroscop electronic» permite constatarea rapidă a electrizării, precum şi determinarea semnului sarcinilor chiar în cazul dielectricilor situaţi la cîţiva metri de electrod.

Aparatul după schema menţionată mai sus, poate fi modificat pentru alimentare cu curent alternativ de 120 V. In fig. 2 este redată schema de principiu a unui astfel de aparat.

Curentul se redresează cu ajutorul unei duble diode. Tensiunea necesară aprinderii lămpii cu neon este luată dela un divizor de tensiune conectat la redresor. Restul aparatului este identic cu acela descris mai sus.

In locul lămpii cu neon care serveşte de indicator, poate fi conectată în circuit fie o lampă de semnalizare, fie un avertizor acustic sau chiar un motor care pune în mişcare un dispozitiv pentru reducerea electrizării. Aceste piese se conectează printr-un releu.

Cu aparatele a căror principiu a fost descris mai sus, se poate stabili rapid prezenţa şi semnul sarcinilor, însă nu se pot efectua măsurători cantitative. Pentru acest scop poate servi aparatul din fig. 3, a cărui descriere o vom da mai jos, construit de Drozdov şi de colaboratorii săi (1946) în laboratorul de materiale electrotehnice de pe lîngă Ministerul Industrii Electrotehnice din U.R.S.S.

Aparatul se bazează pe principiul echilibrării cîmpului electric şi dă posibilitatea de a măsura încărcările electrostatice prin intermediul curentului electric indicat cu mare precizie. In felul acesta se elimină o serie de inconveniente care intervin în măsurătorile directe statice, iar determinările sînt rapide şi relativ uşor de făcut.

Aparatul se compune din trei părţi principale:

1. *Partea generatorului*, serveşte la perturbarea sistematică a cîmpului electric cercetat. Ea se compune dintr-un condensator variabil (C). Statorul acestui condensator (C_1) serveşte drept electrod şi poate fi adus în contact direct cu corpul încărcat sau situat în cîmpul acestuia.

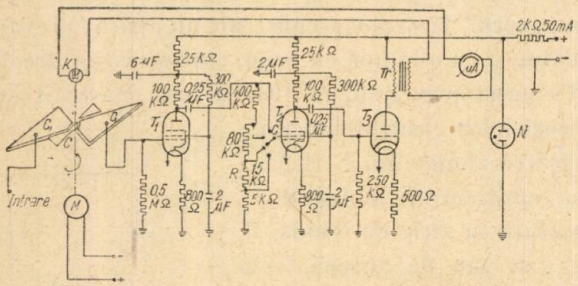


Fig. 3

Rotorul condensatorului (C) este fixat de axul unui motor de curent continuu (M), care-l pune în mişcare.

2. *Partea amplificatorului* se compune din trei tuburi electronice dintre care primele două (T_1, T_2) pentode, servesc drept amplificatoare de tensiune, iar ultimul T_3 (triodă), drept amplificator, de putere. Grila de comandă a celei de a doua pentode T_2 este prevăzută cu o rezistenţă de negativare variabilă R. Această rezistenţă dă posibilitatea de a varia sensibilitatea aparatului în trei trepte de sensibilitate, raportul dintre ele fiind aproximativ 5—6.

3. In circuitul anodic al ultimului tub se conectează un transformator (Tr), în secundarul căruia se introduce un *microampermetru* (mA); acesta constituie dispozitivul de măsurat, propriu zis. El are un comutator (K) montat pe axul aceluiaşi motor (M), care pune în mişcare condensatorul.

Comutatorul are patru plăci dintre care două sînt scurtcircuitate între ele, iar celelalte două, independente.

Funcţionarea aparatului este uşor de înţeles. Condensatorul se aşează în cîmpul electric de cercetat, sau se pune în contact cu corpul electrizat.

In timpul funcţionării motorului, capacitatea condensatorului variază periodic; ia naştere o tensiune variabilă care ajunge prin etajele de amplificare la secundarul transformatoului. Comutatorul K intrerupe circuitul microampermetrului (mA) la o alternanţă a curentului transformatorului, şi îl închide pentru cealaltă alternanţă realizînd astfel impulsuri de acelaşi sens.

Generatorul permite funcţionarea aparatului în două situaţii: electrodul este în contact direct cu corpul încărcat sau este numai plasat în cîmpul acestuia. In primul caz, pe microampermetru se citeşte adevăratul semn al sarcinii corpului în al doilea caz, o sarcină de semn contrar — de care fapt trebuie ţinut seamă.

Microampermetrul poate fi etalonat fie pentru densitatea sarcinilor, fie pentru intensitatea cîmpului.

Din expunerea de pînă acum reiese că fenomenul electrizării prin frecare este cunoscut de mult prin simplitatea lui şi prin frecvenţa apariţiei sale atît în natură cît şi în procesele industriale, sub aspecte multiple. După studiul aprofundat efectuat, putem trage concluzii asupra fenomenelor care stau la baza apariţiei sarcinilor pe această cale.

Sarcinile produse prin frecare şi condiţiile în care apar ele, dovedesc fără îndoială, că natura fenomenului electrizării prin frecare rezidă în fenomenele de contact. Fenomenele electrice care se produc la contactul a două metale, sau a unui dielectric cu un metal, sau a doi dielectrici sînt cunoscute de mult.

Intre suprafeţele de contact ia naştere o diferenţă de potenţial numită « de contact », condiţionată în primul rînd de structura fizică şi chimică a suprafeţelor în atingere. După părerea cercetătorilor, cauza principală a generării sarcinilor prin frecare este tocmai această diferenţă de potenţial de contact; la depărtarea suprafeţelor una de alta, a corpurilor aduse în contact, diferenţa de potenţial creşte în urma scăderii capacităţii şi fenomenul devine observabil. Istoricul studiului fenomenelor de contact indică tendinţa cercetătorilor, încă de la început, de a reduce fenomenele de contact la un echilibru chimic. Se părea că rezultate sigure se obţin în cazul cînd contactul suprafeţelor duce la un echilibru chimic bine definit. Cercetătorii au tras concluzia că apariţia potenţialului de contact trebuie atribuită fenomenelor chimice care au loc între suprafeţele de contact, unica explicare fiind echilibrul chimic care rezultă din aceste procese chimice. Prin lucrările lui Helmholtz şi Nernst, studiul fenomenelor de contact începe să aparţină domeniului electrochimiei, fizicienii mulţumindu-se doar cu atît cît se spune în manuale despre aceste fenomene.

Unii fizicieni contemporani cercetînd natura fenomenelor de contact, vor să arate că se pot obţine şi măsura potenţiale de contact chiar în cazurile cînd nu se produc anumite schimbări chimice, din care să rezulte vreun echilibru. Aceşti autori încearcă să explice pe bază electronică natura fenomenelor ce ar avea loc la contactul a două corpuri diferite.

Conform acestei concepţii, apariţia diferenţei de potenţial de contact în cazul a două metale diferite, rezidă în structura electronică diferită a metalelor. Chiar la temperaturi obişnuite electronii din metale posedă o energie cinetică datorită agitaţiei termice; în acelaşi timp, în interiorul metalului, din cauza interacţiunilor cu sarcini pozitive, ei vor avea o energie potenţială mai mică decît în afara metalului. Prin urmare, trebuie cheltuit lucru mecanic pentru a scoate electronul din metal. Acest travaliu de extragere condiţionează încărcarea metalelor. Se admite că la atingerea a două metale, electronii în agitaţia lor termică, pot trece dintr-un metal pe altul. La atingerea a două metale A şi B, dacă travaliul de extragere din metalul A este mai mare decît cel din metalul B, electronii vor trece din B în A. Aceasta duce la un surplus de electroni în

metalul A şi la o scădere a numărului de electroni în metalul B; drept rezultat, metalul A se încarcă negativ, iar B, pozitiv. Intre metale apare o diferenţă de potenţial datorită căreia apare un cîmp electric care împiedică trecerea ulterioară a electronilor pe metalul A. Valoarea acestei diferenţe de potenţial corespunde echilibrului dinamic dintre curenţii de electroni care trec din metalul B în metalul A, şi invers.

Insă teoria diferenţei de potenţial de contact, chiar şi în cazul metalelor, nu este de loc atît de simplă cum ar reieşi din cîteva consideraţii mai sus menţionate. O teorie completă nu poate fi elaborată decît pe baza mecanicii cuantice, care admite existenţa unui proces inadmisibil din punctul de vedere al mecanicii clasice, şi anume, a procesului de pătrundere a electronilor prin aşa numita « barieră de potenţial ». Pe această bază se poate construi o teorie satisfăcătoare a potenţialului de contact pentru metale, însă problema se complică şi rezolvarea ei întîmpină dificultăţi în cazul dielectricilor.

Experienţele arată că electrizarea prin frecare este proprie dielectricilor fiind determinată de structura fizico-chimică a stratului superficial. Dintre cele două corpuri generatoare de electricitate, dielectricul şi metalul, cel din urmă are un rol cu totul secundar. Dacă se ia un dielectric cu sarcini iniţiale negative şi se freacă de un metal oarecare, acesta din urmă capătă sarcini pozitive.

Pornind dela ipoteza unei sarcini la rece a electronilor din metal, acesta va trebui să primească totdeauna sarcini pozitive prin frecarea lui de un dielectric. Se cunosc însă, cazuri destul de numeroase cînd metalele frecate de anumiţi dielectrici capătă sarcini negative, fenomen inexplicabil prin ipoteza de mai sus. De asemenea, rămîne inexplicabilă prin această ipoteză, încărcarea unui metal cu sarcini negative la frecarea lui de un dielectric care avea iniţial sarcini pozitive. Cîmpul electric produs de sarcinile dielectricului ar trebui să împiedice trecerea electronilor pe metal, care în realitate tinde să capteze electroni. Unii cercetători admit existenţa unor ioni pozitivi liberi în metal, care, deşi cu o mobilitate redusă la contactul metalului cu un dielectric, pot părăsi metalul producînd încărcarea negativă a acestuia. In baza acestei ipoteze semnul diferit al sarcinilor metalelor în contact cu dielectrici, au următoarea explicaţie: dacă travaliul de extragere al ionilor este mare în comparaţie cu acela al electronilor, metalul va pierde electroni şi dielectricul se va încărca negativ, iar metalul, pozitiv; dacă din contră, travaliul de extragere al ionilor pozitivi va fi mai mic decît al electronilor, metalul pierde sarcini pozitive şi se încarcă negativ, iar dielectricul pozitiv.

Ipoteza de mai sus pare însă, lipsită de baze reale; posibilitatea transmiterii ionilor pozitivi în dielectric, nu este confirmată prin experienţe şi chiar admiterea unui travaliu de extragere mai mic pentru ioni pozitivi în comparaţie cu electroni este greu de imaginat. In consecinţă, explicarea electrizării prin frecare a metalelor de dielectrici, prin admiterea ipotezei ieşirii ionilor pozitivi din metal, nu duce la rezultate satisfăcătoare.

Se pare că problema se leagă numai de jocul de electroni dintre metale şi dielectrici, rol determinant avînd structura chimică a dielectricului; sarcina determinată de această structură, care se poate numi « sarcină proprie » sau « caracteristică », condiţionează semnul sarcinii metalului. Experienţele confirmă această presupunere. De exemplu, acetatul de celuloză, ca dielectric, avînd sarcina proprie pozitivă, prin frecare cu o serie de metale (plumb, alamă, cupru, aluminiu, oţel, wolfram, molibden, fier) comunică acestora sarcini negative, pe cînd cauciucul, cu sarcina proprie negativă, comunică aceloraşi metale, sarcini pozitive. Aceste fenomene se explică admiţînd că dielectricii absorb electroni din metal, sau cedează electroni acestora. Cei cu sarcină proprie pozitivă cedează electroni, metalul încărcîndu-se negativ, iar cu « sarcină proprie » negativă, captează electroni, metalul rămînînd încărcat pozitiv.

Rezultatele obţinute pentru cazul frecării metalelor de dielectrici şi ipotezele asupra apariţiei sarcinilor, pot fi aplicate şi fenomenelor care au loc la frecarea a doi dielectrici. Se poate admite şi în acest caz un joc de electroni la suprafaţa de contact a dielectricilor, condiţionat de structura moleculară a substanţelor. Doi dielectrici, unul cu sarcină proprie pozitivă, celălalt cu « sarcină proprie » negativă, prin atingere, îşi vor mări sarcinile, deoarece primul tinde să cedeze electroni, iar celălalt să-i capteze. Dacă ambii dielectrici au sarcină proprie de acelaşi semn, se pot întîmpla două cazuri:

a) dielectricii îşi păstrează sarcinile proprii,

b) dielectricii îşi schimbă sarcina proprie.

De exemplu, frecăm cauciucul cu sarcina proprie negativă, cu polistirol, care de asemenea are sarcină proprie negativă; ambii dielectrici îşi păstrează sarcinile proprii, deşi fiecare avea sarcină proprie negativă. Se poate observa de asemenea, că dielectricii care au primit sarcini corespuntăzor compoziţiei chimice şi structurii moleculare îşi păstrează timp îndelungat aceste sarcini, iar acei cărora li s-au comunicat sarcini de sens opus, necorespunzătoare structurii moleculare, le pierd într-un timp mult mai scurt.

Cele cîteva probleme în legătură cu electrizarea prin frecare tratate în lucrarea de faţă, pe baza unui material documentar, nu constituie decît o indicaţie asupra importanţei practice şi teoretice a fenomenului; lucrarea este departe de a îmbrăţişa complet aspectul practic şi cel teoretic al electrizării prin frecare. Totuşi, din acest studiu scurt, se pot întrevedea cîteva concluzii atît asupra problemei însăşi cît şi asupra problemelor electrostatice în general. In diversele ramuri ale producţiei se ridică zilnic probleme de electrostatică, a căror rezolvare prezintă o mare importanţă practică. Rezultatele obţinute în acest sens însă, nu stau în raport direct cu importanţa problemei. Lipseşte momentan, o teorie unitară care să explice mecanizmul general al fenomenului. Rezultatele teoretice, cu confirmări experimentale adeseori contradictorii, încă nu au putut duce la formularea definitivă a unei teorii a fenomenului. Incontestabil, experimentarea fenomenului întîmpină dificultăţi din cauza caracterului său superficial,

care duce la realizarea greoaie a condiţiilor experimentale, perfect identice.

Nu este exclus ca şi în acest domeniu mecanica ondulatorie să aducă lumină.

BIBLIOGRAFIE

N. G. Drozdov — *Electricitatea statică în industrie.*

Friş şi Timoreva — *Curs de fizică generală*, vol. II (tradus din limba rusă).

R. Fürth — *Untersuchungen über Kontaktpotentiale. Zur Theore der Kontaktpotentiale* (Zs. f. Phys., vol. 68, pag. 735).

Schimann — *Studien zur Frage nach der Existenz einer Elektrisierung durch Reibung zwischen festen Körpern und Gasen* (Zs. f. Phys., vol. 46, pag. 747).

OBSERVAŢII PREALABILE ASUPRA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE

N. N. MIHĂILEANU

profesor la Institutul Pedagogic din Timişoara

DESLEGAREA unei probleme de matematici se face uneori mult mai uşor dacă în prealabil se foloseşte o observaţie adecuată.

De exemplu: *fie* I, I_a, I_b, I_c *centrele cercurilor înscrise şi exînscrise unui triunghi* ABC, *bisectoarea* AI *retaie cercul* ABC *în* A′ *şi cercul* $I_a I_b I_c$ *în* A″; A′ *este mijlocul segmentului* II_a *şi* A *este mijlocul segmentului* IA″.

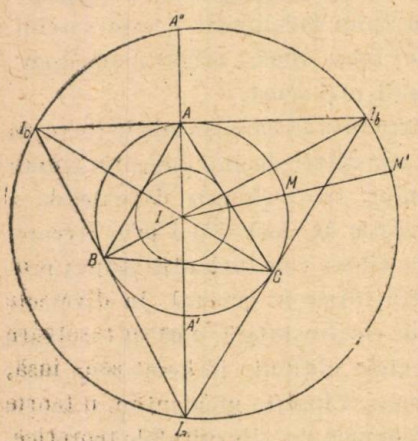


Fig. 1

Putem da o soluţie directă acestei proprietăţi; dar este mai simplu să observăm că *A*, *B*, *C* sînt picioarele înălţimilor triunghiului $I_a I_b I_c$; deci cercul *ABC* este cercul celor nouă puncte ale triunghiului $I_a I_b I_c$; pentru un triunghi oarecare, cercul celor nouă puncte este omoteticul cercului circumscris, cu centrul de omotetie în ortocentru şi raportul 1:2; în cazul nostru, rezultă că cercul *ABC* este omoteticul cercului $I_a I_b I_c$ cu centrul de omotetie în *I*, raport 1:2. Cu alte cuvinte, *pe orice secantă dusă prin I, care taie cercul ABC în M şi cercul* $I_a I_b I_c$ *de aceiaşi parte în M′, punctul M este mijlocul lui IM′.*

Să considerăm acum o relație metrică. Să arătăm că *dacă notăm cu* m_a, m_b, m_c *medianele unui triunghi și cu* m *semisuma lor, atunci aria* S *a triunghiului este dată de formula*:

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{m\,(m - m_a)\,(m - m_b)\,(m - m_c)}$$

Soluția directă în acest caz, duce la calcule prea complicate. Dar acest calcul poate fi evitat, observîndu-se că se poate forma un triunghi cu medianele m_a, m_b, m_c a cărui arie este $\frac{3}{4}S$. Rămîne să se aplice formula cunoscută care dă aria în funcție de laturi.

In adevăr, fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor; paralela din C_1 la AA_1 taie pe A_1B_1 în A'. Triunghiul CC_1A' este cel căutat, deoarece:

$$CC_1 = m_c;\quad C_1A' = AA_1 = m_a;\quad CA' = BB_1 = m_b$$

Paralela din C_1 la mediana BB_1 taie pe BC în A_2 simetricul lui A_1 față de B; segmentele C_1A_2, BB_1, CA' sînt egale și paralele; deci $A'A_2$ este paralel cu CC_1; triunghiul CC_1A' este deci echivalent cu CC_1A_2 format din CC_1B de arie $\frac{1}{2}S$ și din BC_1A_2 echivalent cu BC_1A_1 de arie $\frac{1}{4}S$.

Deci, aria $CC_1A' = \frac{3}{4}S$.

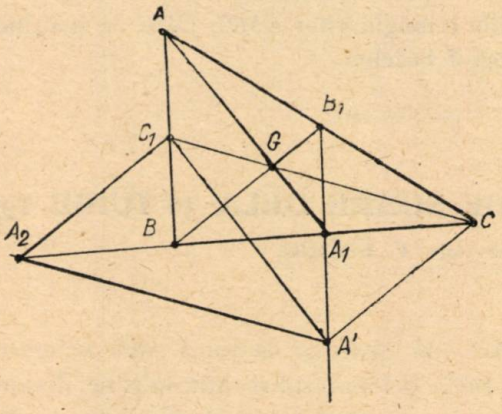


Fig. 2

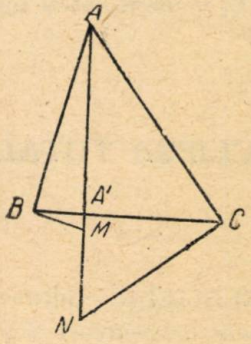


Fig. 3

In problema E: 262, pentru școala de șapte ani, se arată că *dacă mediatoarele laturilor* AB, AC *ale unui triunghi* ABC *se intersectează cu înălțimea* AA_1 *în punctele* M *și* N, *avem relația*:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Dela început (a se vedea figura problemei, R.M.F. vol. IV, pag. 319) problema poate fi citită în raport cu triunghiul ADE, raportul din partea a doua fiind egal cu raportul corespunzător al laturilor AD, AE. Se obţine astfel, enunţul mai simplu: *In triunghiul ABC, perpendicularele în B şi C pe laturile AB, AC taie înălţimea AA' în M şi N. Avem relaţia:*

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

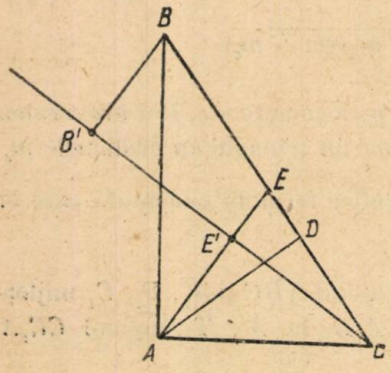


Fig. 4

Sub această formă sîntem conduşi la o soluţie mai simplă; din triunghiurile dreptunghice ABM, ACN avem:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AI} \quad ; \quad \overline{AC}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{AI}$$

şi împărţim între ele aceste relaţii.

Şi enunţul problemei E: 265 se poate simplifica ducînd perpendiculara pe mediana AE a triunghiului dreptunghic ABC nu prin D, piciorul perpendicularei, ci chiar prin vîrful C. Dacă B' este proiecţia lui B pe această dreaptă, trebuie arătat că $BB' = 2 \cdot DE$.

Dar, dacă E' este piciorul înălţimii din C pe latura AE în triunghiul isoscel AEC, atunci: $DE = EE'$ şi $BB' = 2 \cdot EE'$.

Soluţia punctului 3 al problemei E: 293 se poate de asemenea scurta, observînd pe figura dela pag. 320, anul IV, că segmentele DN, NM, ME sînt toate egale, deci, $DE : ME = 3$ şi ariile triunghiurilor CME, CDE cu înălţimea din vîrful C, comună, stau în raportul bazelor.

ECLIPSA TOTALĂ DE SOARE DELA 30 IUNIE 1954

Prof. univ. C. DRÎMBĂ

ECLIPSELE — întunecimile — de Soare şi de Lună sînt fenomene care se produc oridecîteori Soarele, Luna şi Pămîntul se află în linie dreaptă, sau suficient de aproape de această aşezare. După cum se ştie, Luna se mişcă în jurul Pămîntului, iar acesta împreună cu satelitul său se mişcă în jurul Soarelui. Curba, sau drumul, descris de Pămînt se numeşte orbita Pămîntului, pe cînd orbita Lunii este drumul descris de Lună în mişcarea ei în jurul Pămîntului. Orbita Pămîntului este aşezată într-un plan care în astronomie poartă numele de ecliptică. Orbita Lunii se află aşezată într-un alt plan care nu coincide — nu se suprapune — cu planul eclipticii, dar face un unghi mic

cu acesta, de 5°. Este evident că dacă drumul Lunii în jurul Pămîntului ar fi situat în planul eclipticii, am avea în acest caz, o eclipsă de Soare la fiecare 29 zile, aproximativ, cînd Luna trecînd între Pămînt şi Soare, la momentul de Lună nouă, aruncă pe suprafaţa Pămîntului pata ei de umbră. De asemenea, tot la aproximativ fiecare 29 zile, s-ar produce o eclipsă de Lună atunci cînd Pămîntul s-ar afla între Lună şi Soare, la momentul Lunii pline, cînd Luna trece prin conul de umbră al Pămîntului. Cu alte cuvinte, eclipsele de Soare şi de Lună s-ar produce succesiv la intervale de aproximativ două săptămîni. Planul orbitei Lunare este însă, înclinat pe planul eclipticei şi prin urmare, Luna se află în planul eclipticei la fiecare două săptămîni cînd traversează dintr-o parte în alta planul eclipticei, odată într-un sens şi altă dată în sens opus. Cele două puncte de intersecţie dintre orbita Lunii şi planul eclipticei se numesc în astronomie, nodurile orbitei lunare şi anume, nodul ascendent, prin care Luna trece cînd traversează planul eclipticei spre partea nordică în care se află polul nord ceresc şi nodul descendent, prin care Luna trece cînd traversează ecliptica în sens invers, după aproximativ, două săptămîni. Dreapta care uneşte cele două noduri se numeşte *linia nodurilor* şi ea este tocmai intersecţia dintre planul orbitei lunare şi planul eclipticei.

Care este acum, mecanismul de producere al unei eclipse?

Deoarece o eclipsă de Soare sau de Lună se produce atunci cînd aceste două corpuri şi Pămîntul se află în linie dreaptă — sau aproape — rezultă următoarele două condiţii:

1° Luna să se afle la unul din noduri sau în vecinătatea lor.

2° Linia nodurilor — situată în planul eclipticei — să treacă prin Soare sau în vecinătatea Soarelui.

Cu privire la prima condiţie este evident că Luna trece odată prin nodul ascendent şi apoi prin cel descendent la fiecare interval de timp de aproximativ 27 zile 5 ore 5 minute. Acest interval de timp poartă numele de *revoluţie draconitică.*

Cu privire la a doua condiţie se ştie că, în mişcarea Pămîntului în jurul Soarelui, planul orbitei lunare se deplasează odată cu Pămîntul, rămînînd tot timpul paralel cu el însăşi, de unde rezultă că linia nodurilor rămîne în planul eclipticii paralelă cu ea însăşi. Prin urmare, de două ori pe an linia nodurilor trece prin Soare. De aceea eclipsele care au loc în cursul unui an se produc la fiecare şase luni, atunci cînd linia nodurilor orbitei lunare trece prin Soare. Desigur că la aceste două momente Luna nu se află exact la unul din noduri, adică în planul eclipticii, dar se află în apropiere de acest plan mai ales din cauza înclinării mici, de 5°, a planului orbitei lunare.

O eclipsă de Lună se produce la momentul de Lună plină şi este parţială sau totală, după cum Luna traversează în parte sau în total, conul de umbră al Pămîntului. O eclipsă de Soare se produce la momentul de Lună nouă, cînd Luna se află între Pămînt şi Soare astfel, încît conul de umbră al Lunii inter-

sectează suprafaţa Pămîntului formîndu-se pata rotundă de umbră aruncată de Lună. Se vede prin urmare, că producerea eclipselor este un fenomen legat şi de fazele Lunii. Se numeşte *revoluţie sinodică* a Lunii intervalul de timp de 29 zile 12 ore 44 minute care se scurge dela momentul Lunii pline la momentul Lunii pline, imediat următor. Eclipsele de Soare şi de Lună se repetă în aceiaşi ordine la fiecare interval de timp de 18 ani şi 11 zile, care cuprinde 242 revoluţii draconitice şi 223 revoluţii sinodice. Observînd repetarea cu regularitate a eclipselor de Soare şi de Lună, astronomii caldeeni au descoperit acest interval de timp pe care l-au denumit Saros. In decursul unui Saros se produc în medie, 71 eclipse: 43 de Soare şi 28 de Lună. Intr-un an se pot produce cel mult 7 eclipse — 5 sau 4 de Soare şi 2 sau 3 de Lună — şi cel puţin două eclipse, în care caz acestea sînt de Soare. O eclipsă de Soare poate fi totală, parţială, sau inelară.

Eclipsele totale de Soare se produc atunci cînd suprafaţa Pămîntului intersectează conul de umbră al Lunii, pe cînd o eclipsă inelară se produce atunci cînd suprafaţa Pămîntului intersectează prelungirea conului de umbră. O eclipsă de Soare este parţială pentru acele locuri ce sînt situate în exteriorul conului de umbră şi în interiorul conului de penumbră al Lunii.

Eclipsa de Soare dela 30 iunie este o sclipsă totală — pentru acele locuri de pe suprafaţa Pămîntului pe unde trece pata de umbră a Lunii, care în mişcarea ei dă naştere la *linia de centralitate*, care pentru această eclipsă are lăţimea de 150 km. Acest lucru înseamnă că diametrul petei de umbră este de 150 km. Lungimea liniei de centralitate este de 13.000 km începînd cu partea centrală a Americii de Nord, traversînd peste peninsula Scandinavică, Marea Baltică, apoi peste teritoriul U.R.S.S., prin Lituania, Bielorusia, Ucraina, Donbas, Caucazul de Nord, Gruzia, Azerbaigian, trecînd pe la Bacu peste marea Caspică, apoi prin Iran pînă în partea de N—V a Indiei. Pata de umbră a Lunii descrie linia de centralitate în 169 minute.

La noi în ţară această eclipsă apare ca parţială, după cum se vede pe harta alăturată. Pentru Bucureşti avem următoarele date:

$14^h05^m14^s$ — începutul eclipsei, primul contact exterior dintre discul Lunii şi discul Soarelui,

$15^h19^m56^s$ — momentul fazei maxime sau mijlocul eclipsei.

$16^h27^m54^s$ — sfîrşitul eclipsei, al doilea şi ultimul contact exterior dintre discul Lunii şi al Soarelui.

La Bucureşti — la momentul fazei maxime — 83% din diametrul Soarelui va fi acoperit de discul Lunii.

In U.R.S.S. — pe al cărei teritoriu trece linia de centralitate — se fac pregătiri de mai mulţi ani pentru observarea eclipsei totale de Soare dela 30 iunie, construindu-se aparate noi în acest scop. Eclipsele de Soare sînt fenomene rare ce se produc în medie, cam odată la 400 ani într-un loc dat. Misiunile astronomice care observă o eclipsă totală de Soare se instalează pe

locuri situate în interiorul liniei de centralitate. O eclipsă totală de Soare durează cel mult 7 minute, deoarece pata de umbră a Lunii se deplasează cu viteză mare pe suprafaţa Pământului şi uneori diametrul ei este mic, cel mult 300 km.

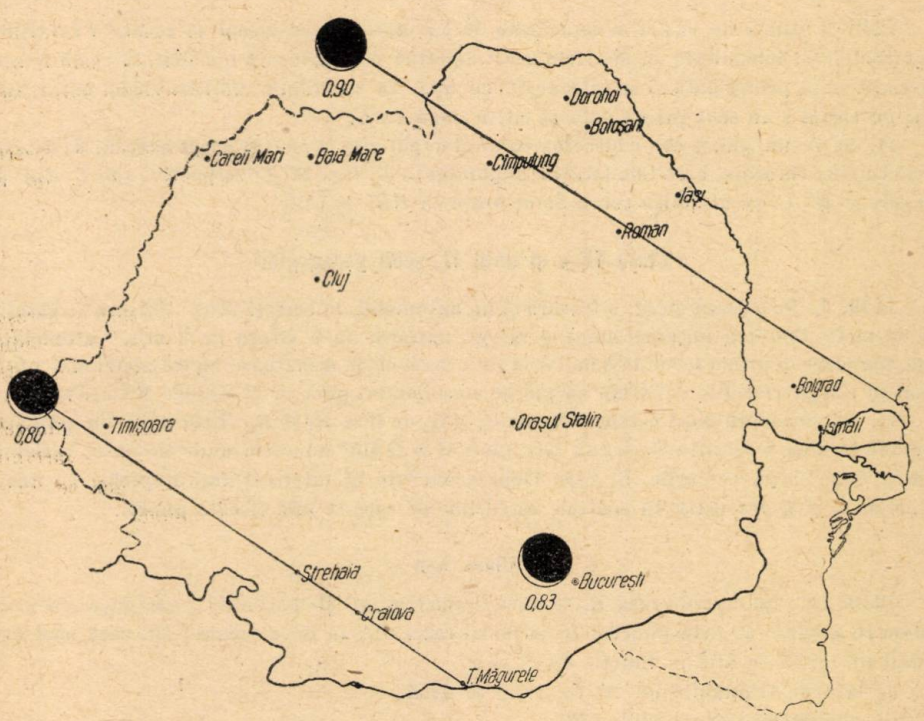
Observarea unei eclipse de Soare urmăreşte date cu privire la următoarele categorii mari de probleme:

1° Verificarea mişcării Lunii şi Pământului în sistemul solar.

2° Studiul atmosferei Soarelui, alcătuită după cum se ştie, din stratul inversant care acoperă fotosfera — suprafaţa Soarelui — urmat apoi, de cromosferă şi apoi de ultimul strat, coroana solară.

3° Cercetarea radio-undelor emise de Soare.

4° Studiul atmosferei Pământului cu privire la propagarea undelor electromagnetice şi alte probleme ale atmosferei terestre.



Cu privire la primul punct, se urmăreşte determinarea cu precizie, a momentelor contactelor dintre discurile Lunii şi Soarelui.

Eclipsele de Lună şi de Soare se calculează cu mult timp înainte, dată fiind importanţa lor pentru studiul Soarelui. Astăzi există aparate şi metode pentru a studia atmosfera Soarelui oricînd, nu numai în timpul eclipselor de Soare, totuşi, eclipsele totale oferă cele mai bune condiţii; se înregistrează

eventualele protuberanţe — flăcări sau explozii — care se ridică pînă la mari înălţimi în cromosferă.

La 15 februarie 1961 va avea loc o eclipsă totală de Soare vizibilă la noi în ţară. O altă eclipsă de Soare, deasemenea totală, va avea loc la 11 august 1999; linia de centralitate va traversa ţara noastră.

CHESTIUNI DE EXAMEN

PROBLEMELE DATE LA OLIMPIADA MATEMATICĂ DIN IAŞI LA 7 MARTIE 1954

Clasa VIII-a

1248. I. Dintr-un vas cu o capacitate de 128 litri plin cu alcool se scoate o cantitate de alcool şi se înlocuieşte cu apă. Din acest amestec se mai scoate o cantitate egală în litri cu cea scoasă prima dată şi se înlocueşte cu apă. In vas rămîn 98 litri alcool curat. Cîţi litri de alcool s-au scos prima dată şi cîţi a doua oară?

II. Se ia un punct M pe bisectoarea unui unghi xOy şi pe OM drept coardă, se descriu două cercuri oarecare, care taie laturile unghiului în B, C şi B', C' respectiv. (B, C sînt pe un cerc şi B', C' pe al doilea cerc). Să se arate că $BB' = CC'$.

Clasa IX-a şi anul II, şcoli pedagogice

1249. I. Pe o şosea merg: o trăsură şi un automobil, în acelaşi sens. Trăsura se găseşte cu 84 metri înaintea automobilului şi merge uniform cu o viteză de 3 m/s. Automobilul însă, parcurge în prima secundă 8 m, iar în fiecare secundă următoare cu 0,1 metri mai puţin decît în cea precedentă. Cît timp va merge automobilul pînă ce va ajunge trăsura?

II. Se consideră două cercuri secante O_1 şi O_2 de raze R_1 şi R_2. Prin unul din punctele comune se duce o secantă variabilă CD, unde C şi D sînt punctele unde secanta variabilă taie a doua oară, cercurile. Se cere locul geometric al intersecţiilor dreptelor ce unesc punctele C şi D respectiv cu centrele cercurilor pe care se află fiecare punct.

Clasa X-a

1250. Intr-un cerc de rază R, se duce diametrul AG şi coarda AC, care face cu acest diametru unghiul x. Prin punctul D, mijlocul razei OG, se duce secanta DC care mai taie cercul în B. Să se afle în funcţie de R şi x.

a) laturile triunghiurilor ACD, ABD şi ACB;

b) unghiurile triunghiului ABC;

c) să se determine x cu condiţia ca aria triunghiului ABC să fie de p ori mai mare decît aria triunghiului ACG şi să se discute rezultatul după valorile pe care le poate lua p.

Clasa XI-a

1251. I. Paralel laturii BC a unui triunghiu ABC, se duce o secantă MN ce taie AB în M şi AC în N.

---

*) La problemele 1248—1272 se primesc soluţii pînă la 1 octombrie 1954.

Să se arate că punctul A are aceeași putere față de cercurile de diametrii BN și CM.

II. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}=b$$

Anul I școli pedagogice

1252. I. La trei magazine se pune în vînzare cu același preț, 135 kg mere. Primul magazin rămîne cu 5 kg nevîndute, al doilea cu 4 kg și al treilea, cu 3 kg. Cîte kg a avut fiecare magazin, dacă cele trei magazine au realizat respectiv: 360 lei, 336 lei și 288 lei?

Rezolvare aritmetică și verificare algebrică.

Anul III școli pedagogice

1253. I. Unui magazin aprozar i s-au adus niște lăzi cu mere cu prețul de lei 2,25 pe kg, cu dispoziția să plătească 20 lei pentru transport și să vîndă kilogramul de mere cu 2,70 lei. La descărcarea lăzilor se constată că 0,15 din mere sînt stricate. Cîte kg de mere au fost aduse dacă aprozarul a încasat cu 8,75 lei mai puțin decît trebuia să încaseze?

II. Un triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A, are unghiul C de 30° și ipotenuza a. Se prelungește cateta AC cu segmentul $CD = a$ și prin D se duce o paralelă la ipotenuză. Să se afle aria și volumul solidului născut prin rotirea triunghiului dreptunghic în jurul acestei paralele.

Anul I școli tehnice

1254. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC. Cu o rază egală cu aceea a cercului circumscris dat, se descriu trei cercuri cu centrele în A, B, C. Tangentele comune exterioare formează un triunghi $A'B'C'$.

a) Să se arate că triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.

b) Să se găsească raportul de asemănare în funcție de laturile triunghiului ABC.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL TEHNIC GALAȚI. AUGUST 1954

1255. Se dă ecuația $\dfrac{5x}{5m^2-6m}-\dfrac{10}{(2m+1)(6-5m)}=\dfrac{-1}{mx(2m+1)}$

unde m este un parametru.

Se cere să se discute rădăcinile ecuației după valorile parametrului m.

Să se determine parametrul m astfel ca suma inverselor rădăcinilor să fie egală cu 10.

1256. Se dă triunghiul ABC notînd cu O centrul cercului circumscris. Se duce diametrul AD și perpendiculara din B pe acest diametru, care taie pe AC în E. Se cere:

a) Să se arate că: $AB^2 = AC \cdot AE$,

b) Să se calculeze segmentul DE cunoscînd laturile: $AC = b$, $AB = C$ și raza R a cercului circumscris. Caz particular $R = a$.

Să se rezolve ecuația:

$$4\sin 4x + \operatorname{tg} 2x + 4\sin 2x + \operatorname{tg} x = 0.$$

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1006

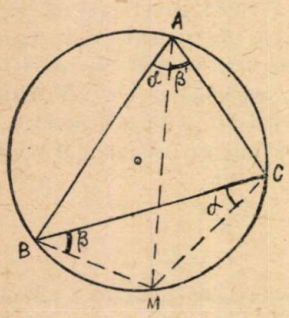
Triunghiul ABC este inscris într-un cerc. Notăm cu m, n, p distanțele corespunzătoare dela un punct oarecare de pe cerc la laturile a, b, c ale triunghiului. În ce caz există relația:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{p}.$$

Discuție.

K. Reabenco

Soluție. Fie M un punct pe arcul BC (vezi figura). Notînd $\sphericalangle MAB = \alpha$, $\sphericalangle MAC = \beta$ avem:



$$m = \frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$n = \frac{b}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}(C + \alpha)}$$

$$p = \frac{c}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}(B + \beta)}.$$

Relația se verifică imediat. Luînd punctul M pe arcul AB sau pe arcul AC, se constată că relația nu se mai verifică.

Discuție. Relațiile:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} + \frac{c}{p}; \quad \frac{b}{n} = \frac{a}{m} + \frac{c}{p}; \quad \frac{c}{p} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n};$$

au loc respectiv pentru punctele arcelor BC, AC, AB.

Problema 1010

Un cerc, ce trece prin extremitățile diagonalei BD a unui paralelogram $ABCD$, taie laturile AB, AC respectiv în E și F. Perpendicularele duse în E pe AB și în F pe AD sînt întîlnite respectiv în P și Q de o perpendiculară oarecare pe diagonala AC.

Dacă se notează cu R al patrulea vîrf al paralelogramului $AQRP$, în care PQ este una din diagonale, să se demonstreze că: 1) diagonala AR este perpendiculară pe diagonala BD a paralelogramului dat; 2) perpendiculara din B pe AQ și perpendiculara din D pe AP se întîlnesc pe diagonala AC.

Gh. D. Simionescu

Soluția I. În patrulaterul inscriptibil $BDFE$ perpendicularele în E și F pe AB și AD se întîlnesc în G. Dreapta AG este perpendiculară pe BD (vezi problema 611 R.M.F.). Rămîne să arătăm că dreapta AG coincide cu diagonala AR a paralelogramului, adică, trece prin mijlocul lui PQ. Pentru aceasta se observă că triunghiurile ABC și PGQ sînt asemenea ca avînd laturile perpendiculare. Pentru același motiv triunghiurile PGM și ABO sînt asemenea. Deoarece $AO = \frac{1}{2} AC$ rezultă $PM = \frac{1}{2} PQ$ (O mijlocul diagonalei AC; M intersecția lui AG cu PQ).

2. Deoarece perpendicularele din P, Q, A pe laturile triunghiului BCD se întîlnesc în G, triunghiurile APQ și BCD sînt ortologice. Deci, perpendicularele din B pe AQ, din D pe AP și din C pe PQ sînt concurente. Perpendiculara din C pe PQ este diagonala AC.

Soluția II-a, dată de elevul Marius Iosifescu. Vom folosi următoarele teoreme:

a) În triunghiul ABC mijloacele segmentelor determinate de laturile AB, AC pe perpendicularele ridicate pe dreapta SH (S fiind mijlocul lui BC, H ortocentrul), se găsesc pe înălțimea AA'.

b) Dacă perpendicularele coborîte din vîrfurile unui triunghi ABC pe laturile corespunzătoare ale unui triunghi $A_1B_1C_1$ sînt concurente, perpendicularele coborîte din vîrfurile triunghiului $A_1B_1C_1$ pe laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC sînt de asemenea concurente.

Aplicînd teorema a) în triunghiul BDG, G fiind intersecția dreptelor DE și BF, obținem primul punct al enunțului.

Aplicînd teorema b), triunghiurilor APQ și ABD (perpendicularele din A, P și Q respectiv pe BD, AB și $AD - AR$, PE și QF — concură în G), obținem al doilea punct al enunțului.

Notă. *Teorema a) se obține prin calcul considerînd perpendiculara din A' pe SH și ținînd seamă că* $ctg\ (HGC) = \frac{1}{2}(tg\ C - tg\ B)$.

Cu ușoare modificări, cele spuse mai sus se pot aplica și în cazul unui cerc oarecare ce trece prin B și D.

Problema 1011

Un tub sonor închis și unul deschis funcționează simultan dînd un sunet care are 5 bătăi pe secundă. Tubul deschis are 30 cm lungime. Se cere lungimea tubului închis.

* * *

Soluție. Avem:

$$N_1 = \frac{V}{4L_i} \quad ; \quad N_d = \frac{V}{2L_d},$$

$$|N_i - N_d| = 5 \quad ; \quad L_d = 0{,}3 \text{ m},$$

deci $$N_d = \frac{340}{2 \cdot 0{,}3}, \quad \text{sau} \quad N_d = 566{,}6\ Hz$$

Putem avea:

$$N_i = 571{,}6\ Hz$$

sau

$$N_i = 561{,}6\ Hz$$

Lungimea tubului închis poate fi deci:

$$L_i = \frac{340}{4 \cdot 571{,}6} = 0{,}14 \text{ m} = 14 \text{ cm}$$

sau

$$L_i = \frac{340}{4 \cdot 561{,}6} = 0{,}15 \text{ m} = 15 \text{ cm}.$$

Problema 1024

Fie A și A' două puncte pe cercurile de bază ale unui cilindru circular drept astfel că AA' intersectează axa cilindrului. Cunoscîndu-se aria totală S a cilindrului și lungimea segmentului $AA' = l$ să se calculeze raza și înălțimea cilindrului. Discuție.

Aplicație: $AA' = 20$ dm, $S = 200$ dm^2 (vezi problema 957).

M. D. Constantinescu, elev, București

Soluție. Fie R raza cerută, h înălțimea cilindrului. Conform enunțului vom avea:

$$2\pi R^2 + 2\pi Rh = \pi S;$$

$$4R^2 + h^2 = l^2$$

Eliminînd pe h, obținem:

$$(2R^2 - S)^2 = 4R^2(l^2 - 4R^2)$$

$$20R^4 - 4(S + l^2)R^2 + S^2 = 0$$

de unde:

$$R = \sqrt{\frac{S + l^2 + \sqrt{(S + l^2)^2 - 5S^2}}{10}} \text{ și}$$

$$h = \sqrt{\frac{6l^2 - 4S \mp \sqrt{(S + l^2)^2 - 5S^2}}{10}}$$

Valoarea R este reală pentru

$$(S + l^2)^2 - 5S^2 \geqslant 0$$

de unde:

$$l^2 > (\sqrt{5} - 1)S \qquad (1)$$

Intrucît:

$$(6l^2 - 4S)^2 \geqslant 16(S + l^2)^2 - 80S^2$$

se reduce la:

$$l^4 - 4Sl^2 + 4S^2 \geqslant 0$$

sau

$$(l^2 - 2S)^2 \geqslant 0$$

h, în virtutea condiției (1), are ambele valori reale. In concluzie, pentru $l^2 > (\sqrt{5}-1)S$, problema are două soluții.

Aplicație. In acest caz:

$$R = \sqrt{\frac{600 + 400}{10}}$$

$$R_1 = 10 \text{ dm} \quad \text{și} \quad R_2 = 4{,}47 \text{ dm}$$

$$h_1 = 0 \text{ dm} \quad \text{și} \quad h_2 = 17{,}88 \text{ dm}$$

Problema 1028

In semicercul cu diametrul AB se înscrie patrulaterul $ABCD$ și se notează cu E, F, G mijloacele coardelor BC, CD, DA. Perpendiculara din E pe dreapta BF taie tangenta în B la semicerc în P, iar perpendiculara din G pe dreapta AF taie tangenta în A la semicerc, în Q. Să se demonstreze că dreapta PQ este paralelă cu CD.

Gh. D. Simionescu

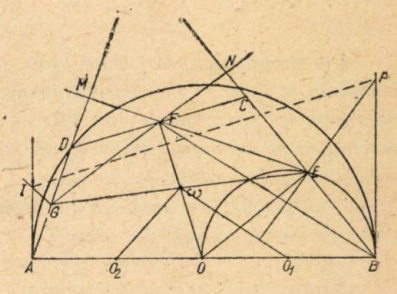
Soluție. Se prelungește EF până taie latura AD în M; de asemenea se prelungește GF până taie pe BC în N.

Deoarece $EF \parallel BD$ și $GF \parallel AC$ unghiurile GME și GNE sînt drepte, iar patrulaterul $EGMN$ este inscriptibil, centrul cercului fiind mijlocul ω al segmentului GE.

Să căutăm axa radicală a cercurilor (O) și (ω). Pentru aceasta considerăm cercurile (ω), (O) și cercul (O_1) cu diametrul OB și determinăm centrul radical. Axa radicală a cercurilor (ω) și (O_1) care are punctul E comun, se capătă ducând din E perpendiculara pe linia centrelor

ωO_1 sau pe BF, deoarece $\omega O_1 \parallel BF$. Intersecția tangentei în B la cercul (O) cu perpendiculara din E pe BF este centrul radical (P) al cercurilor (O), (ω), (O_1), deci, aparține axei radicale a cercurilor (O) și (ω). La fel se arată că Q aparține aceleiași axe radicale.

Așa dar, PQ este axa radicală a cercurilor (O) și (ω) și e perpendiculară pe $O\omega$, adică pe OF. (Se știe că mijloacele laturilor unui patrulater formează un paralelogram). Deoarece $PQ \perp OF$ rezultă că PQ este paralelă cu CD.



Soluție analitică, dată de elevul Marius Iosifescu. Fiind dat segmentul $AB = 2a$, să găsim în planul său două puncte C și D, astfel ca E, F, G fiind mijloacele segmentelor BC, CD, DA, perpendicularele din E și G, respectiv pe BF și AF, să taie perpendicularele în B și A pe AB în punctele P și Q așa fel încât $PQ \parallel CD$.

Luăm ca axe $AB\,(Ox)$ și mediatoarea lui $AB\,(Oy)$. Fie $C(x_1, y_1)$ $D(x_2, x_2)$. Vom avea:

$$A(-a, o),\ B(a, o),\ E\left(\frac{x_1 + a}{2};\ \frac{y_1}{2}\right),\ F\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right),\ G\left(\frac{x_2 - a}{2};\ \frac{y_2}{2}\right).$$

Coeficienții unghiulari ai dreptelor AF și BF, sînt:

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2 + 2a} \quad \text{și} \quad \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2 - 2a}.$$

Dreptele QG și PE fiind respectiv perpendiculare pe AF și BF au ecuațiile:

$$(QG) \qquad y - \frac{y_2}{2} = -\frac{x_2 + x_1 + 2a}{y_1 + y_2}\left(x - \frac{x_2 - a}{2}\right)$$

$$(PE) \qquad y - \frac{y_1}{2} = -\frac{x_1 + x_1 - 2a}{y_2 + y_2}\left(x - \frac{x_1 + a}{2}\right).$$

Inlocuind respectiv în aceste ecuații pe x cu $-a$ și $+a$, obținem:

$$y_Q = \frac{y_2}{2} + \frac{x_1 + x_2 + 2a}{y_1 + y_2}\left(\frac{x_2 + a}{2}\right)$$

$$y_P = \frac{y_1}{2} - \frac{x_1 + x_2 - 2a}{y_1 + y_2}\left(\frac{a - x_1}{2}\right).$$

Coeficientul unghiular al dreptei PQ este deci:

$$\frac{y_Q - y_P}{-a - a} = -\frac{1}{4a}\left[y_2 - y_1 + \frac{(x_1 + x_2)\,(x_2 - x_1 + 4a)}{y_1 + y_2}\right].$$

Coeficientul unghiular al dreptei CD fiind $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ pentru ca PQ și CD să fie paralele, trebuie să avem:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{4a}\left[y_2 - y_1 + \frac{(x_1 + x_2)\,(x_2 - x_1 + 4a)}{y_1 + y_2}\right]$$

sau

$$(x_2 + x_1 + 4a)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right) = 0$$

de unde

$$x_1 - x_2 = 4a \qquad (1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2. \qquad (2)$$

Ecuația (1) ne arată că punctele C și D trebuie să fie situate pe două perpendiculare pe AB, iar abscisele lor să difere cu $4a$.

Ecuația (2) ne arată că punctele C și D mai pot fi situate pe un cerc cu centrul în mijlocul lui AB cercul de diametru AB, cazul problemei propuse, sau orice cerc concentric cu el.

Problema 1031

Un circuit oscilant format dintr-un condensator, o bobină cu inductanță proprie 1,6 H și rezistența 5 ohmi și o rezistență electrică de 35 ohmi se conectează la un generator de curent alternativ cu frecvența de 400 kHz și diferență de potențial 30 volți. Știind că se observă fenomenul de rezonanță în serie, să se calculeze intensitatea curentului, puterea reactivă și capacitatea condensatorului în cm.

Presupunînd că acest circuit ar fi în legătură cu o antenă, să se calculeze lungimea de undă pe care s-ar produce emisia.

Galațky Gheorghe elev, Tîrgoviște

Soluție. Intensitatea curentului:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{30}{35 + 5} = 0{,}75 \text{ A}.$$

Factorul de putere este $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = 1$, întrucît circuitul fiind în rezonanță, avem $R = Z$.

Puterea reactivă:

$$P_r = UI \sin \varphi = 0.$$

Puterea activă:

$$P_a = UI \cos \varphi = 22{,}5 \text{ watt}.$$

Capacitatea condensatorului se scoate din relația:

$$\omega_{rez} = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

de unde:

$$C = \frac{1}{3\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 16 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}6} \text{ farazi}$$

$C = 9{,}8946 \cdot 10^{-14}$ farazi, deci

$$C = 9{,}8946 \cdot 10^{-14} \cdot 9 \cdot 10^{11} = 0{,}0890514 \text{ cm}.$$

Lungimea de undă pe care s-ar produce emisia:

$$\lambda = \frac{e}{f} = \frac{300\,000\,000}{400\,000} = 750 \text{ m}.$$

PROBLEME PROPUSE *)

1257. Să se construiască un punct P în planul triunghiului echilateral ABC, astfel că să avem: $\frac{PA}{1} = \frac{PB}{2} = \frac{PC}{3}$ și să se calculeze distanța PA în funcție de latura triunghiului ABC.

Gh. Bazacov, Turnu-Severin

*) La problemele propuse 1248—1272 se primesc soluții pînă la 1 octombrie 1954.

1258. In ce raport K trebuie să împartă punctele A_1, B_1, C_1 respectiv laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC, pentru ca suma:

$$S = \overline{AA_1}^2 + \overline{BB_2}^2 + \overline{CC_1}^2$$

să fie: *a)* minimă; *b)* maximă.

Al. Dan Popescu, elev, Reşiţa

1259. Suma patratelor distanţelor oricărui punct din spaţiu, la două vîrfuri opuse ale unui paralelipiped dreptunghi este egală cu suma patratelor distanţelor aceluiaşi punct faţă de oricare alte două vîrfuri opuse ale aceluiaşi paralelipiped. Care este locul geometric al punctelor pentru care suma de mai sus este egală cu suma patratelor dimensiunilor paralelipipedului?

Corneliu Georgescu, Craiova

1260. Considerăm un patrulater convex $ABCD$. Fie M, N, P punctele care împart segmentele DA, DB, DC într-un acelaşi raport K. Fie Q, R, S mijloacele segmentelor BC, AC, AB. Să se demonstreze că dreptele MQ, NR, PS sunt concurente.

Marius V. Iosifescu elev, Piteşti

1261. Să se rezolve sistemul:

$$\cos(x + y) = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos x = 3 \cos y$$

Popescu G. Sergiu, elev, Slatina

1262. Să se arate că dacă $a + b + c + \ldots = k$ constant, atunci:

1) produsul $\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c \ldots$ este maxim cînd $a = b = c = \ldots$
2) suma $\cos a + \cos b + \cos c + \ldots$ este de asemenea maximă cînd $a = b = c = \ldots$
3) suma $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c + \ldots$ este minimă cînd $a = b = c = \ldots$

David Haim, profesor, Bîrlad

1263. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

şi apoi, folosind rezultatele să se deducă egalităţile:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{24} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2});$$

$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

C. Ionescu-Ţiu

1264. O corabie navigînd într-un drum dat se află la un moment pe același aliniament cu două faruri F și F'. Unghiul format de drum și direcția la faruri este α. După ce parcurge distanța a unghiul în planul orizontal la cele două faruri este maxim și egal cu β.

Să se calculeze distanțele dela navă la cele două faruri.

C. V. Costăchescu

1265. Să se arate că în orice triunghi avem:

$$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}>3$$

De aci să se deducă: $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C>\frac{3}{2}$. Notațiile sînt cele obișnuite.

Gh. I. Bercea, student, Timișoara

1266. Într'un patrulater oarecare $ABCD$ se notează cu M, P, N, Q respectiv mijloacele laturilor $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Să se stabilească relația:

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=2\left(\overline{PQ}^2-\overline{MN}^2\right)$$

D. C. Panu, Galați

1267. Fie un cerc O și un punct A, pe el. Ducem dreapta AB care face cu diametrul trecînd prin A, unghiul α (B pe cerc). Tangenta comună cercului dat și cercului de centru A și rază AB taie diametrul în C. Tangenta comună face cu diametrul un unghi x

Să se găsească ecuația ce dă pe x în funcție de α.

Să se determine α astfel ca $x=\frac{\alpha}{2}$. In acest caz, să se demonstreze că NB este perpendiculară pe tangenta comună, N fiind punctul unde cercul de centru A taie diametrul între O și A.

David Haim, Bîrlad

1268. In triunghiul oarecare ABC se duc dreptele concurente AA', BB', CC' astfel încît AA' și BB' sînt respectiv mediană și bisectoare în triunghiul considerat.

Să se construiască grafic triunghiul ABC cunoscîndu-se triunghiul $A'B'C'$.

Matei I. Nazarie, elev, București

1269. Să se demonstreze că într-un patrulater $ABCD$ înscris într-un cerc, avem relația:

$$\frac{AD\cdot BO}{BC\cdot AO}=\frac{BC\cdot DO}{AD\cdot OC}=\frac{AO\cdot OC}{BO\cdot DO}=1$$

în care O este intersecția diagonalelor patrulaterului. Laturile opuse ale patrulaterului cu vârfurile în proiecțiile punctului O pe laturile AB, BC, CD, DA se taie pe diagonalele AC și BD.

* * *

1270. Prin arderea în aer a 100 $N\,m^3$ (normal m^3) de oxid de carbon, în condiții normale, se desvoltă o cantitate de gaze și căldură.

Care este cantitatea de aer necesară arderii, în N m^3 și căldura dezvoltată prin ardere, în kcal?

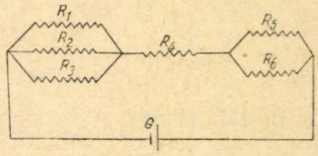
Care este cantitatea de gaze arse în N m^3 și compoziția ei în procente de volum, cunoscînd că greutățile atomice ale oxigenului, carbonului și azotului sînt respectiv 16, 12, 14.

Sălan Nicolae, student, Iași

1271. O particulă α parcurgînd spațiul a într-un cîmp electric de intensitate E, astfel ca forța ce acționează asupra ei este perpendiculară pe direcția mișcării, suferă deplasarea S_E. Știind că ar fi suferit aceeași deplasare în urma parcurgerii spațiului a în cîmpul magnetic de intensitate H și că: $E.(a.H)^{-2} = 2.10^{14}$ u.e.s./g. cm, să se determine deplasarea S_E.

C. Em. Racoveanu, student, București

1272. Șase fierbători electrici cu rezistența respectiv de: $R_1 = 40$ ohmi, $R_2 = 25$ ohmi, $R_3 = 72$ ohmi, $R_4 = 10$ ohmi, $R_5 = 60$ ohmi, $R_6 = 15$ ohmi și avînd fiecare randamentul de 94%, sînt legați ca în figură, formînd circuitul exterior al unui generator cu f.e.m. de 175 volți și rezistență interioară 0,32 ohmi. Care este fierbătorul ce poate transforma cel mai repede în vapori 1 kg ghiață la 0°C și care este timpul folosit pentru acest lucru?



Virgil Arsintescu, elev, Iași

EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 471. Dintr-un număr întreg se scade a treia parte și încă trei unități. Din ce a rămas se scade o treime și încă trei unități; iar după aceea se mai scade o treime din noul rest și încă trei unități și se constată că a rămas ca ultim rest numărul 7. Să se afle numărul N.

N. Ciomu

E. 472. Cît arată ceasornicul cînd are limbile orar și minutar perpendiculare ?

Petcu Mircea elev, Pitești

E. 473. Într-un triunghi ABC se duce mediana BB'. Notăm cu M mijlocul ei. Dreapta AM întîlnește latura BC în D. Să se demonstreze că: $AD = 4\ MD$.

Tudor Silviu elev, Giurgiu

E: 474. Numerele 140 și A au *c.m.m.d.c.* egal cu doi, iar B este *c.m.m.m.c.* al lor. Produsul AB este 47320. Se cere A și B.

Țița I. Nicolae student, București

*) Repartizarea pe clase: V (471, 474, 475, 479), VI (476), VII (472, 473, 477, 478, 480). Soluțiile se primesc pînă la 1 Octombrie 1954 și dela elevii altor clase.

E: 475. Un sportiv urcă pe un munte cu viteza de 3 km pe oră și coboară cu o viteză de 5 km pe oră. Care este viteza medie a acelui sportiv? Știind că pentru urcat și coborît a făcut în total 5 ore, 40 minute, să se afle drumul parcurs.

Schileru Dinu elev, București

E: 476. Să se arate că:

$$(a+b-c)\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)+(a-b+c)\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)+$$

$$+(-a+b+c)\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)+(a+b+c)\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-2\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)[a(c-a)-b(b-c)].$$

Gh. Bercea, student, Timișoara

E: 477. Se dă $y=\frac{ax-b}{bx-a}$. Să se arate că în acest caz avem și $x=\frac{ay-b}{by-a}$. Să se mai arate că $\frac{1+xy}{x+y}=\frac{a}{b}$ și $\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\frac{a+b}{a-b}$.

C. Ionescu-Țiu

E: 478. Se dă sistemul $x^2-y^2=a$ și $xy=b$. Să se afle $x-y$ în funcție de a și b.

Mihalcea C. Ștefan, student, București

E: 479. La centrul de colectare a grîului se transportă grîu dela depozitul Moara Grecilor la gara Vaslui. O echipă de 4 mașini, făcînd cîte 5 drumuri pe zi, au transportat 32 tone grîu. Cîte vagoane de grîu vor transporta 9 mașini, dacă acestea fac cîte 6 drumuri pe zi?

Stănescu Viorica, elevă, Vaslui

E: 480. Să se calculeze cantitatea de căldură ce degajă o mașină de călcat, alimentată de un curent continuu de 6 amperi în 25 minute, rezistența mașinii de călcat fiind 20 ohmi.

In cît timp va fierbe un litru de apă cu temperatura de 10°C pe un încălzitor pus la aceeași priză, dacă rezistența încălzitorului este 30 ohmi, iar 20% sunt pierderi?

Ionescu Ion, elev, Târgoviște

POȘTA REDACȚIEI

(RĂSPUNSURILE LA CORESPONDENȚA SOSITĂ PÎNĂ LA 1 MAI 1954)

Căpitan I. Gheorghiu, Arad. Am luat act de angajamentul pe care l-ați luat de a fi un harnic colaborator al acestei reviste.

Popescu G. Sergiu, Slatina. La rubrica rezolvitorilor de probleme sînt anunțați rezolvitorii dela care s-au primit soluții cu două luni înainte de apariția revistei, deoarece manuscrisul pentru cules este cerut de editură cu 45 zile înaintea apariției.

Dafina M. Constantin, Craiova. Culegerile de probleme căutate de dv. sînt de mult epuizate. Folosiți culegerile de probleme pentru învățămîntul mediu. Societatea de Matematică și Fizică se preocupă de reeditarea unora din aceste culegeri de probleme care vor apare în colecția « Biblioteca Societății Matematice și Fizice din R.P.R. ».

Florin Torjescu, Ploești, **Radu Petrovici,** Focșani și alți colaboratori. Problemele rezolvate sosite la redacție după patru luni dela publicarea enunțului lor, nu se mai iau în considerație.

Peteanu Vasile, Aiud și alți colaboratori. Problemele propuse la diverse etape ale « Olimpiadei » se vor publica treptat în numerele următoare.

Ilie Mateescu, profesor, Bîrlad. Lucrarea dv. a fost predată la « Gazeta Matematică și Fizică » seria A, care se ocupă cu metodica predării matematicii.

Radu Nicolae, Măneci-Ungureni. Intreaga colecție a Revistei Matematice și Fizice se găsește spre consultare la sediul redacției din București sau la filiala Societății din Ploești, orașul cel mai apropiat de dv.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 aprilie 1954 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme din Revista Matematică și Fizică:

Torjescu S. Florin (clasa XI, Ploești), *Cristea I. Ion* (clasa IX, Constanța), *Corban Adrian* (clasa X, Tecuci), *Cocoș Emanuel* (clasa XI, Constanța), *Coșa Dan* (clasa X, Orașul Stalin), *Pușcașu A. Alexandru* (clasa XI, Ploești), *Bunica M. Octavian* (clasa XI, Tg. Mureș), *Buzuloiu Vasile* (clasa X, Oradea), *Bătinețu M. Dumitru* (clasa X, Giurgiu), *Balaban Emil* (clasa X, Galați), *Donescu Șt. Dragomir* (clasa X, Focșani), *Dabija Sorin* (clasa X, Galați), *Popescu Al. Dan* (clasa XI, Reșița), *Ianuc I. Corneliu* (clasa X, Focșani), *Arsenovici Tiberiu* (clasa VIII, Timișoara), *Galer Dumitru* (clasa XI, Tecuci), *Stoian I. Gheorghe* (clasa IX, Tîrgoviște), *Pricâ Gh. Constantin* (clasa XI, Craiova), *Grabcev Boris* (clasa XI, Predeal), *Lupuțiu Ioan* (clasa IX, Ploești), *Vaisman Izu* (clasa X, Iași), *Mitu Șt. Velicu* (clasa XI, Giurgiu), *Chițimia Eustațiu* (clasa VII, Chitila, București), *Iordache Dan* (clasa IX, Constanța), *Mișcol Mircea* (clasa IX, Giurgiu), *Petrică I. Zamfira* (clasa X, Centrul șc. 2—10, 13 fete, București), *Cruceanu Viorica* (clasa X, l. f.1, București), *Kestenband Barbu* (clasa X, L. b. 6, București), *Zidăroiu Corneliu* (clasa XI, L. b. 10 « Aurel Vlaicu ». București), *Bocu Mircea* (clasa X, Oradea), *Stănuleț Mihai* (clasa IX, Tr. Severin), *Geambașu Lică* (clasa X, Iași), *Brebente P. Corneliu* (clasa IX, Tîrgoviște), *Oprea A. Aurelian* (clasa IX, Tîrgoviște), *Galațki Gheorghe* (clasa IX, Tîrgoviște), *Oereanu Victoria* (clasa VII, Sf. Gheorghe), *Epuraș Mircea* (clasa X, Predeal), *Greculescu V. Ion* (clasa XI, Predeal), *Huștiuc Nicolae* (clasa XI, Predeal), *Nicolce Șt. Alexandru* (clasa X, L. b. 1, București), *Zigulescu D. Marin* (clasa XI, R. Vîlcea), *Alexa Ion* (clasa XI, Predeal), *Dufu Gheorghe* (clasa XI, Predeal), *Brebu I. Gheorghe* (clasa IX, Tîrgoviște), *Todică C. Petre* (anul IV, Energia electrică, Iași), *Andreescu Radu* (clasa X, L 10 « Aurel Vlaicu », București), *Savin Dan* (anul III, Cîmpulung-Muscel), *Cetățeanu Cecilia* (clasa X, L. f. 1, Craiova), *Schiopu Eugenia* (clasa X, L. f. 1, Craiova), *Pandrea Nicolae* (clasa X, Focșani), *Petcu I. Dumitru* (clasa XI, Giurgiu), *Berechet M. Oprea* (clasa IX, L. b. 5, București), *Vlădescu Gheorghe* (clasa XI L. b. 10 « Aurel Vlaicu », București), *Vasilescu Aurel* (clasa X, Călărași), *Stoicescu T. Dumitru* (clasa XI, Buzău), *Tănase Dumitru* (anul III, Măsurători terestre, București), *Nicolescu Dan* (clasa VIII, Călărași), *Bumbac Paul* (clasa XI, Constanța), *Nicolescu A. Miron* (clasa VI, L. b. 6, București), *Arsinlescu I. Virgil*

(clasa X, Iaşi), *Rus A. Ioan* (clasa IX, Oradea), *Nan Stelian* (clasa XI, Oraşul Stalin), *Iuga Stavăr* (clasa X, Oraşul Stalin, *Dogaru V. Mihai* (clasa X, Ploeşti), *Laslo Ion* (clasa X, Tg. Mureş), *Stepan Ionel* (anul II hidrotehnică, Constanţa), *Dumitriu Constantin* (clasa X, Foşcani), *Vidan Marius* (clasa X, Giurgiu), *Schauerman Nicolae* (Agnita), *Gavril Gh.* (clasa X, P. Neamţ, *Minuţ M. Petru* (clasa X, P. Neamţ), *Ienciu Doru* (clasa XI, Reşiţa), *Răduţ Nicolae* (clasa XI, Predeal), *Velicescu Mircea* (clasa V, Tg. Jiu), *Junger Robert* (clasa X, Oradea), *Drăghici T. Ioan* (clasa XI, Oraşul Stalin), *Apetrei Gheorghe* (clasa VII, Viişoara), *Rusu Constantin* (clasa VII, Viişoara), *Radu Stroe* (clasa X, Ploeşti), *Drăgan St. Marin* (clasa X, Giurgiu), *Vasile T. Alexandru* (clasa X, Giurgiu), *Pircălabu I. Marin* (clasa XI, Giurgiu), *Nistreanu N. Valeriu* (clasa VIII, L. b. 10 « Aurel Vlaicu », Bucureşti), *Sandu Ion* (clasa X, L. b. 10 « Aurel Vlaicu », Bucureşti), *Boloca Ion* (anul II, Şc. construcţii, Cîmpulung Moldovenesc), *Andrei M. Ilie* (clasa XI, Caracal), *Teodorescu Mihai* (clasa X, L. b. 10 « Aurel Vlaicu, Bucureşti), *Stoleru Gheorghe* (clasa X, L. b. 7 « I. L. Caragiale », Bucureşti), *Palaghia Gheorghe* (clasa X, Botoşani).

* * *

Pînă la 1 aprilie 1954, s-au mai primit cel puţin cinci soluţii bune la problemele din ultimile cinci numere ale „Revistei Matematice şi Fizice dela rezolvitorii la care sînt trecute numerele problemelor rezolvate după numele fiecăruia, probleme propuse (P). articole (A) şi note (N), după cum urmează:

AIUD. Clasa IX-a. Faur Ioan (1084, 85, 91, 93, 118, 124, 126, 127, 128); Vrăjitoru Dan (979, 984, 992, 993, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 12, 29, 33, 37, 38, 43, P). Clasa XI-a. Cristea V. Horia (904, 906, 908, 911, 1033, 37, 40, 53, 55, 60, 64, 66, 67, 68, 70, 76).

ALBA-IULIA. Clasa X-a. Mîrza Pavel (1068, 69, 78, 79, 81, 107, 127, E: 358, 365, 382); clasa XI-a. Torsan D. Ilie (950, 951, 972, 974, 976, 978, 991, 993, 998, 999, 1029, 38, 42, 62, 84, 87, 88, E: 315, 317, 318, 319, 322, 323, 324, 328, 329, 335, 338, 339, 341, 342, 344, 347, 348, 349, 350, 356, 358, 364, 365, 370, 371, 373, 378, 380, 381, 383).

ADJUD (*Bîrlad*). *Şcoala medie mixtă.* Clasa VIII-a. Stan Pompiliu (1038, 40, E: 337 338, 339, 348, 349, 370).

AGNITA (Comuna Cincul). Schauermann Niculae (1068, E: 305, 306, 307, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 316, 318, 324, 326, 327, 328, 329, 330, 332, 334, 335, 337, 339, 340, 341, 345, 346, 351, 353, 354, 355, 357, 359, 361, 368).

ALEXANDRIA. Liceul mixt, clasa IX-a. Ceampuru I. Stelian (E: 306, 309, 314, 332, 364, 365); clasa X-a. Folescu Gheorghe (E: 329, 335, 336, 338. 339, 347, 348, 349, 350, 353, 354, 355, 357, 358, 362), Georgescu I. Emil (915, 974, 986, 999, 1068, 69, 78, 81, 84, 88, E: 306, 312, 322, 324, 327, 335, 336, 349, 350, 361, 362, 370, 370, 391), Teodorescu Marian (E: 306, 317, 324, 335, 357, 361, 362, 363, 364, 365, 370, 382, 392, 398); clasa XI-a. Niţu Gh.. Petre (944, 971, 972, 973, 986, 988, 992, 999, 1000, 1, 7, 19, 22, 33, 38, 68, 69, 84, 98, E: 300, 316, 317, 319, 320, 322, 323, 324, 328, 331, 335, 336, 337, 338, 339, 353, 354, 355, 357, 358, 359, 362, 363, 364, 365, 369, 370, 376, 382, 386, 387, 389, 398, 400).

ARAD. Şcoala Pedagogică, anul IV. Vlagiu Ioan (904, 1000, 14, 18, 19, 20, 29, 33, 38, 42, 48, 84, 85, 86, 121, 148, 159, E: 336, 346, 347, 348, 361, 370, 398, 404, 405, 408); *Şcoala medie,* clasa XI-a. Vlaga Marius (982, 986, 988, 992, 993, 994, 996, 997, 999, 1000, 1, 2, 3, 14, 20, 33, 38, 40, 43, E: 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 336, 338)

BACĂU. Şcoala elementară Leca. Nediţă I. Neculai (E: 401, 402, 404, 408). *Şcoala medie tehnică de construcţii,* anul III. Stanciu Pavel (942, 954, 959, 973, 974, 993, 1002, 25, 106, 124, 126, 127, 128). *Şcoala medie,* clasa V-a. Postolache Dan (E: 387, 389, 392, 396, 400); clasa IX-a. Radu Creangă (E: 305, 306, 311, 312, 370), Simion I. Emil (986, 988, 993, 99, 1002, 84, E: 329, 335, 336, 362), Habot Beno (1068, 69, 78, 84, E: 358, 361), Iorga Sergiu (999, 1038, 98, 118, 128, 152, 159, E: 328, 335, 337, 344, 346, 347, 349, 353, 354, 361, 363,

364, 365, P), Merticaru Vasile (986, 988, 999, 1000, 1, 2, 14, 38, 62, 68), Popa Lucian (999, 1025, 159, E: 358, 362, 402), Simion I. Emil (1014, 33, 38, 40, 62, 79, 80, E: 304, 305, 306), Tofan V. Vasilie (972, 973, 974, 1033, 84, 98), Weisselberg Marcel (950, 972, 1033, 38, 43, 68, 69, 78, 84, 94, E: 324, 353, 354, 357, 358, 361, 362, 370, 373, 378).

BÎRLAD. Clasa VIII-a. Negri Vasile (E: 358, 402, 404, 405); clasa X-Galan Niculae (1121, 126, 127, 152); clasa XI-a. Copciac Emil (1152, 159, E: 402, 409).

BEIUȘ. Ușvat Cornel (950, 956, 1019, 118, 126, E: 317, 318, 324, 384, 398).

BOTOȘANI. Clasa IX-a. Cosinschi Florin (1062, 65, 93, 118, 152, E: 401), Munteanu Adrian (907, 909, 911, 913, 915, 917, 1084, 106, 127, 128, E: 365, 375), Scultelnicu Radu (1084, 93, E: 369, 370, 371, 372, 373, 379, 382), Vartolomei Mihai (1065, 84, 92 E: 387, 389, 397, 400); clasa X-a. Avram Lucia (1038, 118, 121, 124, 138, 143,), Balan Sergiu (1098, 106, E: 338, 347, 348, 364, 365, 370, 382, 383, 387, 389), Bojai Ioan (E: 309, 354, 358, 362, 370), Oprișanu Petru (E: 305, 310, 337, 339, 346, 352, 391, 398) Sadici Vasile (1081, 82, E: 339, 354, 358, 391), Casianov Eugenia (1118, 126, 127, 128, E: 353, 355), *Palaghia Gheorghe* (1033, 62, 65, 68, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 98, 124, 126, 127, 128, 129, E: 339, 340, 342, 344, 349, 351, 352, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 361, 362, 370, 373, 380, 384, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 395, 396, 397, 398, 399, 400); clasa XI-a. Butnaru Strul (909, 917, 923, 925, 927), 939, 941, 981, E: 312, 314, 339, 354, 358, 391, 398), Maxim C. Laurențiu (1042, E: 358, 364, 391, 398), Mercleș Ioan (1098, E: 338, 347, 365, 370, 382, 387, 389), Etty Wechsler (1068, 78, 80, 84, 87, 126, E: 353, 358, 361, 381); *Școala Medie Tehnică de Drumuri și Poduri*, anul IV. Bălteanu Sora (1118, E: 384, 389, 386, 399), Ciornanu Maria (1105, E: 375, 378, 382, 383, 391, 398); *Școala elementară din Bucecea*, clasa V-a. Ivan Doina (E: 379, 384, 392, 398, 400); clasa VII-a. Ionescu Cristian (E: 384, 387, 392, 397, 398, 400); Ivan Dumitru (E: 370, 373, 375, 379, 382, 398).

BRAILA. Clasa VII-a. Terente George (344, 349, 370, 384, 389, 391, 392, 397, 398, 400).

BUCUREȘTI. Liceul 1 băieți. Clasa V-a. Voinaru Luchian (E: 354, 357, 358, 370, 382); clasa VII-a Banciu Mircea (E: 370, 382, 389, 398, 405, 407); clasa VIII-a Schileru I. Dinu (1093, 118, 121, E: 321, 324, 327, 349, 350, 353, 354, 369, 384, 387, 388, 389, 391, 392, 397, 398, 396); clasa IX-a. Florescu Ilariu (118, 127, 128, E: 384, 387, 389, 391, 392, 395, 396, 397, 398, 399, 400); clasa X-a. Dumitru Dan (1033, 38, 55, 69, 79, 81, 84, 98, 121, 152 E: 341, 362, 365, 369, 370, 380, 381), Feinstein Ilie (946, 950, 959, 962, 965, 1007, 38, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 89, 98, 125, 126), Georgescu Dorina (1040, 55, 68, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 126), Georgescu George (1058, 65, 69, 78,, 81, 82, 84, 98, E: 355, 356, 358, 360, 361, 362, 370, 373, 380), *Nicolae St. Alexandru* (943, 945, 946, 950, 952 954, 955, 957, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 966, 978, 980, 984, 991, 992, 993, 994, 997, 998, 1006, 7, 9, 12, 13, 14, 24, 25, 26, P), Marinescu Cătălin (1035, 40, 43, 98, 124, 125, 126, 127, 128, 148), Popîrda Radu (1069, 87, 88, 112, 118, 126, E: 370, 391, 396, 398); clasa XI-a. Istinie Crăciunel (1118, 121, 125, 127, 128, 130, 148, 152, 157, 159, E: 393, 402, 404, 407, P).

Liceul 1 fete, clasa V-a. A. Sălăgeanu Simona (E: 332, 335, 337, 351, 352, 355) clasa X-a. Filimon Rodica (1029, 113, 114, 118, 127, 128, 129, 148, 152 159), *Cruceanu Viorica* (1061, 70, 85, 91, 94, 95, 98, 102, 106, 110, 113, 124-129, 137, 138, 149, 152, 153, 159, 165, 171, 174, 183, 186, 188, P).

Centrul școlar 2—10—13 fete, clasa IX-a. Ellenberg Melix (904, 912, 916, 938, 950, 971, 972, 973, 1025, 33, 38, 68, 69, 84, 113, E: 314, 327, 335, 356, 361, 362, 373 391, 397); clasa X-a. *Petrică I. Zamfira* (959, 961, 962, 965, 971, 973, 974, 977, 978, 979, 980, 985, 986, 988, 992, 997, 999, 1000, 1, 26, 29, 33, 38, 40, 42, 43, 44, 63, 65, 68, 69, 78, 81), *Roceric Maria* (980, 984, 985, 988, 993, 994, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 23, E: 335, 338, 340, 343, 349,), Wechsler Henriette (984, 1002, 7, E: 339, 341); clasa XI-a. Nistor Milenea (968, 1014, 84, 85, 87, 98, 121, 127, 128, 129).

Liceul 2 băieți, clasa VIII-a. Duduica Radu (1085, 88, 98, 109, E: 378, 97, 402, 404, 406, 407, 408); clasa IX-a. Răsuceanu I. Miron (1079, 118, 127, 128, E: 363, 364, 391), clasa XI-a. Moscovici Paul (977, 984, 988, 997, 998, 1007, 25, 29, 30, 33, 36, 40, 42, 45, 68, 70).

Liceul 3 băieți, clasa IX-a. Tomescu Constantin (946, 952, 965, 966, 988, 1078, 89, E: 341, 355, 358, 369, 370, 372, 373, 378, 382, P).

Liceul 4 băieți, clasa VII-a. Indescifrabil (1159, E: 325, 328, 331, 337, 345, 346, 347, 354, 358, 370, 382, 385, 387, 389, 391, 392, 397, 400, 405); clasa XI-a. Anastasiu Dan (1033, 38, 42, 43, 65, 68, 69, 93, 98, 118, 121, 126, 128).

Centrul școlar 5—7—8, fete clasa VIII-a. Nicolau Corina (946, 948, 950, 955, 1029, 30, 36, 38, 40, 42, 53, 55, 58, 65, 68, 93, 95, 96, 98, 99); clasa X-a. Constantinescu Ioana (1084, 118, 121, 124, 127, 128, 152,

Liceul 5 băieți, clasa IX-a. Bunea Dan (1118, 121, 124, 127, 128), *Berechet M. Oprea* (902, 912, 927, 928, 930, 941, 942, 950, 952, 959, 959, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 982, 988, 992, 993, 1002, 3, 4, 8, 12, 20, 25, E: 321, 324, 329, 336, 349, 353, 354, 356, 362, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 378, 381, 382, 387, 389, 391, 392, 395, 400), Stanciu Alexandru (992, 999, 1000. 25, 78, 84, E: 328, 35, 36, 53, 54, 56, 57, 58, 62, 65, 69, 70, 71, 72, 73, 79, 80, 82, 91, 400); clasa Xi-a. Manea Marin (1127, 128, 149, 152, 159, E: 378, 384, 389, 391 397, 402, 407).

Liceul 6 fete, clasa VIII-a. Nicolau Ileana (1073, 100, 102, 127, 140, 148, E: 354, 355, 356, 357, 358, 360, 362, 365, 369, 377, 380, 381, 390, 393, 394, 404, 405, 410, 412,).

Liceul 6 băieți, clasa VI-a. *Niculescu A. Miron* (E: 327, 341, 344, 357, 358, 369, 370, 371, 374, 379, 382, 385, 389, 398, 400, 401, 402, 405, 408, 409); clasa VIII-a. Nicolau Florin (1084, 118, E:, 305, 306, 309, 353, 370, 385, 389, 391, 396, 397, 398); clasa IX-a. *Popovici I. Radu* (906, 944, 946, 992, 1029, 37, 40, 55, 61, 62, 79, 87, 90, 91, 102, 126, 130, 159, E: 366, 367, 372, 374, 384, 386, 387, 389, 390, 392, 396, 397, 398, 399, 400, 402, 404, 406, 408, 409, P), Luzi Floarea (988, 1025, 58, 61, E: 310 330, 332, 373, 378, 379, 380, 381, 382, 386, 387, 389, 391, 392, P); clasa X-a, *Kestenband Barbu* (900, 943, 960, 1007, 18, 22, 26, 29, 30, 37, 40, 54, 58, 61, 78, 83, 95, 98, 101, 102, 106, 111, 117, 124, 126, 127, 129, 130, 140, 146, 148, 152, 157).

Liceul 7 băieți « I. L. Caragiale » clasa X-a. Mazilu T. Constantin (977, 978, 979, 984, 985, 986, 987, 988, 990, 999, 1005, E:, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336), *Stoleru George* (906, 908, 919, 946, 948, 982, 996, 1007, 23, 27, 42, 63, 68, 79, 114, 125, 126, 137, E: 315, 323, 324, 326, 328, 329, 331, 337, 347, 348, 362, 363, 364, 365, 383, 390).

Liceul 8 băieți, clasa VII-a. Gavrilă Horia (E: 369, 370, 372, 373, 374, 376, 380).

Liceul 9 băieți, clasa IX-a. Răzuș Alexandru (950, 951, 952, 958, 959, 961, 962, 963, 964, 965, 967, 971, 972, 973, 974 975, 976,); clasa XI-a. Chioveanu Emil (944, 950, 951, 952, 954, 955, 957, 960, 962, 963, 964, 966, 967, 968, 970, 971, 972, 974, 976).

Liceul 10 băieți « Aurel Vlaicu », clasa VIII-a. *Nistreanu N. Valeriu* (916, 937, 938, 976, 987, 988, 999, 1001, 3, 68, E: 301, 310, 311, 331, 341, 344, 346, 347, 351, 353, 354, 357, 358, 366, 370, 371, 375, 377, 382, 387, 3, (392, 395, 396, 398, 399, 400); clasa IX-a. Bonghez Valeriu (1038, E: 324, 339, 341, 342, 344, 346, 362, 3670), Giorgian Dan (1069, 84, E: 342, 358, 362, 369, 370, 371, 372, 378,), Dumitrescu Ovidiu (1087, 126, E: 373, 381, 391, 392, 394). Petre T. Petre (959, 1028, 38, 39, 56, 100, 127, 121, E: 318, 321, 337, 339, 342, 357, 387), *Sandu Gh. Ioan* (950, 962, 972, 973, 976, 999, 1014, 22, 33, 39, 65, 68, 78, 79, 81, E: 308, 316, 319, 321, 322, 323, 326, 328, 331, 333, 336, 332, 340, 342, 346, 349, 354, 355, 356, 380, 370, 373, 377, 37), 379, 381, 389, 396, 397), Stănășilă Octavian (911, 915, 916, 950i 979, 1025, 40, 68, E: 318, 321, 337, 342, 357, 356, 373); clasa X-a. *Andreescu Gh. Radu* (979, 983, 989, 990, 1005, 15, 50, 52, 76, 118, 119, 121, 122, 123, 124,

125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 137, 139, P), Cîmpu Eugen (991, 996 977, 995, 992, 1042, 52, 63, 65, 70, 80, 82, 96, 99, 113, 152), Palade Doru (1055, 62, 68, 78, 80, 98, 106, 127, 141, 148, 149, 151, 152), Roşca I. Ion (946, 968, 971, 972, 973, 974, 1000, 18, 25, 42, 68, 79, 81, 84, 106, 118, 121, P), *Teodorescu Mihai* (968, 971, 971, 973, 974, 975, 986, 987, 988, 996, 999, 1000, 1, 4, 33, 38, 39, 43, 58,, 68, 69, 78, 79, 91,84, 87, 88, 97, 98); casa XI-a. Dumitriu Ion (1041, 139, E: 321, 373, 378). Popovici Ştefan (946, 953, 970, 974, 998, 1000), Radu A. Dumitru (1041, 121, 139, E: 373, 378), Stoica Mişu (1001, 76, 139, 152, 162, E: 398), *Vlădescu Gheorghe* (968, 988, 989, 992, 993, 994, 996, 1000, 1, 2, 28, 33, 39, 41, 68, 69, 76, 80, 82, 90, 106, 110, 121, 124, 126, 139, 148, 149, 151, 152, 153, 162, P). Zidăroiu Gh. Corneliu (965, 968, 971, 980, 988, 989, 992,, 994, 996, 997, 998, 999, 1001, 2, 9, 22, 26, 39, 41, 44, 68, 76, 80, 82, 93, 85, 87, 89, 90, 106, 110, 121, 126, 139, 148, 151, 152, 153, 162, P).

Şcoala elementară 43 fete, clasa VII-a. Mărăndici Elena (E: 384, 386, 387, 388, 389, 392, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400).

Şcoala nr. 33 băieţi. Chirilă Mircea (E: 337, 344, 346, 370, 371, 373).

Şcoala nr. 16 băieţi. Dumitrescu Doru (E: 384, 387, 389, 391, 392, 394, 395, 397, 398).

Şcoala nr. 19 fete, clasa VI-a. Stănescu Mioara (1159, E: 325, 345, 370, 375, 382, 385, 389, 391, 392, 400).

Şcoala Hidrometeorologică, anul I. Ganea V. Maria (370, 379, 382, 385, 387, 389, 398, 399).

Şcoala medie tehnică c.f.r., anul I. Staicu Vasile (1165, E: 371, 375, 378, 382, 383, 391, 397, 398).

Şcoala medie electrotehnică. Bănică Paul (E: 315, 318, 320, 321, 322, 323, 324, 328, 329, 335).

Şcoala medie tehnică de mecanică nr. 2, anul I. Butnaru Iacob (E: 327, 335, 346, 361, 370, 376, 389, 392, 397), Dobrogeanu Constantin (E: 346, 354, 358, 370, 372, 375, 382, 389, 392, 397), Neguţ Nicolae (987, 989, 993, 994, 996, 997, 1000, 2, 24, 25, 37, 39, 42, 78, 79, 81, 102, 106, 107, 109, 113, 138, 145, E: 351, 394, 399, P), Nicolescu Ionel (E: 327, 344, 346, 361, 370, 372, 375, 382), Văduva Ion (E: 327, 339, 341, 354, 358, 361, 370, 375, 382, 392).

Şcoala medie de măsurători terestre, anul II. Matei Nicolae (1152, 154, 167, E: 402, 407, 418); anul III. Bălu Vasile (E: 305, 306, 308, 312, 314, 318, 333, 336, 341, 374, 379, 386, 387, 388, 389, 391, 395, 398, 346, 950, 971, 972, 973, 976, 1019, 37, 78), *Tănase Dumitru* (902, 921, 933, 945, 957, 981, 982, 987, 995, 997, 1018, 24, 29, 53, 56, 102, 106, 107, 118, 121, 124, 125, 126, 127, 128, 139, E: 301, 315, 317, 322, 325, 334, 338, 345, 351, 364, 384, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400).

Studenţi — Bucureşti. Ghinescu Nicolae (E: 301, 304, 305, 306, 370, 308, 309, 310, 312, 313, 314, 329, 335, 336, 387, 389, 391, 392, 395, 396, 397); Arhitectură: Florea Paula (901, 904, 905, 908, 909, 910, 913, 923).

BUZĂU. Şcoala medie tehnică mecanică, anul III. Noineagu Alexandru (1041, 107, E: 351, 352, 353, 358), Tudor T. Gheorghe (1065, 118, E: 329, 335, 353, 366, 367, 387, 397, 398). *Şcoala medie de 10 ani*, clasa IX-a. Cristea Gh. Pompiliu (1098, 159, E: 358, 362, 370, 389), Dragoş Aura (1038, 40, 58, 68, 69, 82, 98); clasa X-a. Popescu N. Ion (994, 1000, 22, 25, 38, 40, 55, 65, 81, 84, 88, 93, 98, 124, 126, E: 327, 329, 335, 356, 369, 370, 371, 373, 378, 380, 381, 382); clasa XI-a. Bică D. Nicolae (1097, 93, 113, 124, 125, 126, 127, 128), Jarcău Aurel (1084, 93, 97, 113, 124, 125, 127, 128). *Stoicescu T. Dumitru* (952, 959, 962, 994, 999, 1000, 1, 2, 12, 18, 20, 26, 38, 39, 43, 45, 54, 55, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 68, 69, 70, 72, 78, 79, 80, 81, 82, P).

CĂLĂRAȘI. Clasa VIII-a. Manolescu Ilie (986, 1002, E: 337, 338, 34, 363, 365, 375, 380, 381, 382). *Niculescu Dan* (952, 955, 962, 986, 988, 992, 1000, 5, 22, 68, 69, 78, 84, 98, 127, 128, E: 315, 316, 317, 320, 321, 322, 327, 329, 330, 332, 336, 339, 341, 343, 344, 346, 349, 350, 353, 354, 361, 362, 365, 380, 381, 387, 391, 392, 394, 395, 398, 400, 409, P), Vasilescu Vasile (999, E: 337, 370, 382, 389, 390, 398), Simionescu I. Dumitru (986, 999, E: 301, 318, 329, 335, 337, 342, 344, 353, 365, 371, 375, 379, 380, 382, 391); clasa IX-a. Ionescu Șerban (1033, 43, 69, 96, 121, 127, 144, E: 349, 350, 355, 358, 359, 360, 362, 370, 375, 378), Rădulescu Vasile (1084, 137, 138, E: 358, 362, 364, 365, 370, 375, 381, 382, 383, 390, 391, 397, 398), *Vasilescu Aurel* (864, 897, 937, 941, 942, 946, 972, 973, 974, 975, 993, 1007, 33, 38, 40, 42, 43, 62, 65, 68, 78, 79, 84, 85, 87, 88, 94, 95, 96, 98, 106, 113, 121, 124, 126, 127, 128, 129,); clasa XI-a. Banu Alexandru (1029, 43, 45, 46, 63, 102, 106), Pîrlea Valerian (1065, 68, 69, 76, 78, 79, 84, 87, 88, 96, 98, 102, 106, 127, 128, E: 353, 362, 363, 364, 365, 368, 387, 391), Vasilescu Constantin (937, 941, 942, 975, E: 305, 306, 320,). *Școala medie tehnică de mecanizarea agriculturii* anul I, Hürliman Adalbert (1025, 1042, 68, E: 335, 358, 363); anul II. Sanda Marchidan (1025, 42, 68, E: 356, 358, 365, 391), Anonim (1001, 25, 42, 68, 88, 102, E: 352, 380, 383, 387, 389, 391, 392, 396, 377).

CÎMPINA. Școala medie tehnică de petrol, anul III. Căciulă Ion (950, 1025, 52, 68, 73, 102, 109, P), Doboș Maria (993, 1013, 25, 30, 47, 79, 84, 85, 87, 128).

CÎMPULUNG-MOLDOVENESC. Școala medie de construcții, anul II. *Boloca Ion* (980, 986, 987, 988, 991, 992, 994, 1000, 8, 20, 22, 23, 24, 25, 33, 38, 40, 41, 42, 43, 53, 58, 66, 68, 69, 82, 121, 124, 126, 127, 128, E: 127, 329, 330, 335, 336, 337, 338, 344, 349, 350).

CÎMPULUNG-MUSCEL. Clasa IX-a. Popescu Doina (1053, 69, 76, E: 358, 364, 365, 370); clasa X-a. Danicovici Gabriela (871, 873, 1084, E: 338, 356, 358, 362, 363, 364, 365, 370, 371, 375); clasa XI-a. Popescu Sanda (992, 1068, 76, 79, 80, 84, 85, 87, 88), Absovent Zăvoianu Ioan (1062, 68, 69, 78, 80, 89, 93, 95, 98, 99, E: 362); *Școala medie tehnică de cărbuni*, anul III. Opriș Ioan (1012, 14, 18, 33, 38, 69, 121, 128), *Savin Dan* (941, 943, 945, 948, 949, 950, 952—959, 968, 998, 1003, 22, 23, 24, 25, 30, 37, 40, 41, 42, 46, 52, 69, 79, 84, 87, 88, 102, 106, 109, 113, 121, 125, 126, 127, 137, 139).

CARACAL. Clasa X-a. Ciucă Gh. Constantin (971, 972, 973, 974, 992, 999, 1000, 4, 78, 79, 81, 137, P); clasa XI-a. *Andrei M. Ilie* (977, 986, 988, 998, 999, 1000, 1, 2, 7, 18, 25, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 65, 68, 69, 76, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 102, 104, 106, 113, 127, 128, P).

CARANSEBEȘ. Serdeșnina Aurel (1122, E: 306, 309, 311, 327, 329, 335, 370, 371, 373, 378, 380, 387).

CHITILA. (Reg. București). Clasa VI-a Dinu P. Coralia (988,999, 1003, E: 325, 330, 332, 335); clasa VII-a, Chiru Const. (E: 315, 316, 317, 318, 320, 322, 323, 324, 325, 327, 328, 330, 331, 332, 333, 913, 914, 944, 971), Ciuntu Florin (944, 971, E 315, 316, 317, 318, 320, 322, 323, *Chițimia M. Eustațiu* (904, 905, 906, 913, 915, 916, 944, 966, 971, 972, 973, 974, 976, 977, 988, 989, E: 315, 316, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336).

CLUJ. *Liceul de fete*, clasa VI-a. Mănăștureanu Florica (E. 389, 392, 396, 398, 400); clasa VIII-a. Costin Lucia (938, 999, 1000, 120, 127, E: 340,377, 378); *Școala pedagogică de fete*, anul IV. Moldovean Maria (985, 988, 989, 1002, 3, 50, 68, 78, 84). *Școală specială de doi ani*, anul I. Căpraru Maria (E: 315, 316, 318, 328, 373, 384, 389, 394, 395, 398), Coruța Aurel (E: 315, 316, 318, 328, 349, 384, 389, 394, 395, 396, 398), Cheleman Mihai (E: 316, 318, 328, 349, 350, 351, 384, 388, 394, 398, 400), Apolțan Ioan (E: 315, 316, 318, 328, 349, 384, 389, 394, 395, 398), Marțian Gavril (E: 316, 318, 349, 350, 351), Miclăuș Tiberiu (949, E: 315, 318, 349, 350), Negoiță Nicolae (E: 315, 316 318, 328, 376), Păun

Constantin (E: 316, 318, 349, 350, 351), Pistol Nicolae (E: 316, 318, 349, 350, 351), Pop Nicolae (E: 315, 316, 318, 328, 376, 384, 394, 395, 398), Pop Viorel (E: 315, 316, 318, 328, 349, 384, 394, 395, 398), Rusu Alexadru (E: 315, 316, 318, 328, 329, 349, 384, 387, 388, 391, 394), Suciu Emil (E: 315, 318, 328, 349, 351, 384, 387, 388, 391, 394, 395, 396 398), Sîngereanu Gheorghe (E: 316, 328, 349, 350, 351), Szentanay Arpad (959, 1121, 127, 128, E: 315, 316, 318, 329 349, 390), Toma Traian (315, 316, 318, 328, 349, 384, 389, 394, 395, 398), Tucu Petre (315, 316, 318, 328, 346, 349, 351).

CONSTANȚA. Clasa IX-a. *Cristea I. Ion* (944, 950, 952, 953, 954, 959, 960, 978, 980, 991, 992, 996, 1022, 25, 26, 30, 36, 38, 40, 42, 43, 48, 52, 54, 55, 57 59,, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 76, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 111, 113, 118, 121—129, 132, 133, 140, 145, 148, 151, 152, 154, 155, 159, 161, 165, 166, 171, 174, 175, 178, 179, 183, 184, 186, 188, 189, 190, P), *Iordache Dan* (986, 996, 1002, 3, 4, 17, 18, 58, 62, 65, 68, 69, 70, 72, 78, 79, 80, 81, 84, 87, 88, 93, 96, 97, 98, 100, 118, 127, 128, 129, 148, P), Donici Alexandru (1065, 68, 78, 79, 80, 81, 84, 98, 127, E: 353, 357, 360, 362, 370); clasa X-a. Gheorghiu Gabriel (950, 1025, 28 ,65, 68, 127, E: 318 324, 336, 341, 358) Mitescu Constantin (1033, 62, 68, 69, 78, 81, E: 353, 358, 362, 364, 365, 368); clasa XI-a. Baldovin I. Traian (E: 309, 344, 358, 375, 377, 384, 391) *Bumbac Paul* (945, 946, 949, 950, 952, 953, 954, 957, 959, 964, 968, 984, 985, 986, 987, 988, 992, 993, 994, 997, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 4, 7, 9, 18, 24, 25), Ceacîru Constantin (946, 950, 954, 955, 959, 963, 964, 965, 969, 972, 973, 974, 975, 976, P), *Cocoș Emanuel* (977, 978, 979, 980, 981, 982, 984, 986, 987, 988, 992, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 29, 30, 33, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 43. 44, 45, 48, 53, 54, 55, 57, 58, 60, Kümbetlian Gheorghe (1054, 55, 82, 95, 118, 121, 124, 126, 127, 128, 140, 149, 152, 154, 159, E: 391, 397, 398, 407, 411), Sachelarie E. Nicolae (1085, 86, 90, 97, 106, 124, 126, 127, 128, E: 372, 373, 377, 378, 389), Pană Eugen (904, 905, 906, 908, 910, 911, 923); *Școala hidrotehnică*, anul II. *Ștefan Ionel* (905,928, 946, 954, 955, 957, 960, 971, 973, 984, E: 315, 317, 320, 321, 322, 323, 325, 326, 327, 329, 335, 339, 341, 344, 345, 346, 347, 348, 351, 354, 358, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 389, 391, 392), Gîrniță Virgil (971, 973, E: 329, 335, 346, 358, 381, 389, 391, 392), Haiti Cîrjali (1037, 102, E: 337, 345, 346, 349, 350, 353, 354, 357, 358, 361, 370, 383, 401, 402), Tirițeanu Emilia (980, 984, 993, 999, 1002, 126, 127, E: 342, 344, 346, 347, 349, 350, 353, 362, 364, 365, 368, 387, 390, 391); anul III. Lambă Stelian (952, 956, 962, 972, 988, 99, 1000, 5, 58, 62, 81, 88, 97, 104, 105, P), Ică Aurel (954, 1069, 124, E: 311, 313, 335, 385, 387, 388, 389, 391).

CORABIA. Clasa IX-a. Popa Gh. Stancu (906, 921, 932, 1025, 27, 29, 33, 37, 40, 44, 55, 62, 68, 69, 93, 96, 97, 101, 127, E: 308, 314, 341, 347, 348, 349, 350, 373, 378, 390).

CRAIOVA. *Liceul 1 fete*. Clasa X-a. *Cetățeanu Cecilia* (944, 950, 971, 972, 973, 974, 975, 978, 986, 988, 992, 993, 994, 1000, 7, 9, 18, 20, 22, 25, 62, 68, 69, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 98, 102, 104, 110, P), *Schiopu Eugenia* (944, 950, 962, 971, 975, 976, 977, 978, 986, 987. 988, 989, 992, 993, 994, 997, 1000, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 18, 22, 25, 65, 68, 69, 78, 79, 81, 82, 94, 128, P); *Liceul 2 fete*, clasa X-a. Enăchescu Georgeta (946, 959, 967, 974, 1012, 53, 61, 80, 82,84, 85, 87, 89, 93, 98, 100, 113, 126, 127, 128, 129, E: 336, 390, 396), Păun Elena (938, 950, 972, 974, 999, 1000 20, 68, 79, 80, E: 329, 339, 344, 381, 382); *Liceul 1 băieți*, clasa VIII-a. Sandu Gheorghe (904, 912, 937, 999, 1070, 78, 93, 98, E: 303, 305, 306, 312, 318, 321, 324, 335, 341, 349, 350, 362, 371, 372, 373, 378, 381, 389, 391, 392, 396, 397, 398); clasa IX-a, Trifan Vasile (1014, 25, 29, 55, 69, 70, 81, 140, 159); clasa X-a. Ion N. Matei (999, 1040, 118, 127, 128, 148, 149, 152, E: 329, 344, 346, 347, 349, 358, 359, 389, 402, 404); clasa XI-a. Iliescu C. Florian (966, 971, 973, 974, 975, 1033, 38, 80, 98, 106, 124, 126, 127, 128, E: 317, 322, 356, 361, 389, 396, 397, P); *Liceul 2 băieți*, clasa X-a. (Donescu D. Ion 1152, E: 373, 378, 387, 404), Schefler Simion (952, 971, 972, 973, 999, 1000, E: 305, 314); clasa XI-a, Marius Guran (963, 972, 974, 984, 992, 993, 994, 996, 997, 999, 1000, 25,

33, 38, 40, 43, 62, 69, E: 318, 322, 323, 324, 329, 335, 339, 341, 342, 343, 344, 349, 350, 362), Florescu Gh, Mircea (1025, 38, 68, 78, 98, 125, 148, 152, E: 402, 403, 404, 405, 406, 407, 409, P), Rădulescu Sebastian (1038, 65, 78, 81, 84, 87, 127, 128, E: 306, 312, 329, 336, 342, 358, 362, 378, 391, 399), Ene Gh, Apostol (1023, 29, 79, 88, 90, 140, 148, 152, 154, 166, 176, 181, 183, 185, 189), Amărăzeanu E. Ionică (994, 997, 998, 1014, 40, 42, 118, 121, 124, 125, 127, 128, 130, 132, 149, 152, E: 337, 344, 346, 349, 350, 387, 389, 396, 398, 404, 409,), *Prică Gh. Constantin* (900, 904, 905, 906, 908, 910 ,911, 913, 916, 917, 923, 967, 971, 992, 999, 1000, 13, 14, 19, 23, 29, 39, 42, 55, 58, 61, 62, 64, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 89, 93, 98, 113, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 140, 143, 148, 152, E: 335, 336, 349, 369, 370, 372, 373, 378, 381, 391); *Şcoala medie tehnică de Construcţii*, anul II. Dicu D. Marin (1084, 93, 107, E: 370, 371, 375, 380, 381, 382, 383), Nedelcu D. Marin (E: 370, 379, 381, 382, 383, 391, 393, 408), Zisis Lefteris (1084, 93, E: 370, 375, 380, 381); *Şcoala medie electrotehnică*, anul II. Bărbuică Nicolae (1033, 38, 39, 40, 43, 58, 68, 69, 74, 78, 79, 84, 98, 126, 127, 128, P), Chitucea Eugen (950, 1019, 22, 65, 84, E: 321, 327, 335, 344, 349, 350, 358, 361, 370), Dinu Gheorghe (984, 994, 996, 997, 999, 1000, 5, 7, 12, 14, 16, 18, 37, 40, 42, 43, 78, 80, 82, 86, 93, 95, 121, 124, 126, 127, 128, 129, P).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VIII-a. Teodorescu Dorin (E: 317, 339, 394, 396, 398).

DEVA. Clasa VII-a. Gîrbou Emil (371, 374, 378, 387, 389, 391, 392, 394, 396, 398, 399, 400, 402, 403, 404, 408, 409), clasa IX-a. Huţiu C. Traian (1098, 127, E: 373, 378, 380, 381), anul III, Boşorogan Iulian (999 1002, 1025, E: 329, 335).

DOROHOI. Clasa VIII-a. Plămadă Gheorghe (E: 353, 356, 358, 361, 387, 391, 392), Robinsohn Haim E: 341, 353, 354, 355, 356, 358, 361, 370, 373, 375); clasa X-a. Burciu V. Ioan (960, 1061, 68, 69, 78, 79, 81, 82, 84, 106, 121, 137, 138, 139, 148, 149, 152, E: 341, 346, 353, 354, 355, 356, 358, 360, 362, 365, 368, 370, 383, 402, 404); Clasa XI-a. Cojocaru Mihai (904, 905, 906, 908, 923, 937, 938, 942, 945, 946, 948, 950, 959, 976:

FĂLTICENI. Clasa X-a. Doragu Ştefan (999, 1000, 1007, 25, 35, 40, 62, 65, 68, 78, 81, 82, 84, 93, 118, 121, 125, 126, E: 327, 329, 335, 336, 341, 349, 350, 354, 358, 362, 364, 365, 367, 370, 373, 375, 377, 380, 382, 384, 397), *Donescu Şt. Dragomir* (991, 997, 998, 1005, 1007, 1008, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19 , 20, 22, 23, 24, 25, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 48, 54, 55, 56, 58, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 73, 78, 80, 81, 82, 83, P), *Pandrea Nicolae* (943, 945, 946, 951, 960, 968, 974, 996, 998, 1006, 1023, 48, 54, 55, 58, 70, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 106, 109, 113, P), Popescu Daniela (994, 996, 1000, 25, 24,), Rosenfeld Paul (986, 999, 1002, 1007, 33, 40, 65, 68, 69, 78, 79, 81, 87, 88, 93, E: 327, 335, 336, 337, 338, 346, 347, 348, 349, 350, 358, 361, 362, 364, 365, 368).

FĂGĂRAŞ. *Şcoala medie tehnică de chimie*, anul IV A. Panait M. Mihail (989, 999, 1001, 1007, 18, 22, 25, 30, 42, 65, 68, 69, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 89, 90, 126, 127, P).

FOCŞANI. Clasa VI-a. Mărgărit Doru (E: 369, 374, 375, 384, 388, 389, 392, 395, 400); clasa X-a. Buruiană Gh. (992, 999, 1009, 65, 68, 69, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 98, 127, E: 327, 331, 338, 373, 375, 378, 381, 382, 384, 390, 394), *Ianuc I. Corneliu* (963, 965, 968, 984, 988, 1009, 1011, 18, 24, 25, 38, 42, 55, 62, 65, 68, 69, 80, 82, 84, 87, 88, 93, 95, 99, 106, 118, 126, 129, 131, 137, E: 304, 306, 307, 311, 312, 313, 319, 320, 321, 323, 324, 352, 356, 357, 358, 362, 364, 365, 366, 370, 371, 372, 373, 374, 377, 378, 380, 381, 382, 383, 388, 389, 391, 397, 399, 400), Lupaşcu Mihai (999, 1000, 1007, 25, 65, 68, 70, 78, 81, 82, 84, 93, 118, 121, 125, 126, 128, E: 354, 358, 362, 364, 365, 367, 370, 373, 375, 377, 382, 384), Hainăroşie V. Costin (946, 950, 973, 974, 1033, 84, 93, 126, E: 356, 368, 387, 289, 391, 394, 396, 397, 398), Porumb Gică (99, 1084, 125, E: 335, 336, 342, 346, 349, 358, 362, 366, 384, 389, 392, 397, 398, 399, 400), Iancu Gabriel (1025, 38, 40, 65, 70, 81, 89, 93, 125, 128, 149, 152, E: 349, 359, 364, 366, 380, 387, 389), Damian Alexandru (1065, 1069, 81, 88, 95, 125, E: 337, 341, 346, 349, 350, 358, 361, 362, 363, 364, 365, 370, 387), Mihalcea Tănase

(972, 999, 1004, 5, 65, 78, E: 306, 329, 336, 358), *Dumitriu Constantin* (938, 945, 952, 954, 959, 961, 974, 976, 982, 984, 985, 989, 994, 999, 1000, 2, 4, 20, 33, 35, 38, 39, 40, 62, 65, 78, 79, 80, 81), Salanți Anton (982, 984, 999, 1038, 41, 87, 107, 114, 187), Stănciu Octavian (999, 1005, 7, 125, 33, 37, 40, 65, 68, 69, 78, 79, 88, 95, 125), Spătaru Gh. Tiberiu (999, 1009, 11, 25, 35, 65, 79, 80, 88, 93, 98, 106, 125, E: 305, 306, 309, 327, 329, 336, 335, 337, 338, 339, 344, 354, 357, 362, 366, 369, 371, 372, 373, 378, 381, 382, 387), Vraciu N. Mitică (1068, 78, 81, 94, 98, 106, 118, 126, 127, 128, 148, 152, E: 362, 366, 378, 389, 390, 391,); *Școala din Gugești*, anul II. Munteanu C. Nicolae (E: 312, 313, 315, 392, 395); clasa XI-a. Petrovici Radu (978—1004, 35, 37, 41, 43, P).

GALAȚI. Clasa IX-a. Colibaba Tiberiu (1062, 65, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 84, 98, 102, 113, 121, 128, P); clasa X-a *Balaban Emil* (946, 951, 952, 954, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 972, 973, 974, 975, 976, 992, 993, 994, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 12, 14, 19, 25, 33, 38, 40, 41, 42, 43, 54, 55, 58, 63, 67, 69, 73, 75, 81, 83, 86, 88, 97, 99, 102, 107, P); *Dabija Sorin* (923, 925, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 946, 950, 952, 954, 955, 957, 959, 960, 962, 943, 944, 946, 950, 952, 954, 955, 957, 959, 960, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 971, 972), Minuță Iuliana (1033, 38, 84, 87, 88, 102, 112, 126, 127, 128, 129, E: 390).

GHEORGHENI. Clasa X-a. Cilinghir Vladimir (946, 986, 987, 988, 992, 993, 999, 1001, 4, 5, 85, 125, 128, E: 338, 346, 347, 348, 356, 387, 388, 389, 391, 395, 396, 397).

GIURGIU. Clasa VI-a. Minu I. Marin (318, 337, 339, 347, 3699, 370, 371, 372, 375, 378, 382, 398); clasa VII-a. Baciu Mihail (E: 306, 338, 358, 365, 370, 371, 375, 384, 387, 398); clasa VIII-a. Croitoru C. Petre (1007, 29, 69, E: 330, 360, 361, 365, 366, 367, 368); clasa IX-a. Mateescu Doina (964, 965, 971, 972, 973, 974, 975, E: 316, 318, 321, 323, 324, Mihai M. Vasile (1084, 102, 106, E: 325, 326, 328, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 369, 382, 383, 388, 389, 405), Roșu M. Petre (974, 1061, 84, 93, 95, 99, 118, E: 370, 373, 391), *Mișcol Mircea* (912, 1032, 33, 40, 63, 56, 68, 72, 87, 88, 94, 98, 104, 106, 121, 122, 124, 126, 127, 128, 131, 137, 138, 139, 151, 152, 154, 156, P); clasa X-a *Bătinețu M. Dumitru* (945, 959, 969, 978, 980, 985, 986, 989, 992, 993, 994, 996, 988, 998, 999, 1000, 1, 2, 4, 5, 9, 11, 20, 22, 23, 25, 29, 30, 32, 38, 40, 42, 55, 62, 63, 66, 68, 69, 73, 74, 75, 76, E: 325, 327, 330, 334, 338, 340, 341, 344, 346, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 356, 357, 358, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, P); *Drăgan St. Marin* (944, 948, 959, 962, 963, 964, 978, 988, 985, 986, 1000, 7, 11, 18, 19, 22, 29, 73, 78, 80, 81, 84, 85, 86, 98, 102, 106, 135, E: 354, 358, 362, 363, 364, 365, 371, 391, P), Aldea V. (905, 919, 1007, 84, E: 328, 350, 390, 407), Măgureanu C. Iulian (904, 905, 912, 913, 927, 937, 938, 940, 944, E: 303, 305, 306, 310, 315, 317, 320, 322), *Vidan Marius* (984, 997, 1001, 2, 3, 4, 7, 9, 15, 20, 31, 41, 42, 73, 78, 80, 84, 113, 128, 138, 143, 148, 149, 152, 156, 159, 162, E: 347, 354, 365, 382, 389, 391, 400, 402, 404, 405, 409, 410), *Vasile T. Alexandru* (950, 980, 1002, 4, 5, 16, 23, 25, 36, 38, 42, 43, 53, 55, 63, 65, 69, 73, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 92, 98, 106, 112, 118, 128), Ștefănescu Dorin (1102, 106, 149, E: 335, 337, 347, 383), Baciu N. Petre (905, 910, 912, 915, 917, 923, 929, 931, 937, 972, 973,); clasa XI-a, *Mitu St. Velicu* (960, 964, 972, 991, 992, 1003, 11, 85, 86, 87, 89, 88, 93, 98, 100, 102, 104, 105, 106, 109, 110, 113, 116, 117, 118, 121, 124, 126, 127, 128, 129, 137, 138, 139, 140, 148, 149, 150, 152, 158, 162, 165, P), Ologu St. Paul (1022, 29, 68, E: 337, 338, 341, 352, 353, 357), Buzdadea C. Silvian (944, 950, 959, 971, 972, 1011, E: 317, 319, 322, 324, 329, 331), *Petcu I. Dumitru* (982, 987, 991, 998, 1003, 12, 14, 54, 60, 82, 104, 118, 124, 126, 127, 128, 129, 137, 138, 139, 140, 148, 149, 152, 154, 156, 162, 163, P), *Pîrcălabu I. Marin* (951, 958, 960, 992, 996, 1007, 9, 11, 19, 22, 24, 25, 38, 42, 60, 65, 68, 76, 77, 78, 81, 84, 87, 93, 104, 110, 105, 115, 121, 124, 138, 139, E: 306, 308, 318, 327, 337, 338, 354, 358, 361, 363, 364, 365, 406, P), Tudor P. Silviu (978, 992, 1011, 118, 60, 84, 85, 90, 98, 102, 104, 106, 124, 126, 127, 128, 139).

IASI. Clasa VII-a. Barcău Jana (305, 309, 346, 370, 372, 391); clasa IX-a. Leonte N. Ioan (1025, 68, 69, 84, E: 337, 339, 341, 342, 344, 345, 346, 347, Vicol Constantin (1068, 69, 98, 127, 128, E: 362, 387, 389, 390, 404); clasa X-a. Bîrsan Temistocle (952, 962, 972, 984, 988), *Arsintescu I. Virgil* (944, 946, 950, 952, 954, 955, 959, 960, 963, 964, 966, 968, 969, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 984, 985, 986, 988, 992, 993, 999, 1000), *Geambaşu Lică* (944, 945, 946, 950, 952, 955, 957, 959, 960, 963, 964, 966, 967, 968, 969, 971, 972, 973, 978, 980, 984, 988, 989, 992, 993, 994, 995, 999, 1000, 1, 7, 8, 12, 17, 22, 25, P), David Cornel (1118, 121, 122, 126, 127, E: 370, 391), Pricop Ioan (1137, E: 387, 388, 389, 391, 392, 396, 400), Singurelu Gh. (979, 980, 992, 994, 998, 1000, 25, E: 329, 333, 335,) Ropot Paul (E: 324, 355, 384, 397, 398), *Vaisman Izu* (943, 944, 945, 946, 950, 952, 955, 959, 960, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 972, 973, 974, 976, 977, 978, 979, 980, 982, 984, 985, 986, 988, 989, 992, 993, 994, 995, 996, P). *Şcoala medie tehnică de energie electrică.* Anul IV. *Todică C. Petre* (944, 950, 952, 954, 962, 963, 964, 970, 971, 972, 974, 976, 1058, 63, 67, 78, 84, 95, 96, 97, 98, 99, 102, 107, 118, P). Student Adolf (Dreptunghiuri Interesante).

LUGOJ. *Şcoala elementară Gavojdie*, clasa VII-a. Groza Rodica (1158, E: 401, 402, 408, 409).

MEDIAŞ. Faghiura Bela (E: 315, 335, 370, 379, 398).

OITUZ — Bacău. Clasa XI-a. Butucelea Alexandru (1012, 43, 83, 84, 85, 98).

ORADEA. Clasa VII-a. Manu Elisabeta (E: 339, 351, 355, 358, 361, 370, 382, 387, 401, 402, 403), Buzuloiu Florin (E: 318, 320, 322, 324, 335, 337, 354, 358, 370, 382, 389, 391, 392, 397, 398); clasa VIII-a. Oprean Ion (1075, 84, E: 316, 318, 337, 346, 351, 352, 353, 354, 356, 358, 361, 370, 373, 375); *clasa IX-a.* Guiaşu Silviu (906, 944, 950, 951, 964, 985, 988, 992, 1014, 18, 25, 38, 40, 63, 68, 69, 70, 76, 78, 79, 80, 81, 84, 106, E, 354, 356, 357, 358, 361, 362, 363, 364, 365, 370, 379, 380, 381, 382), Iosif Dania (998, 1084, 102, E: 361, 370, 371, 387, 389, 391, 392, 393, 398), Rus Nicolae (905, 906, 913, 925, 927, 939, 941, 971, 972, 978, 988, 1084, E: 314, 318, 346, 349, 351, 353, 357, 358, 367, 370, 382), *Rus A. Ioan* (946, 947, 948, 965, 979, 985, 987, 990, 992, 993, 996, 998, 1002, 3, 5, 12, 14, 16, 18, 25, 30, 38, 43, 53, 63, 65, 76, 80, 85, 87, 102, 111, P), Pavel Gh. Adrian (998, 1102, 118, E: 370, 373, 381, 382, 387, 389, 391, 392, 393, 394, 397, 398, 399); clasa X-a. Cosma Octavian 978, 980, 981, 984, 992, 997, Bocu Mircea (994, 1060, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 106, 107), *Buzuloiu Vasile* (949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 984, 989, 991—103, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 17, 18, 22—27), *Junger Robert* (946, 950, 992, 993, 994, 1009, 1033, 37, 40, 69, 73, 78, 79, 81, 82, 88, 98, 128, 149, 152, E: 316, 318, 323, 336 353, 356, 358, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 368, 370, 371, 372, 373, 378, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 389, 391, 394, 396, 397, 398, 399, 404), Venter Dumitru (906, 910, 929, 937, 1018, 22, 29, 76, 84, 98, E: 328, 339, 342, 349, 356, 358, 361, 370, 378, 382), Ionel Mustea (986, 988, 999, 1001, 4, 22, 41, 69, 107, 139). *Şcoala medie tehnică de construcţii*, anul III. Gabrian Cornelia (1065, 69, 93, 97, 98, 127, 128, E: 362, 370, 373, 390). *Şcoala elementară din comuna Tulca*, clasa VII-a. Lerinţ Aurel (361, 370, 371, 373, 375, 379, 382, 384, 409) Morgovan Gavril (316, 370, 373, 375, 379, 382, 405, 409, Savău Iuliana 361, 370, 373, 382, 384, 409), Tambă Cornelia (361, 370, 371, 373, 375), Indrie Florica (361, 370, 371, 373, 379, 382,) Piroş Maria (361, 370, 371, 373, 409), Popa Elena (361, 370, 371, 373, 409), Boiţi Victoria (361, 370, 371, 373, 398), Lencea Aron (361, 370, 371, 373, 409), Mateaş Raveica (361, 370, 371, 373, 409), Indrie Elena (361, 370, 371, 375, 379, 382, 398, 409), Morgovan Elena (361, 370, 371, 373, 379, 409), Mateiaş Ana (36· 370, 371, 373, 382, 389, 409).

ORAŞUL STALIN. Clasa V-a. Popescu V. Horia (369, 370, 371, 373, 382,), clasa XI-a *Nan Stelian* (900, 914, 916, 925, 927, 939, 941, 952, 972, 973, 975, 976, 978, 980, 986, 987, 988, 1004, 5, 14, 16, 23, 30, 43, 67, 75, 76, 86, 90, 95, 98, 102, 104); clasa VIII-a. Calotă N. Dumitru (E: 305, 306, 309, 310, 317, 319, 320, 322, 330, 335, 337, 347, 348, 349, 350, 354, 358, 362, 363, 364, 365, Minea Florin (E: 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 366, 365, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 378, 380, 381, 382, 383, 384, 485, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 394, 396, 397, 399, 400); clasa X-a. *Coşa Dan* (901, 944, 945, 950, 951, 952, 954, 957, 960, 964, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 980, 982, 984, 986, 988, 992, 993, 994, 999, 1000, 5, 11, 16, 18, 25, 29, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 43, 54, 55, 58, 65, 67, 68, 69, 78, 79, 81, 82, 84, 87, 88, 94, 95, 96, 98, 102, 106, 110, 124, 125, 126, 127, 128), *Juga Stavăr* (982, 984, 986, 988, 994, 995, 999, 1000, 7, 11, 18, 20, 25, 33, 34, 56, 65, 68, 70, 72, 78, 79, 84, 87, 88, 98, 126, 127, 128, 137, 139, 149, 152, 159); clasa XI-a. *Drăghici T. Ioan* (904, 906, 908, 915, 923, 927, 938, 940, 942, 950, 951, 970, 974, 984, 992, 1000, 7, 25, 33, 37, 40, 42, 68, 78, 80, 81, 84, 106). *Stupini*. Negulici Gh. Sabina (1037, 40, E: 338, 342, 344, 347, 349).

PANCIU. *Şcoala elementară din Răcoasa*, clasa VI-a. Porumb Mircea (346, 348, 349, 392, 397, 398, 399, 300).

PETROŞANI. Tehnician S. Fissgus (A — « Despre sisteme de numeraţie »).

PIATRA NEAMŢ. Clasa IX-a. Stăncescu Angela (1040, 85, 98, E: 378, 379), Rusu Maria (1068, 69, 84, E: 356, 357, 358, 361, 362, 373, 380,) Ciobanu N. (1025, 33, 38, 40, 42, 43, 51, 53, 65, 70, 78, 79, 81, 82, 84, 98, 118, 121, 126, E: 327, 335, 336, 339, 341, 342, 344, 346, 349, 350, 355, 356, 358, 362, 370, 371, 372, 373, 379, 380, 382, 383, 387, 389, 390, 391, 392, 394, 395, 398, P), Covrig Mihai (1065, 68, 78, 79, 84, 98, 118, 121, E: 336, 353, 358, 370, 371, 372, 394, 396); clasa X-a. *Minuţ M. Petru* (954, 959, 963, 964, 965, 966, 970, 973, 977, 978, 979, 985, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 1000, 2, 3, 4, 5, 36, 59, 61, 69, 118, 126, P), *Gavril Gh.* (977, 978, 982, 985, 986, 987, 992, 993, 994, 999, 1000, 1, 2, 4, 5, 12, 23, 25, 33, 35, 38, 39, 42, 69, 87, 88, 97, 99, 107, 118, 127, 128, 129), Iliescu Irina (950, 1025, 38, 40, 69, 78, 81, 84, E: 329, 349, 350, 356, 358), Vasilescu Florica (1079, 82, 88, 127, 128, E: 323, 349, (350, 356, 364, 371, 381, 387, 391, 394); clasa XI-a Pristavu V. Ioan (959, 975, 976, 982, 984, 985, 988, 995, 996, 1007, 25, 36, P), Călianu Narcisa (1019, 25, 78, 81, 118, 128, E: 349, 350, 391,). *Şcoala elementară din comuna Viişoara*, clasa VI-a. Albu Aurel (337, 346, 375, 382, 400). Zaharia Lucreţia (337, 346, 369, 375, 382, 389, 391, 400), Cojoc Haralambie (337, 346, 375, 384, 385), Filip Ana (337, 346, 375, 382, 389, 391, 400), Stamatiu Mircea (337, 346, 369, 376, 382, 384, 389, 395, 400), Rusu Silvia E: (337, 346, 369, 375, 389, 400); clasa VII-a. *Apetrei Gheorghe* (318, 324, 330, 337, 342, 345, 353, 354, 355, 358, 365, 366, 370, 371, 375, 384, 387, 389, 391, 395, 400), *Rusu Constantin* (318, 324, 330, 337, 345, 346, 354, 355, 358, 365, 366, 369, 370, 371, 375, 382, 384, 387, 389, 395, 400), Tăranu Maria (330, 337, 341, 353, 354, 355, 358, 365, 366, 368, 370, 371, 387), Paul Stan (337, 346, 369, 371, 375, 382, 384, 391, 395, 400), Dandu Ana (337, 342, 345, 355, 358, 365, 370, 371, 387, 391), Tăruş Virginia (330, 342, 345, 358, 370, 371, 387, 391), Chiciu Dionise (337, 346, 369, 382, 384, 389, 400, Jitaru Nicolae 337, 346, 369, 375, 382, 384, 389, 391).

PITEŞTI. Liceul de băieţi, clasa VIII-a. Duţă I. Vasile (940, 941, 974, E: 306, 316, 335), Marin Ion (369, 370, 373, 376, 378, 380). *Şcoala medie tehnică de mecanică*, anul I. Sofran Gavril (329, 335, 336, 340, 341, 342, 352, 353, 354, 355, 358, 361, 362, 369, 385, 386, 387, 389, 391, 392, 400), Vasile Ion (389, 391, 392, 397, 398, 400); anul II, Marin C. Marin (937, 999, 1009, 84, 106, E: 309, 370, 382); anul III. Baldovinescu Gheorghe (358, 371, 375, 391, 398), Mihai St. Constantin (945, 957, 968, 1012, 1024, 39, 41, 73, 88, 138, 139, E: 313, 315, 316, 321, 324, 329, 352, 371, 377, 387, 392, 394, 399, P), Teodorescu Marin (358, 375, 378, 391, 398, 409). *Şcoala elementară Pietroşani*. Oproiu I. Camil (337,

913, 915, 917, 920, 921, 923, 927, 928, 929, 930, 931, 933, 934, 936, 398, 940, 942, 946, 948, 950, 952, 954, 955, 959, 963, 964, 967, 968, 971, 972, 974, 975, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, P), Florescu Dinu (946, 984, 1025, 33, 43, 62, 84, 88, 98, 126, 128, E: 349, 358, 362, 365, 373, 391).

SFT. GHEORGHE. Clasa VII-a. *Oereanu Victoria* (1084, 1183, E: 305, 306, 309, 311, 318, 346, 353, 358, 362, 364, 365, 366, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 378, 379, 381, 382, 391, 392, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 442, 443, 444, 445, 446); clasa X-a. Zacarias Ştefan (974, 1035, 36, 68, 78, 79, 80, 81, 82, E: 338, 353, 355, 356, 358, 359, P). *Şcoala medie tehnică textilă*, anul I. Bigiu Valentin (305, 309, 358, 365, 370), Schelegel Mihai (305, 306, 311, 346, 353, 358, 365, 366, 382, 389, 391, 396, 398), Caraiman Gheorghe (335, 365, 370, 382, 398), Schweniger Constantin (306, 309, 311, 358, 365, 370), Creţeanu Gheorghe (305, 306, 309, 311, 346, 358, 365, 398), Drăghici Victor (305, 306, 309, 311, 365), Condrea Gheorghe (358, 370, 382, 389, 398), Dincă Gabriela (358, 365, 370, 389, 398), Buruiană Aneta (359, 366, 370, 382, 398,), Beşliu Emil (358, 365, 370, 382, 398), Brănescu Constantin (306, 309, 358, 365, 398); anul II. Ureche Gheorghe (306, 318, 346, 358, 370), Zaharia Gheorghe (346, 358, 370, 394, 398), Tunsoiu Stavăr (358, 365, 370, 391, 398), Buzoianu Mihail (346, 358, 370, 394, 398), Zbarcea Paraschiva (305, 318, 346, 358, 370, 398), Feldiorean Viorica (346, 370, 382, 389, 398); anul III. Dumitru Valentin (305, 309, 358, 382, 380), Olteanu Elena, (306, 309, 359, 368, 382), Bucs Iosif (1084, E: 322, 358, 365, 381, 382, 384, 391, 398), Vădana Doina (358, 365, 370, 382, 389), Iliescu Filofteia (358, 365, 370, 391, 398), Stănescu Monica (358, 370, 384, 389, 398), Vasilescu Mihai (365, 370, 384, 389, 391), Jurebetă Florenţa (305, 306, 318, 346, 358, 378, 398), Beschen Elena (305, 306, 318, 346, 358, 370, 398).

SUCEAVA. Clasa VIII-a. Nimiţan Ion (945, 952, 955, 963, 1012, 33, 38, 98); clasa IX-a. Rotaru N. Constantin (989, 996, 998, 1088, 118, 121, 126, 128, 140, 152, 159, E: 340, 357, 366, 368, 374, 384, 387, 388, 389, 393, 394, 401, 403, 404, 406, 407, 409), Bogheanu Dragoş (1118, 125, 159, E: 356, 361, 387, 389, 391, 393, 394, 396, 401, 402, 406, 407, 409), Mândicescu Gheorghe (1152, 159, E: 401, 402, 403, 404, 406, 407, 409); clasa X-a. Buda, Teodor (948, 951, 962, 1007, E: 338, 360, 363); clasa XI-a. Herşcu David (1040, 42, 65, 68, 69, 70, 76, 84, 93, 94, 102, 124, 126, 127, 128, 149, 152).

TÎRGOVIŞTE. Clasa IX-a. *Galatky Gheorghe* (980, 997, 1004, 5, 12, 16, 24, 29, 32, 34, 55, 58, 61, 63, 69, 70, 87, 88, 89, 95, 97, 102, 104, 110, 113, 115, 118, 124, 125, 126, 127, 128, 140, 148, 152, P), *Oprea A. Aurelian* (912, 914, 916, 934, 937, 939, 941, 948, 951, 953, 954, 957, 962, 968, 989, 1000, 1002, 4, 12, 13, 19, 22, 23, 29, 36, 37, 42, 61, 65, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 86, 87, 89, 98), *Brebenie P. Corneliu* (925, 930, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 944, 950, 959, 962, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 979, 986, 987, 988, 992, 993, 994, 996, 998, 999, 1000, 1, 3, 4, 7, E: 328, 329, 330, 331, 335, 336, 337, 347, 348, P), *Brebu* I. *Gheorghe* (902, 943, 946, 948, 956, 957, 968, 979, 980, 984, 986, 988, 992, 994, 997, 999, 1000, 2, 4, 7, 9, 18, 23, 25, 31, 33, 38, 40, 42, 51, 65), Torje Elena (358, 363, 364, 365, 402, 404), Anculescu Tiberiu (1033, 38, 78, 79, 81, 84), *Stoian I. Gh.* (946, 948, 950, 954, 955, 957, 959, 964, 968, 995, 998, 1009, 11, 13, 16, 20, 23, 24, 25, 29, 30, 32, 34, 37, 40, 42, 47, 55, 58, 60, 61, 63, 67, 69, 70, 73, 76, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 93, 95, 97, 102, 106, 111, 113, P), Ionescu T. Ovidiu (992, 1022, 33, 38, 42, 76, E: 326, 327, 328, 331, 338, 361, 365, 370, 394). Tache Ştefan (905, 906, 907, 908, 911, 913, 923, 938, 992, 1025, E: 304, 308, 314, P), Buzea Viorel (1068, 84, 98, 152, E: 329, 369, 370, 371, 404, 409); clasa X-a. Manea I. Gheorghe (1068, 69, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 114, 121, 125, 126, 127, 128, 137, 152), Mateescu I. Marin (954, 992, 1081, 104, 106, 126, 137), Mănăţoiu Adeta (1065, 68, 84, 93, E: 305, 359, 361, 365).

TÎRGU-JIU. Clasa V-a. *Velicescu Mircea* (1159, E: 351, 357, 358, 369, 370, 371, 376, 382, 387, 389, 391, 392, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 409,); clasa VIII-a. Amzulescu C,

Liana (1102, 127, 128, E: 347, 357, 387); clasa XI-a. Crăciun V. Constantin (1055, 61, 79, 85, 90, 152), Pielescu Jean (1014, 48, 76, E: 355, 369).

TÎRGU-OCNA. *Liceul mixt.* Clasa IX-a, Gheţu Ioan (960, 980, 1019, 89, E: 324, 328), Ghinea Constanţa (354, 355, 357, 391, 394, 398); clasa X-a. Istrate Mihai (952, 1080, 1127, 128, 129); clasa XI-a. Butucelea Alexandru (1007, 9, 11, 19, 106, 130, « Presiunea radiaţiilor »), Momanu Gh. (943, 959, 1068, 78, 82, 84, 98, 127).

TÎRGU-MUREŞ. Clasa VIII-a. Hegedus Atila (904, 905, 999, 1000, 84, 152, E: 302, 304, 309, 318, 329, 346, 362, 370, 371, 381, 382, 391, 397), Istvan Pethö (999, 1000, 152, E: 329, 335, 353, 358, 362, 370, 381, 382, 397, 408), Matei Aurel (306, 354, 356, 358, 361, 363, 365, 370, 380); clasa X-a. Moraru Titus (1065, 67, 68, 70, 84, E:, 354, 367, 370, 373), *Laslo Ioan* (944, 946, 949, 950, 951, 952, 962, 971, 972, 974, 984, 986, 988, 1000, 5, 7, 29, 33, 37, 38, 40, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 84, 93, 98, 106, E: 318, 317, 320, 322, 323, 324, 325, 328, 329); clasa XI-a. Matei Nicolae (935, 952, 955, 957, 978, 984, 985, 997, 1014, 22, 23), *Bunica M. Octavian* (900, 907, 909, 911, 912, 914, 917, 920, 921, 923, 926, 927, 928, 929, 930, 931 932, 933, 934, 935, 936, 939, 940, 941, 942, 943, 946, 950, 954, 964, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 979, 981, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 992, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 4, 9, 18, 23, 25, E: 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 319, 320, 321, 322, 323, 324), Pupăză N. Nicolae (943, 944, 946, 948, 950, 952, 954, 955, 957, 959, 970, 992, 1005, 9, 11, 12, 16, 18, 29, 38).

TECUCI. Clasa VII-a. Ianuc I. Niţă (1068, E: 346, 352, 354, 356, 358, 362, 366, 368, 369, 370, 371, 372, 373); clasa X-a. Popa Adrian (1084, 88, E: 358, 364, 365) Lupan Aurel (954, 972, 1087, 127, 137, E: 323, 324, 356, 384, 388, 390, 398,), *Corban Adrian* (979, 986, 988, 997, 1001, 3, 5, 7, 9, 16, 20, 25, 46, 54, 55, 58, 63, 73, 82, 87, 93, 111, 112, 113, 118, 121, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 137, 138, E: 326, 328, 331, 337, 341, 347, 348, 356, 366, 367, 370, 371, 373, 377, 378, 379, 382, 383, 387, 389, 390, 391, 392, 397, 398, 408, 403, 404, 407, 409, 410, 411, 412, 413, 416, 418, 426, 427, 428, 429, 431, 438, 439, 440, 441, 442, 446, P) Schwartzberg Simion (923, 950, 972, 973, 974, 992, 1023, 61, 62, 68, 69, 78, 79, 81, 84, E: 306, 312, 321, 328, 329, 336, 338, 349, 350, 358, 362, 365), Morzan Teodor (1035, 1054, 56, 70, 91, 106, 113, 117, 118, 121, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 140, 142, 148, 150, 152, 165, 183, 185, P); clasa XI-a. Corban Octavian (984, 985, 1000, 2, 25, 38, 87, 96, 98, 106, 118, 149, 152, E: 328, 373, 377, 378, 379, 382), *Galer Dumitru* (904, 905, 915, 938, 974, 999, 1000, 1004, 25, 33, 38, 42, 54, 68, 69, 70, 78, 84, 88, 91, 106, 118, 121, 126, 127, 128, 129, 131, E: 305, 306, 309, 314, 318, 329, 338, 341, 344, 349, 350, 358, 361, 364, 370, 371, 381, P), Turcanu D. Ioan (908, 909, 910, 912, 913, 914, 919, 920, 922, 925, 926, 927, 928, 930, 932, 937, 939, 941, 948, 1019, 69, P).

TIMIŞOARA. *Licieul de băieţi* nr. 1, clasa VII-a. Mihăileanu N. Constantin (E: 303, 304, 305, 306, 316, 317, 322, 323, 391, 394); clasa VIII-a. *Arsenovici Tiberiu* (944, 952, 954, 957, 959, 964, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 985, 986, 988, 989, 992, 999, 1000, 1, 3, 4, 9, 18, 24, 68, 78, 81, E: 315, 316, 317, 318, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 340, 341, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 369, 370, 371, 372, 373, 376, 379, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 394, 395, 396, 397, 399, 400). *Liceul de băieţi nr.* 2. Braşovan Ioan (1069, 87, 88, 94, 96, 102, 106, 107, 109, 118, 124, 136, 137, 139, 140, 149, 165, 183, P).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. *Stănuleţ Mihai* (944, 952, 966, 971, 972, 973, 974, 976, 977, 986, 988, 992, 993, 994, 999, 1000, 1, 3, 4, E: 301, 305, 306, 309, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 323, 324, 328, 329, 331, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 342, 344, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 358, P). *Şcoala pedagogică*, anul IV. Popescu I. Şerban (1062, 118, 127, 159, E: 354, 358, 361, 362, 370, 371, 382, 387, 389, 391, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 409).

TURNU MĂGURELE. Clasa VIII-a. Comana Gheorghe (337, 338, 346, 347, 351, 352, 358, 364, 365, 370, 382, 384); clasa IX-a. Ţene Rodian (950, 972, 973, 992, 99, 1159, E: 301, 358, 365, 387, 388, 398, 408, 309); clasa X-a. Rey Vasile (1043, 84, 98, 106, 124, 126, 137), Zătreanu Corneliu (1106 E: 338, 347, 363, 364, 365, 370, 375, 378, 405); clasa XI-a. Dragomirescu Elena (1128, E: 375, 391, 402, 405, 411).

VASLUI. Clasa VI-a. Stănescu Viorica (E: 368, 391, 394, 396, 398, 400, 408, 410, P); clasa IX-a. Avram Leon (1084, 149, 159, E: 370, 371, 391, 398, 401, 402, 404, 409, 410), Dumitrescu V. Mihai (1084, 159, 184, E: 341, 344, 370, 382, 389, 391, 396, 400, 401, 402, 409, 410), Popa St. Petru (1025, 40, 127, 139, E: 317, 320, 328, 330, 331, 332, 333, 342, 347, 348, 358, 368, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 394, 396, 398, 400, 402, 404, 406, 408, 410), Simionescu St. Constantin (1159, E: 310, 335, 341, 368, 370, 387, 391), Stănescu I. Viorel (992, 993, 999, 1000, 25, E: 316, 328, 329, 330, 331, 333, 336, 391, P), Şerban V. Ion (950, 1025, 65, 68, 71, 78, 79, 84), Duda Angela (999, E: 329, 335, 336, 358, 391, 396, 400).

VALEA CĂLUGĂREASCĂ. Profesor I. Teodorescu (« Capacitatea butoaielor »).

VÎRTOAPELE (Bucureşti). Clasa VIII-a. Dicu R. Ioana (E: 279, 280, 306, 309, 318).

ZALĂU. Clasa X-a. Hodiş Gheorghe (988, 999, 1000, 1, 19, 25, 61, 62, 63, 79, 113, 121, 124, 125, 127, 128, 140, 152, 154, P), Dale Ion (1084, E: 317, 358, 359, 360, 361, 362, 365, 378, 391), Cotună Traian (904, 906, 915, 940, 950, 972, 974, 1025, 65, 78, 81, E: 317, 335, 358, 360, 365), Creţu Traian (904, 906, 971, 973, 974, E: 301, 305, 309, 311, 314, 318, 337, 338, 351, 358, 365, 378, 391), *Mândru Victor* (950, 971, 972, 973, 974, 1025, 73, 78, E: 301, 304, 305, 306, 309, 311, 316, 317, 323, 324, 335, 358, 365, 370, 378, 379, 386, 387, 389, 391, 396, 397, 398), Mureşan Ioan (950, 1073, E: 316, 317, 318, 323, 335, 359, 365, 396). — (Soluţiile primite în luna aprilie vor fi anunţate în numărul următor).

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desemnate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie, iar fiecare soluţie să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunţul complet şi numele propunătorului. După soluţionarea fiecărei probleme scrieţi citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmaţi sau ocupaţia şi adresa şi apoi trimiteţi problemele aşezate în ordinea lor numerică.

— *Se primesc soluţii* numai la problemele şi exerciţiile din ultimele cinci numere apărute. Soluţiile ce se vor anunţa la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1954.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au soluţionat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme deja propuse, se află publicate în cărţi sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul şi pagina unde s-a mai publicat enunţul sau soluţia problemei respective.

— *In redactarea unei soluţii* trebuie alese notaţii potrivite, subliniate părţile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect lucrate, clar, cu linii pline şi punctate. De multe ori, aceste reguli îndeplinite, conduc la soluţia problemei, Adesea, dintr-o problemă simplă, pot ieşi chestiuni interesante. Soluţiile mai dificile se obţin uneori, prin încercări succesive şi studiind chestiuni în legătură cu problema.

— *Corespondentul nostru* care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă scoasă dintr-o observare făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele şi în fine, cei mai avansaţi pot să ne trimită şi cîte un articol cu o chestiune generală sau cu o apropiere originală între chestiuni cunoscute. Aceste note sau articole este bine să fie refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise pentru a evita ca în expunerea făcută să fie scrise vorbe fără rost, iar ideile să deştepte interesul cititorilor. Ordinea şi îngrijirea în prezentarea unei idei pot fi îndeplinite dacă harnicul nostru corespondent a făcut mai multe rezolvări, dacă a citit şi a înţeles deplin multe din soluţii şi articole publicate şi dacă a studiat îndeajuns chestiunea de care se ocupă.

— *Tovarăşii colaboratori elevi* sînt rugaţi să ne trimită date asupra activităţii lor extraşcolare la matematică şi fizică, asupra activităţii cercurilor de matematică sau de fizică la care iau parte, pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experienţă.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat a o face cunoscută şi altora şi a ne trimite propuneri şi sugestii care să fie de folos în munca noastră redacţională.

— *Redacţia nu face abonamente*, nici expediţii de reviste, de aceia, reclamaţiile, sau comenzile de numere vechi precum şi propunerile sau sugestiile în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariţiei, se pot face la Oficiul poştal local sau Oficiului special de expediţie a presei din Bucureşti, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Marcuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ SERIA B PE ANUL 1954

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI

LEI 10 (12 numere)

C. 648. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

EA 4426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

Institut de Documentare Tehnică BUCUREŞTI
CSERE - VYMENA - WYMIANA
CMEHA - TAUSCH

Anul V—iulie 1954

7

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul V, Nr. 7 — iulie 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Marie Curie de Virgil Atanasiu*	217
2.	*Radioactivitatea artificială de Prof. univ. Al. Sanielevici*	220
3.	*Aplicarea metodei exhaustiunii în demonstrația geometrică de Ion Armean, Cluj*	234
4.	*Capacitatea butoaielor de Prof. I. Teodorescu.*	239
5.	*Probleme rezolvate: (968, 1007, 1009, 1012, 1014, 1016, 1023, 1025, 1026, 1027, 1030, 1032, 1033, 1038, 1043, 1057*	244
6.	*Problema propuse (1294—1319)*	252
7.	*Exerciții și probleme pentru școala de șapte ani (E: 505—E: 521*	255
8.	*Poșta Redacției*	257
9.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	257

ANUL V 7 IULIE 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacție

REDACȚIA: Str. Spiru Haret, 12 — Tel. 4.46.53 — București XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondența privitoare la activitatea matematică și de fizică a școlilor, precum și orice material informativ care ar putea interesa redacția noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL V * Nr. 7 iulie 1954

TULAJDONA
BUCUREŞTI
TAUSCH - CMEHA

MARIE CURIE

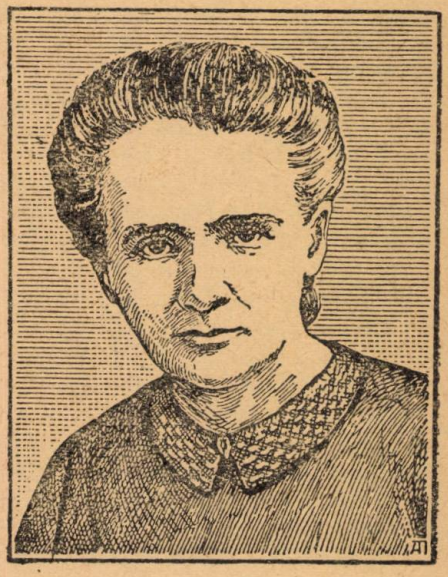
(1867—1934)

VIRGIL ATANASIU

La 5 iulie s-au împlinit 20 de ani de cînd s-a stins din viaţă Marie Curie, după o prodigioasă activitate pe tărîmul ştiinţei.

Marie Curie s-a născut la Varşovia. Tatăl ei, Vladislav Sklodovski, era profesor de fizică la un liceu din acest oraş. De la el a deprins gustul muncii de laborator, a învăţat să adîncească cercetarea unui lucru pentru a-l cunoaşte, a prins dragoste pentru ştiinţă, pentru fizică şi chimie, în special.

In anul 1883 a absolvit liceul, dar cu toate că a fost o elevă strălucită, a trebuit să întrerupă 8 ani continuarea studiilor, pentru că regimul de atunci interzicea femeilor frecventarea cursurilor universitare, iar la Paris — unde acest lucru era posibil — nu se putea duce din lipsă de mijloace. A intervenit atunci, o înţelegere între ea şi sora ei Bronia, în sensul ajutorării reciproce. Bronia a putut astfel, să studieze medicina la Paris, aiutată fiind de Maria, iar după aceasta, lucrurile s-au inversat.



Marie Curie

In condiţii dintre cele mai modeste Maria Sklodovska a putut să urmeze cursurile Facultăţii de Ştiinţe de la Sorbona, fiind clasificată prima la «Licenţa în ştiinţele fizice» din 1893 şi a doua la «Licenţa în ştiinţele matematice» din 1894.

In 1895, Maria Sklodovska deveni soţia lui Pierre Curie, tovarăşa de muncă a unui om de geniu şi de mult suflet. Şi anii cei mai frumoşi din tinereţea lor se deapănă liniştit. Sînt anii cercetărilor fecunde, de pe urma cărora celebritatea le-a fost asigurată. Descoperirea radiului marchează această primă epocă.

Pentru a ne da mai bine seama de aportul pe care Marie Curie l-a adus în ştiinţă este necesar să vedem care era situaţia pe acest tărîm în acele timpuri.

Descoperirea radioactivităţii a constituit o etapă din cele mai importante în dezvoltarea istorică a ştiinţelor naturii, prin noţiunile noi pe care le-a introdus, prin amploarea domeniului de cunoaştere pe care l-a deschis, prin impulsul pe care l-a dat fizicii, chimiei şi altor ştiinţe, prin contribuţia ei la fundamentarea concepţiei materialiste a filozofiei şi în sfîrşit, prin aplicaţiile tehnice pe care le-a determinat.

Această descoperire nu a fost întîmplătoare; ea a fost o consecinţă a progreselor realizate în fizică, în special în a doua jumătate a secolului al XIX-lea care la rîndul lor au fost determinate de dezvoltarea economiei capitaliste. Astfel, erau de acum puse bazele electrodinamicei, se explicase fenomenul electrolizei prin descoperirea existenţei ionilor, se stabilise identitatea de natură a radiaţiilor magnetice, termice şi luminoase; aplicaţiile tehnice ale fenomenelor de inducţie puseseră la dispoziţia cercetătorilor, generatori electrici puternici şi diferenţe de potenţial de ordinul zecilor de mii de volţi, se descoperise fenomenul descărcării electrice în gaze rarefiate (raze catodice, raze X), etc. Se ajunsese astfel, la acel stadiu al dezvoltării fizicii în care descoperirea radioactivităţii n-ar fi putut rămîne multă vreme necunoscută.

Se ştia că regiunea peretului de sticlă — a unui tub catodic în funcţiune — pe care cade fascicolul de electroni, devine fluorescentă şi emite raze X. Fenomenul de fluorescenţă a diferitelor substanţe era însă, cunoscut mai de mult si era determinat nu de razele catodice, ci prin iradierea acestor substanţe cu lumină solară. Henri Becquerel descoperitorul fenomenului de radioactivitate[1]) şi-a pus întrebarea dacă substanţele care devin fluorescente prin iradiere cu lumina solară, nu emit cumva şi ele raze asemănătoare cu razele X. Cercetările întreprinse de Becquerel în acest sens au dus la descoperirea că alaunul de uraniu (sulfat dublu de uraniu şi potasiu), o substanţă fluorescentă. expus luminei solare, pe lîngă faptul că devine fluorescent emite şi o radiaţie asemănătoare razelor X. Mai mult, el constată că un cristal din această substanţă păstrat la întuneric pînă la completa stingere a fluorescenţei, este capabil să emită spontan radiaţii asemănătoare razelor X. In urma experienţelor efectuate, Becquerel ajunge la concluzia că numai compuşii uraniului sînt capabili să prezinte acest fenomen, deci că radioactivitatea este o însuşire specifică atomului de uraniu.

S-a pus întrebarea dacă nu cumva mai sînt şi alte elemente, în afară de uraniu, care să prezinte fenomenul radioactivităţii. Răspunsul la această întrebare a fost dat în aprilie 1898 de către G. G. Schmidt şi Marie Curie, care independent unul de altul, au constatat că elementul thoriu este şi el radioactiv.

Cercetările amănunţite întreprinse de Marie Curie cu acest prilej, o fac să constate că alaunul de uraniu natural prezintă o radioactivitate mai mare decît alaunul preparat în laborator: de asemenea, Marie Curie, împreună cu soţul ei Pierre Curie, constată că pechblenda de Ioachimov (Cehoslovacia), un minereu de uraniu şi plumb, prezintă o radioactivitate

[1]) Această denumire a fost propusă de Marie Curie.

de cîteva ori mai intensă decît aceea care ar corespunde procentului de uraniu existent în minereu. Pe de altă parte ei constatară că dacă se extrage uraniul din pechblendă, radioactivitatea rezidiului raportată la unitatea de masă este de cîteva ori mai mare decît a minereului inițial.

Pentru a explica aceste fapte surprinzătoare, soții Curie emit ipoteza că în pechblendă ar exista în proporții extrem de reduse, încît a scăpat pînă atunci atenției chimiștilor, cel puțin un element neconoscut foarte puternic radioactiv.

Pornind dela această ipoteză, soții Curie întreprind o muncă intensă și extrem de dificilă datorită condițiilor de lucru pe care le aveau, izbutind ca prin distilări fracționate a mai multe tone de rezidiu de pechblendă, să separe două fracțiuni. Ei găsiră că fracțiunea care cuprinde bismut (sulfură de bismut) prezenta o radioactivitate de 400 ori mai mare decît aceea a unei mase egale de oxid de uraniu, în timp ce sulfura de bismut preparată în laborator este complet inactivă. Marie Curie ajunge astfel, la concluzia (iulie 1898) că fracțiunea separată prin distilare conține un radioelement necunoscut, înrudit din punct de vedere chimic cu bismutul și propune ca acest nou element să fie denumit *poloniu* (Po) în cinstea patriei sale de origină. Cinci luni mai tîrziu (decembrie 1898) soții Curie în colaborare cu Georges Bemont, anunță că au indentificat în cealaltă fracțiune — fracțiunea de bariu extrasă din rezidiul de pechblendă — un al doilea radioelement necunoscut, a cărui radioactivitate este de 3 milioane de ori mai intensă decît aceea a unei mase egale de oxid de uraniu. Ei propun numele de *radiu* (Ra) pentru acest nou element.

Dar chimiștii erau mai sceptici. Ei nu credeau în existența unui corp nou decît dacă puteau să-l vadă, să-l cîntărească, să-l cerceteze.

Pentru a putea dovedi întregului univers existența poloniului și radiului, soții Curie continuă cercetările în această direcție încă patru ani. In colaborare cu André Debierne, soții Curie izbutesc (în 1902), printr-o lungă serie de cristalizări fracționate conduse cu o deosebită meticulozitate, să obțină primele miligrame de clorură de radiu chimic pură, determinînd și masa atomică a noului element (226). Existența noului element a fost astfel, dovedită și din punctul de vedere al chimiștilor, deși confirmarea existenții acestui element fusese făcută încă din 1898 pe cale spectroscopică.

In iunie 1903, Marie Curie își susține la Sorbona teza de doctor în științele fizice cu tema: «Cercetări asupra substanțelor radioactive» obținînd mențiunea « foarte onorabil », iar în 1904, primește împreună cu Pierre Curie și Henry Becquerel, premiul Nobel pentru fizică.

Tocmai cînd avîntul în munca de cercetare era mai înalt și rezultatele obținute erau mai strălucite, Marie Curie își pierde soțul care este ucis (1906) într-un accident, fiind călcat de un camion pe cînd traversa o stradă. Ea n-a disperat însă; durerea și-o înnăbușe în munca de laborator și de profesor la Sorbona unde este numită la catedra ce fusese ocupată de Pierre Curie.

In 1912, Marie Curie primește din nou premiul Nobel pentru chimie, devenind astfel, prima deținătoare a două premii Nobel.

Marie Curie a lucrat în domeniul cercetărilor științifice — putem spune — pînă în ultimele clipe ale existenței sale, deoarece cu o săptămînă înainte de a muri era încă în plină activitate.

Fără a exagera se poate spune că Marie Curie a căzut la datorie, căci organismul său slăbit și vătămat din cauza nenumăratelor experiențe cu corpuri radioactive nu a putut să reziste bolii contractate.

Ultimele sale clipe au fost însă luminate nu numai de faptul că întreaga sa viaţă închinată ştiinţei a fost încununată de succese atît de strălucite, dar şi de faptul că fiica şi ginerele său, Irène şi Frederic Joliot-Curie vor duce mai departe opera începută de dînsa împreună cu soţul său.

RADIOACTIVITATEA ARTIFICIALĂ

Prof. univ. ALEXANDRU SANIELEVICI

Şef de Sector la Institutul de Fizică al Academiei R.P.R.

I. Introducere

IN ziua de 5 iulie 1954 s-au împlinit 20 de ani dela moartea Mariei Sklodowska-Curie, al cărei nume — alături de acela al lui Pierre Curie şi de acela al lui Henri Becquerel — a rămas legat pe veci de unul din cele mai însemnate evenimente ale istoriei ştiinţei: descoperirea radioactivităţii şi a elementelor radioactive *naturale*.

Frederic Joliot-Curie

Se împlinesc totodată, în acest an 1954, două decenii dela o descoperire la fel de importantă, consecinţă directă a celei dintîi: descoperirea radioactivităţii *artificiale*. De această cucerire a fizicii nucleare se leagă numele marelui savant şi fruntaş al Mişcării Mondiale pentru Pace, Frederic Joliot-Curie şi al soţiei sale Irène.

Articolul de faţă, consacrat radioactivităţii artificiale, apare cu prilejul dublei aniversări amintite mai sus. Am dori ca el să fie considerat, de aceea, ca un omagiu adus de revista noastră atît memoriei lui Pierre şi Marie Curie, cît şi marilor merite dobîndite de ginerile şi fica lor, prin strălucita lor muncă ştiinţifică şi prin activitatea lor socială închinată democraţiei şi păcii.

In cele ce urmează vom presupune că cititorul are cunoştinţe elementare cu privire la procesele radioactive şi la natura radiaţiilor emise de substanţele radioactive naturale. Vom reduce astfel, la strictul necesar partea introductivă, mulţumindu-ne să reamintim cîteva noţiuni esenţiale de care ne vom folosi tot timpul.

Procesele radioactive îşi au sediul în *nucleul* atomic [1]) şi sînt consecinţa *instabilităţii* lui care se manifestă prin *transmutaţii* spontane [2]) de diferite tipuri. La radioelementele naturale se cunosc două tipuri principale [3]) de transmutaţie: *dezintegrarea* prin emisie de raze α şi dezintegrarea prin emisie de raze β. In multe cazuri dezintegrările sînt însoţite de emisie de raze γ.

Procesele radioactive se desfăşoară *în timp* şi sînt guvernate de o lege *statistică* de o formă des întîlnită în fizică:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (1)$$

Dacă înţelegem prin N_0 numărul atomilor radioactivi de o anumită specie, existenţi la un moment iniţial $t = 0$, şi prin λ *constanta radioactivă* a speciei considerate, adică *probabilitatea individuală* a nucleelor de a se dezintegra în unitatea de timp, atunci ecuaţia (1) arată că la un moment t oarecare (după momentul iniţial) mai sînt «în viaţă» adică nedezintegraţi, N din cei N_0 atomi iniţiali.

Numărul e valorează 2,71828...

Se notează T şi se numeşte *timp de înjumătăţire* (unii autori folosesc termenul de *perioadă radioactivă*) intervalul de timp necesar cu N să devină egal cu $N_0/2$ (adică, să se înjumătăţească cantitatea iniţială de substanţă radioactivă). Se demonstrează că $\lambda = 0{,}69315/T$.

Mărimile λ şi T caracterizează speciile radioactive. Aşa de pildă, avem [4]):

Specia radioactivă	λ	T
$^{226}_{88}$Ra (radiu)	$4{,}38 \cdot 10^{-4}$ a^{-1}	1600 a
$^{222}_{86}$Rn (radon)	$0{,}1812 \cdot$ d^{-1}	3,825 d
$^{210}_{84}$Po (poloniu)	$5{,}88 \cdot 10^{-8}$ s^{-1}	$1{,}18 \cdot 10^{7}$ s

Razele α sînt constituite din nuclee de He în mişcare de translaţie foarte rapidă (viteze de ordinul 10^9 cm. s.$^{-1}$); razele β sînt analoage razelor catodice, adică sînt electroni (negativi) în mişcare: vitezele pot varia dela valori foarte mici (practic zero) pînă la valori foarte mari, peste 0,99 din viteza luminii ($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm.s^{-1}); razele γ sînt analoage cu razele X (Roentgen), adică sînt *lumină* (radiaţie electromagnetică) *invizibilă*, de lungimi de undă cuprinse aproximativ între 6500 şi 2 u.X. [5]).

---

[1]) Nucleul atomic este format din Z *protoni* şi $(A—Z)$ *neutroni*. Deci, numărul total de «nucleoni» (protoni şi neutroni) este $A - Z + Z = A$ *(număr de masă)*; Z este *numărul atomic* şi arată locul elementului în tabloul periodic al lui Mendeleev. A şi Z sînt numere întregi. O specie nucleară oarecare se poate reprezenta prin simbolul general $^{A}_{z}M$. Exemplu: $^{4}_{2}He$ (nucleu de heliu).

[2]) Aceasta înseamnă că nici un agent chimic sau fizic nu poate accelera, întîrzia sau modifica transmutaţia unei specii date de nuclee (atomi) radioactivi.

[3]) Lăsăm deoparte aşa numitele «tranziţii izomere» despre care vom avea prilejul să vorbim mai departe.

[4]) In tabelă, a = ani, d = zile, s = secunde. La fel: h = ore, min = minute.

[5]) Unitatea X (1 *u.X*) este curent folosită pentru măsura lungimilor de undă ale razelor Roentgen (X) şi $\gamma \cdot 1$ *u.X.* = 10^{-3} Å (Angström) = 10^{-11} cm.

Razele α, β şi γ, provoacă în mediile (substanţele) pe care le străbat diverse fenomene (fluorescenţă, ionizare, încălzire, procese chimice, etc.) mai mult sau mai puţin intense. Aici ne interesează însă, un alt efect de o deosebită importanţă, deşi relativ foarte puţin intens: *transmutaţia nucleară artificială* prin bombardament de particule.

II. Transmutaţii nucleare artificiale. Radioelemente artificiale

Prima transmutaţie artificială a fost obţinută în 1919; prin bombardarea gazului Azot [1]) se observa o emisie de protoni, adică de nuclee de hidrogen. Intrucît substanţa bombardată nu conţinea Hidrogen, apariţia protonilor liberi nu putea fi explicată decît dacă se admitea următoarea « reacţie nucleară »:

$$\underset{\text{nucleu de Azot}}{{}^{14}_{7}N} + \underset{\text{particulară } \alpha}{{}^{4}_{2}He} = \underset{\text{oxigen (izotop)}}{{}^{17}_{8}O} + \underset{\text{proton}}{{}^{1}_{1}H}$$

ceea ce se mai poate scrie pe scurt: ${}^{14}_{7}N\,(\alpha,\ p)\,{}^{17}_{8}O$. Aceasta înseamnă că un nucleu de Azot « captează » o particulă α şi emite numaidecît un proton, transmutîndu-se într-un nucleu de număr de masă 17 şi de număr atomic 8, adică, într-un *izotop* [2]) al elementului Oxigen. Acest izotop e stabil şi deci, există în natură, formînd 0,04% din pleiada Oxigen.

Experienţele de transmutaţie artificială prin bombardament de raze α au fost extinse apoi, şi asupra altor elemente. La elementele uşoare ($Z \leqslant 22$) s-a observat acelaşi proces de transmutaţie cu emisie de protoni. Toate speciile nucleare obţinute astfel sînt izotopi *stabili* ai unor elemente cunoscute. Iată cîteva exemple:

$${}^{10}_{5}B\,(\alpha,\ p)\,{}^{13}_{6}C;\quad {}^{19}_{9}F\,(\alpha,\ p)\,{}^{22}_{10}Ne;\quad {}^{20}_{10}Ne\,(\alpha,\ p)\,{}^{23}_{11}Na;$$

$${}^{23}_{11}Na\,(\alpha,\ p)\,{}^{26}_{12}Mg;\quad {}^{39}_{19}K\,(\alpha,\ p)\,{}^{42}_{20}Ca,\ \text{etc.}$$

In 1933, soţii Joliot-Curie au descoperit un fapt nou, cu totul neaşteptat. Dacă se bombardează aluminiul (${}^{27}_{13}Al$) cu particule α se produc în paralel *două* reacţii nucleare diferite: pe de o parte, o reacţie de tipul $(\alpha,\ p)$, care duce la formarea izotopului stabil ${}^{30}_{14}Si$, (3,05% din pleiada siliciului); pe de altă parte, o reacţie care se desfăşoară după schema

$${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He = {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n$$

adică, pe scurt:

$${}^{27}_{13}Al\,(\alpha,\ n)\,{}^{30}_{15}P.$$

Această a doua reacţie nucleară prezintă două particularităţi: în locul unui proton este emisă o particulă de masă aproximativ egală, dar de sarcină

---

[1]) Se foloseau particule α foarte energice (energie 7,7 MeV) emise de radiul C', care este izotopul de număr de masă 214 al Poloniului ($Z = 84$). Amintim că unitatea de energie MeV (megaelectronvolt) = 10^6eV (electronvolt). 1eV = $1{,}6.10^{-12}$ ergi = $3{,}83.10^{-20}$ cal.

[2]) Sînt « izotopi » speciile atomice (nucleare) care au acelaşi număr atomic Z şi numere de masă diferite. Elementele chimice sînt în genere, amestecuri în proporţii definite şi constante de 2 sau mai mulţi izotopi. Termenul « pleiadă de izotopi » este echivalent cu termenul « element chimic ».

electrică nulă, adică un neutron [1]); nucleul format corespunde unei specii atomice *inexistente în natură* [2]), un fosfor radioactiv de număr de masă 30, care se dezintegrează cu un timp de înjumătățire $T = 2{,}55$ min., prin emisie de electroni *pozitivi* (pozitroni, raze β^+), dînd același ${}^{30}_{14}Si$ stabil, care rezultă direct prin reacția (α, p). Așadar, *avem posibilitatea de a sintetiza izotopi radioactivi ai pleiadelor stabile, existente în natură și de a crea totodată, tipuri noi de transmutații*, de pildă în cazul de față, dezintegrarea prin emisie de raze β^+.

Reacții (α, n) cu formare de izotopi radioactivi artificiali au fost obținute de soții Joliot-Curie și la următoarele elemente:

${}^{10}_{5}B\,(\alpha, n)\,{}^{13}_{7}N$, *radioazot* [3]) emite β^+, $T = 10$ min.

${}^{24}_{12}Mg\,(\alpha, n)\,{}^{27}_{14}Si$, *radiosiliciu* [4]) emite β^+, $T = 4{,}92$ s.

In urma acestor rezultate, soții Joliot-Curie au prespus că «și alți izotopi radioactivi necunoscuți ai elementelor stabile ar putea fi obținuți prin acțiunea diverselor particule folosite la transmutații: raze α, protoni, deutoni, neutroni» (F. Joliot și Irène Curie, Radioactivite artificielle, Paris 1935, pag. 20). Urmînd această presupunere, numeroși experimentatori din lumea întreagă au atacat problema și în scurt timp au descoperit un șir de alți radioizotopi artificiali.

Astfel, ${}^{14}_{7}N$, prin reacție (α, n), dă ${}^{17}_{9}F$, pozitogen [5]) cu $T = 66$ s. Prin aceeași reacție ${}^{23}_{11}Na$ dă ${}^{26}_{13}Al$, pozitogen cu $T = 6{,}56$ s; ${}^{31}_{15}P$ dă ${}^{34}_{17}Cl$, pozitogen cu $T = 33$ min.; ${}^{19}_{9}F$ dă ${}^{22}_{11}Na$, pozitogen cu $T = 2{,}6$ *a*, etc.

Cantitățile de radioizotopi artificiali, care se pot obține prin reacții nucleare cu raze α naturale sînt însă extrem de mici, din următoarele două motive:

1. *Intensitatea* fascicolelor de raze α emise de radioelementele naturale este foarte mică, pentru că aceste elemente sînt ele însele disponibile în cantități mici. Așa de pildă, un gram de radiu reprezintă o cantitate însemnată, de care dispun relativ puține laboratoare de cercetare. Ori, un gram de radiu emite pe secundă cel mult $18{,}6 \cdot 10^{10}$ particule α [6]), ceea ce corespunde unei intensități totale de circa 0,06 *microamperi* [7]).

---

[1]) Neutronul ${}^{1}_{0}n$ fusese descoperit în perioada 1930—32 ca rezultat al lucrărilor lui Bothe și Becker, soții Joliot-Curie și J. Chadwick, asupra reacției nucleare

$${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He = {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n$$

în care Beriliul se transmută în Carbon stabil prin adiția unui nucleu de Heliu ușor $({}^{3}_{2}He)$ și este emis un neutron.

[2]) Fosforul natural este format dintr-un unic izotop ${}^{31}_{15}P$.

[3]) Pleiada naturală a Azotului este formată din izotopii ${}^{14}N$ (99,62%) și ${}^{15}N$ (0,38%).

[4]) Pleiada naturală a Siliciului este formată din izotopii

$${}^{28}Si\ (92{,}16\%),\ {}^{29}Si\ (4{,}71\%)\ \text{și}\ {}^{30}Si\ (3{,}13\%).$$

[5]) Adică emițător de raze β^+ (pozitroni).

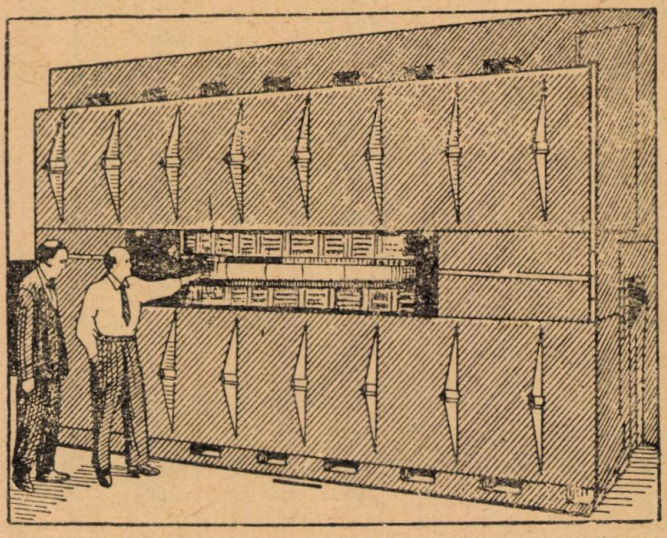
[6]) In cazul cînd elementul *Ra* însoțit de *toate* elementele radioactive care iau naștere direct sau indirect, prin dezintegrarea sa.

[7]) Intensitatea unui fascicol de particule încărcate se poate exprima în unități de curent, deoarece sarcinile electrice în mișcare constituie un curent electric.

2. *Probabilitatea* unei reacţii nucleare prin bombardament cu particule α e foarte mică, pentru că aceste particule pătrund greu în nucleu.

In adevăr, nucleul fiind încărcat pozitiv, *respinge* particulele α, ele însele pozitive. Acest fapt se mai poate exprima în modul următor: *nucleul atomic este apărat* împotriva pătrunderii vreunei particule α (şi în general, a unei particule pozitive), *de o « barieră de potenţial »* electric.

Inălţimea barierei de potenţial care apără un nucleu depinde pe de o parte de natura nucleului (adică de numărul lui atomic Z), pe de altă parte, de natura particulei pozitive cu care îl bombardăm: particule α, protoni, deutoni. Cu cît Z este mai mare şi cu cît sarcina proiectilului este mai mare, cu atît probabilitatea pătrunderii în nucleu este mai mică. Va fi deci, avantajos să folosim protoni şi deutoni [1]) (sarcină e) [2]) în loc de particule α (sarcina $2e$), pentru transmutarea nucleelor grele (Z mare).



Infăţişarea exterioară a unui betatron

Pe de altă parte, probabilitatea reacţiei nucleare depinde şi de energia proiectilului; aceasta la rîndul ei depinde de masă şi de viteză.

In sfîrşit, este limpede că neutronii a căror sarcină este nulă, vor pătrunde cel mai lesne în nuclee, pentru că bariera de potenţial nuclear este inexistentă faţă de ei.

Cele spuse arată căile care au fost urmate pentru dezvoltarea cercetărilor asupra radioactivităţii artificiale, prin înmulţirea sintezelor de radioizotopi şi prin mărirea randamentului reacţiilor nucleare de sinteză:

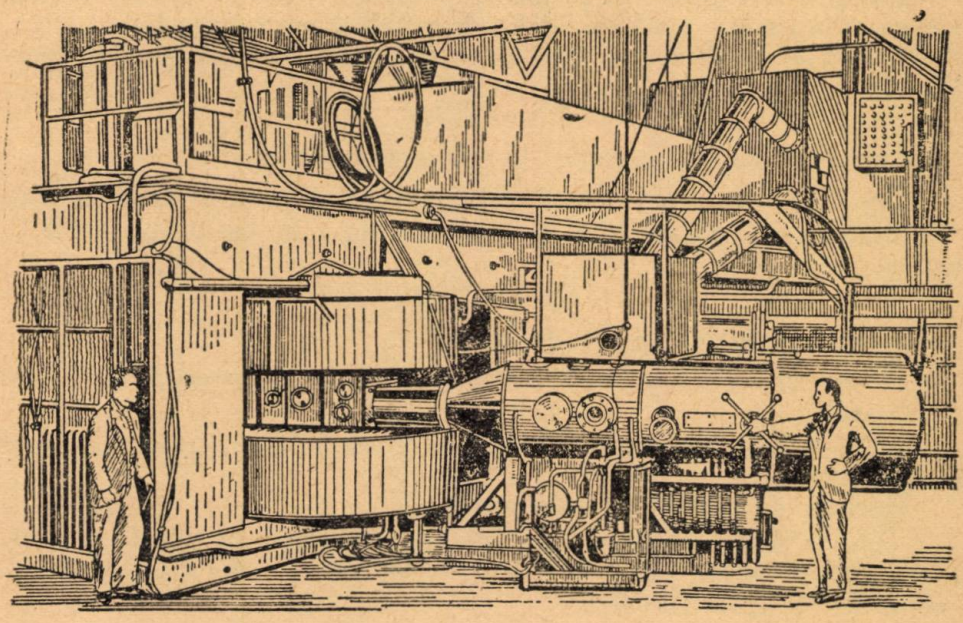
a) Mărirea *intensităţii* şi *enrgiei* fascicolelor de ioni pozitivi (He^{++}, H^{+}, D^{+}) sau electroni, prin folosirea unor maşini speciale, capabile de a *accelera*

---

[1]) *Deutonul d*, este nucleul izotopului ${}^{2}_{1}D$ (deuteriu) al Hidrogenului. Deuteriul se mai numeşte curent şi « Hidrogen greu ». Combinaţia chimică D_2O este « apa grea », prin analogie cu H_2O (apa obişnuită).

[2]) Cuantumul elementar de sarcină, $e = 4{,}8025 \cdot 10^{-10}$ u.e.s. (CGS).

aceste particule încărcate, pînă la viteze foarte mari. Asemenea, maşini acceleratoare (pe scurt: *acceleratori*) au fost inventate şi perfecţionate în număr însemnat, în cursul ultimilor 20 ani. Principalele tipuri de acceleratori folosiţi actualmente sînt: *generatorul electrostatic* şi *ciclotronul* pentru ionii pozitivi; *betatronul* şi *sincrotronul* pentru electroni; *sincrociclotronul* (sau *fazotron*) pentru protoni, deutoni şi particule α de energii relativiste [1]); *bevatronul* (sau *cosmotronul*) pentru protoni de energii pînă la 3 miliarde (bilioane) de electron-volţi ($1\ BeV = 10^3 MeV = 10^9 eV$); *acceleratori lineari*, pentru ioni



Vedere generală a unui ciclotron

pozitivi şi pentru electroni. Descrierea principiului şi a realizării practice a acestor maşini ar cere foarte mult loc şi iese de aceea din cadrul articolului de faţă [2]).

b) Folosirea ca proiectil nuclear a neutronului, care, pentru motivul arătat mai sus, pătrunde cel mai uşor în nucleu.

Să vedem acum, ce s-a realizat efectiv pe aceste căi diferite.

---

[1]) Numim particulă «relativistă» o particulă care se mişcă cu viteze comparabile cu viteza luminii, astfel că masa ei nu mai poate fi considerată constantă, ci variază în funcţie de viteză. Energia cinetică a unor asemenea particule nu poate fi calculată cu ajutorul formulei «clasice» $mv^2/_2$, ci cu o formulă în care se ţine seama de raportul dintre viteza particulei şi viteza luminii.

[2]) Cititorul poate consulta: M. I. Corsunski, Nucleul Atomic. Ed. Tehnică 1952, Cap. VI.

III. Reacţii nucleare cu ioni pozitivi, accelerați

Experienţele de transmutaţii nucleare prin bombardament de particule pozitive, accelerate, au fost iniţiate în 1934; au fost stabilite următoarele tipuri de reacţii care pot produce substanţe radioactive artificiale:

$$(\alpha, d);\quad (\alpha, p);\quad (\alpha, n).$$
$$(p, \alpha);\quad (p, d);\quad (p, n);\quad (p, \gamma).$$
$$(d, \alpha);\quad (d, p);\quad (d, n).$$

Reacţiile subliniate produc *numai* substanţe radioactive; celelalte dau naştere şi la izotopi stabili (naturali), de care însă, nu ne ocupăm aici.

1. *Reacţia* (α, d) are ca rezultat alipirea unui deuton la nucleul bombardat:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A+2}_{Z+1}M'$$

Nu e cunoscut decît un exemplu de reacţie de acest tip:

$^{32}_{16}S \rightarrow {}^{34}_{17}Cl$ (*radioclor*, $T = 33$ min. Prin dezintegrare β^+ trece în $^{34}_{16}S$).

2. *Reacţia* (α, p) revine la încorporarea unui nucleu de tritiu $^{3}_{1}H$ în nucleul ţintă:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A+3}_{Z+1}M'.$$

Dintre exemplele care se pot da, citãm:

$^{67}_{30}Zn \rightarrow {}^{70}_{31}Ga$ (*Radiogaliu*, $T = 20{,}3$ min. Se dezintegrează prin β^- dînd $^{70}_{32}Ge$ stabil).

$^{108}_{46}Pd \rightarrow {}^{113}_{47}Ag$ (*radioargint*, $T = 5{,}3$ h. Trece în $^{113}_{48}Cd$, stabil, prin dezintegrare β^-).

Deosebit de importantă este reacţia:

$^{145}_{60}Nd \rightarrow {}^{148}_{62}Pm$ care duce la sinteza unui izotop al pleiadei $Z = 61$. *(Prometiu) necunoscută în natură.* Acest izotop are $T = 5{,}3$ *d* şi prin dezintegrare β^- dă $^{148}_{62}Sm$ (stabil).

3. *Reacţia* (α, n). Această reacţie, care revine la incorporarea unui nucleu de Heliu uşor $(^{2}_{3}He)$ în nucleul ţintă, este deosebit de importantă pentru că ea a dus — aşa cum am arătat la paragraful II — la sinteza primelor radioelemente artificiale. Reacţia a putut fi extinsă la nuclee grele prin utilizarea particulelor α (ioni He^{++}) accelerați la energii mari.

La exemplele citate vom adăuga reacţia:

$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{241}_{94}Pu$, prin care se obţine un izotop al pleiadei $Z = 94$ *(Plutoniu) necunoscută în natură.* Acest izotop are un timp de înjumătăţire $T = 10$ *a* şi prin dezintegrare β^- se transmută în $^{241}_{95}Am$ *(Americiu)* izotop al pleiadei $Z = 95$. La rîndul lui, $^{241}_{95}Am$ ($T = 500$ *a*) suferă o dezintegrare α şi trece în $^{237}_{93}Np$ *(Neptuniu).*

Pe de altă parte, pornindu-se dela $^{239}_{94}Pu$ [1]) se obţine prin reacţia (α, n) izotopul $^{242}_{96}Cm$ (Curium) [2]) al pleiadei $Z = 96$.

---

[1]) Acest izotop al elementului 94 se obţine de pildă, prin dezintegrarea β^- a izotopului $^{239}_{93}Np$. Pentru sinteza acestuia vezi reacţie (n, γ) paragraful IV.

[2]) $T = 150$ d. Este α activ.

Elementele 93, 94, 95, 96, ... situate la dreapta Uraniului în tabloul periodic al lui Mendeleev sînt în întregime artificiale. Li se dă numele de elemente «transuranice»[1]) sau «actinide», pentru a se ține seama de marea analogie a proprietăților chimice, care le apropie de elementul *actiniu* (*Ac*, $Z = 89$), împreună cu care constituie al 2-lea grup de «pămînturi rare». (Se știe că primul grup de pămînturi rare este acela al «lantanidelor», care începe cu *lantanul* (*La*, $Z = 57$) și se termină cu *lutețiul* (*Lu*, $Z = 71$).

4. *Reacția* (p, α) este o reacție de «desinteză», care dă nuclee radioactive cu număr de masă cu 3 unități și număr atomic cu 1 unitate mai mic decît la nucleul inițial:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A-3}_{Z-1}M'$$

Se cunosc numai 3 cazuri concrete:

$^{10}_{5}B \rightarrow {}^{4}_{7}Be$ (care prin *captură* K[2]) se transmută în $^{7}_{3}Li$ stabil. $T = 53$ *d*).

$^{11}_{5}B \rightarrow {}^{8}_{4}Be$ (care prin emisie α se transmută în $^{4}_{2}He$ stabil. $T = 10^{-17}$ s).

$^{14}_{7}N \rightarrow {}^{11}_{6}C$ (care prin emisie β^+ se transmută în $^{11}_{5}B$ stabil. $T = 21$ min.).

5. Reacția (p, d) dă izotopi radioactivi artificiali ai substanței bombardate:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A-1}_{Z}M$$

Nu se cunoaște decît *un* singur exemplu concret al acestui tip de reacție: $^{9}_{4}Be \rightarrow {}^{8}_{4}Be$ (vezi mai sus. Rezultă că unul și același radioelement artificial poate fi obținut prin *diferite* reacții nucleare).

6. *Reacția* (p, n) dă substanțe radioactive artificiale *izobare*[3]) cu substanța bombardată de un număr atomic mai mare cu 1:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A}_{Z+1}M'$$

Exemple:

$^{7}_{3}Li \rightarrow {}^{7}_{4}Be$ (vezi mai sus, punctul 1).

$^{40}_{18}A \rightarrow {}^{40}_{19}K$ (timpul de înjumătățire a acestui *radiopotasiu* este $T = 14{,}2.10^{3}a$. O parte a nucleelor formate se dezintegrează prin β^- dînd $^{40}_{20}Ca$ (stabil), restul se transmută prin captură K în $^{40}_{18}A$, adică în substanța inițială).

$^{87}_{37}Rb \rightarrow {}^{87}_{38}Sr$ (*radiostronțiu*, cu timp de înjumătățire $T = 2{,}75$ h). El este caracterizat de faptul că emite numai raze γ, transmutîndu-se astfel în $^{87}_{38}Sr$ stabil. Avem aici două nuclee *identice* prin numărul lor de masă și numărul lor atomic (deci, izotope și izobare) și care diferă *numai* prin *stabilitatea* lor. *Două nuclee identice, cu excepția stabilității, se numesc «izomeri nucleari»*. Cazurile de izomerie nucleară actualmente cunoscute sînt numeroase. Trecerea dela izomerul mai puțin stabil la unul mai stabil se face prin emisie de cuante γ și se numește «tranziție izomerică». Iată, prin urmare, încă un tip de proces radioactiv.

---

[1]) Actualmente sînt cunoscute cu certitudine elementele 93, 94, 95, 96, 97 (*Bk*, Berkeliu) și sînt *probabile* elementele 98 (*Cf.*, *Californiu*), 99 (*An*, *Ateniu*) și 100 (*Ct*, *Centiu*). Sînt *teoretic posibile* elementele pînă la $Z = 125$.

[2]) Prin captură K, unul din cei doi electroni, cei mai apropiați de nucleu, este «captat» (înghițit) de nucleu. Acesta este deci, un nou tip de transmutație radioactivă pe lîngă cele cunoscute pînă aici.

[3]) Două nuclee (cu Z diferit) sînt izobare, dacă au același număr de masă A.

7. *Reacția* (p, γ) este o reacție de «captură simplă»; particula incidentă e înghițită de nucleu, care se transmută după schema:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A+1}_{Z+1}M',$$

iar prisosul de energie este emis sub forma unei cuante γ. Exemple:

$^{7}_{3}Li \rightarrow {}^{8}_{4}Be$ (vezi punctul 4).

$^{60}_{28}Ni \rightarrow {}^{61}_{29}Cu$ (acest *radiocupru* are un timp de înjumătățire $T = 3{,}4$ *h*. O parte din nucleele lui se dezintegrează prin β^+, iar restul se transmută prin captură *K*. Rezultă pe ambele căi $^{61}_{28}Ni$, izotop stabil al nichelului. Precum se vede, o dezintegrare pozitogenă și o captură *K* sînt *echivalente* din punct de vedere al nucleului final).

8. *Reacția* (d, α) are ca rezultat final, eliminarea unui deuton din nucleul bombardat, care se transmută deci, după schema:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A-2}_{Z-1}M'$$

Exemple:

$^{20}_{10}Ne \rightarrow {}^{18}_{9}F$ (care prin dezintegrare pozitogenă și prin captură *K* trece în $^{18}_{8}O$, stabil. Timp de înjumătățire $T = 107$ min.).

$^{26}_{12}Mg \rightarrow {}^{24}_{11}Na$ (care cu un timp de înjumătățire $T = 14{,}8$ *h* trece, prin dezintegrare β^- în $^{24}_{12}Mg$ stabil).

$^{34}_{16}S \rightarrow {}^{32}_{15}P$ (care are $T = 14{,}3$ *d*, dezintegrîndu-se prin β^- în $^{32}_{16}S$ stabil).

9. *Reacția* (d, p) revine la alipirea unui neutron la nucleul bombardat, formîndu-se un izotop superior al acestuia:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A+1}_{Z}M$$

Exemple:

$^{23}_{11}Na \rightarrow {}^{24}_{11}Na$ (vezi punctul 8).

$^{40}_{20}Ca \rightarrow {}^{41}_{20}Ca$ ($T = 8{,}5$ *d*. Prin captură *K* trece în $^{41}_{19}K$ stabil).

$^{63}_{29}Cu \rightarrow {}^{64}_{29}Cu$ ($T = 12{,}8$ *h*. O parte a nucleelor se dezintegrează prin β^- dînd $^{64}_{30}Zn$ stabil; restul se dezintegrează prin β^+ sau se transmută prin captură *K*, dînd $^{64}_{28}Ni$ stabil).

10. *Reacția* (d, n) care se reduce la alipirea unui proton la nucleul bombardat:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A+1}_{Z+1}M'$$

și este deci echivalentă, din punct de vedere al produsului reacției, cu reacția (p, γ) (vezi punctul 7).

Exemple, printre altele:

$^{10}_{5}B \rightarrow {}^{11}_{6}C$ (care cu $T = 20{,}4$ min. se dezintegrează prin β^+ dînd $^{11}_{5}B$).

$^{48}_{20}Ca \rightarrow {}^{49}_{21}Sc$ (*radioscandiu*, $T = 57$ min. Se dezintegrează prin β^-, dînd $^{49}_{22}Ti$).

$^{53}_{24}Cr \rightarrow {}^{54}_{25}Mn$ (*radiomangan*, $T = 310$ *d*. Se transmută prin captură *K* în $^{54}_{24}Cr$).

$^{94}_{42}Mo \rightarrow {}^{95}_{43}Tc$. Această reacție deosebit de interesantă a dus la sinteza *elementului* 43 (Tecneţiu), necunoscut în natură. Izotopul 95 *Tc* are $T = 56$ *d* şi prin dezintegrare β^+ şi captură *K* trece în $^{95}_{42}Mo$.

IV. Radioelemente artificiale prin reacţii cu neutroni

Am văzut că reacţiile nucleare cu neutroni sînt favorizate de faptul că bariera de potenţial nuclear nu există pentru neutroni, oricît de mare ar fi numărul atomic al elementului bombardat. Prin urmare, avem posibilitatea de a transmuta uşor chiar şi elementele cele mai grele, greu de atacat cu particule încărcate, oricît de energice.

O altă împrejurare favorabilă e faptul că oricît de mică ar fi energia neutronilor incidenţi, ei pot provoca transmutaţii nucleare.

Principalele tipuri de reacţii cu neutroni sînt cele de mai jos.

1. *Reacţii* (n, γ). Dacă se lucrează cu neutroni lenţi [1]) aceştia sînt captaţi şi noul nucleu apare în stare *excitată*, adică cu un prisos de energie faţă de starea normală a ucleului $^{A+1}_{Z}M$ format. Starea de excitaţie încetează prin emisia unei cuante γ, schema procesului fiind deci,

$$^{A}_{Z}M + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{A+1}_{Z}M + \gamma$$

Precum se vede, reacţiile de simplă captură a neutronului duc la un izotop superior al elementului bombardat. Exemple concrete pot fi date în foarte mare număr. Încă în 1934, *E. Fermi* a obţinut prin această reacţie peste 40 de izotopi radioactivi ai elementelor stabile, de la cele mai uşoare la cele mai grele. Iată cîţiva din aceşti izotopi:

$^{19}_{9}F \rightarrow {}^{20}_{9}F$ ($T = 12$ s.; prin dezintegrare β^- se transmută în $^{20}_{10}Ne$).

$^{31}_{15}P \rightarrow {}^{32}_{15}P$ (vezi paragraful precedent, punctul 8, reacţia *d*, α).

$^{63}_{29}Cu \rightarrow {}^{64}_{29}Cu$ (vezi reacţia (d, p) punctul 9, paragraful precedent).

$^{112}_{50}Sn \rightarrow {}^{113}_{50}Sn$ ($T = 105$ *d*. Prin captură *K* trece în $^{113}_{49}In$).

Deosebit de importantă este însă, reacţia:

$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{92}U$ pentru că, acest izotop artificial al uraniului, dezintegrîndu-se prin β^- cu $T = 23{,}31$ min., se transmută în izobarul de număr atomic 93, (*Np.*). $^{239}_{93}Np$ este el însuşi radioactiv prin emisie β^- ($T = 2{,}33$ *d*), astfel că se transmută în $^{239}_{94}Pu$ ($T = 24110$ *a*) care prin dezintegrare α dă $^{235}_{92}U$ (existent în natură).

2. *Reacţii* (n, p). Se formează izobari ai nucleelor bombardate, cu număr atomic scăzut cu 1:

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A}_{Z-1}M'$$

Exemple:

$^{32}_{16}S \rightarrow {}^{32}_{15}P$ (vezi punctul 1 mai sus).

$^{70}_{32}Ge \rightarrow {}^{70}_{31}Ga$ ($T = 20{,}3$ min. Prin dezintegrare β^- trece în $^{70}_{32}Ge$).

3. *Reacţii* (n, α). Schema acestor reacţii este

$$^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A-3}_{Z-2}M'$$

---

[1]) Zişi şi «termici» pentru că vitezele lor sînt de ordinul vitezelor de agitaţie termică la temperatura obişnuită.

Exemple:

${}^{6}_{3}Li \rightarrow {}^{3}_{1}H$ (se obţine izotopul supragreu al Hidrogenului, numit *Tritiu*, care prin dezintegrare β^- cu $T = 12,46$ *a* trece în *Heliu uşor*, ${}^{3}_{2}He$).

${}^{79}_{35}Br \rightarrow {}^{76}_{33}As$ (*radioarsen* $T = 26,75$ *h*. Prin dezintegrarea β^- dă ${}^{76}_{34}Se$ stabil).

${}^{127}_{53}J \rightarrow {}^{124}_{51}Sb$ (*radiostibiu* $T = 60$ *d*. Prin deintegrare β^- dă nucleul instabil ${}^{124}_{52}Te$, care prin tranziţie izomerică, cu $T = 1200$ microsecunde, trece în izomerul stabil ${}^{124}_{52}Te$).

Pentru a efectua reacţii nucleare cu neutroni, trebuie evident, să dispunem de «surse» emiţătoare de neutroni liberi. Cea mai simplă dintre aceste surse este aceia care a fost folosită de Fermi şi de primii săi continuatori şi care se bazează pe reacţia nucleară [1])

$$ {}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n. $$

Practic, această sursă de neutroni se prezintă ca un tubuşor de sticlă sau metal, în care se închide un amestec intim de pulbere fină de Beriliu şi de sare (clorură, bromură) de Radiu. Debitul sursei depinde de cantitatea de *Ra* şi de raportul ponderal între *Be* şi *Ra*. Astfel de pildă, un amestec de 1 g *Ra* şi 5 g *Be* dă circa 10^7 neutroni pe secundă. Desigur, aceasta reprezintă o sursă slabă, dar suficientă totuşi, pentru a obţine cantităţi de radioizotopi utilizabile pentru cercetarea ştiinţifică.

Dezvoltarea tehnicii nucleare în ultimii 20 de ani, a pus la dispoziţia cercetătorilor surse de neutroni din ce în ce mai intense. Cea mai puternică este aşa-numita «pilă atomică» (mai corect, *reactor nuclear*), în care se petrece procesul de *fisiune* a nucleelor elementelor grele. Sîntem astfel conduşi să ne ocupăm, pe scurt, de acest proces extrem de important şi pentru motivul că permite *liberarea* unei părţi considerabile a *energiei nucleare*.

V. Radioizotopi artificiali prin fisiunea nucleelor grele

In cursul experienţelor de bombardare cu neutroni a elementelor grele în vederea obţinerii elementelor transuranice, a fost descoperit un nou tip de transmutaţie nucleară: *fisiunea* (spargerea) nucleelor (de *U*, *Th*, *Pa*, *Pu*) în *două fragmente* de mase mijlocii, plus un oarecare număr de *neutroni*. Schema generală a procesului de fisiune poate fi scrisă în modul următor:

$$ {}^{A}_{Z}M + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{A'}_{Z'}M + {}^{A''}_{Z''}M + K\,{}^{1}_{0}n + W $$

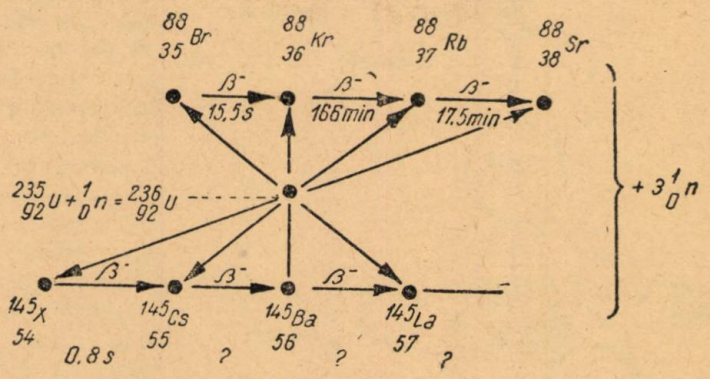
unde W este energia nucleară liberată. Legea conservării masei dă $A = A' + A'' + (k - 1)$, legea conservării sarcinii dă $Z = Z' + Z''$. Energia pe care trebuie să o aibă neutronii «primari» (incidenţi), pentru a produce fisiunea nucleelor foarte grele este 5—7 *MeV*.

Fragmentele de mase mijlocii sînt izotopi radioactivi ai elementelor de număr atomic cuprins între aproximativ $Z = 30$ *şi* $Z = 63$. Timpul de înjumătăţire a acestor izotopi radioactivi artificiali este cuprins între aproximativ 1 s şi 1 an. In general, ei se dezintegrează prin emisie de raze β^- şi se

[1]) Vezi nota 1) pag. 223.

înlănţuesc în «serii», pînă cînd ultima dezintegrare a lanţului dă un izotop stabil.

Unul şi acelaşi nucleu greu se poate fisiona în perechi de fragmente mijlocii, deosebite. Ca exemplu, vom arăta în schema de mai jos, felul multiplu în care se fisionează nucleul $^{235}_{92}U$.



Precum se vede, fisiunea liberează trei neutroni pentru fiecare pereche de fragmente de fisiune. Acestea sînt izotopi ai pleiadelor 35...38 şi 54...57. Ei se înlănţuie într-o dublă serie de izobari printr-o succesiune de dezintegrări β^-. In seria de sus, nucleul $^{88}_{38}Sr$ este stabil (82,74% din pleiada stronţiului). In seria de jos, $^{145}_{57}La$, ca şi cele două nuclee premergătoare, au timpi de înjumătăţire foarte scurţi însă nu măsuraţi cu precizie.

Fisiunea nucleului $^{236}_{92}U$ degajă o energie de circa 200 *MeV*. Pe de altă parte, faptul că fiecare nucleu fisionat emite în medie, 2—3 neutroni liberi, duce — în condiţiile arătate mai jos — la desfăşurarea unei «reacţii în lanţ», în care numărul nucleelor fisionate creşte în progresie geometrică (de ex: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, etc.). Astfel, procesul de fisiune iniţiat prin despicarea chiar a unui singur nucleu se propagă cu o viteză fulgerătoare în toată masa de «explosiv nuclear», liberînd dintr-o dată o cantitate de energie (căldură), uriaşă: acesta este principiul bombei atomice (nucleare).

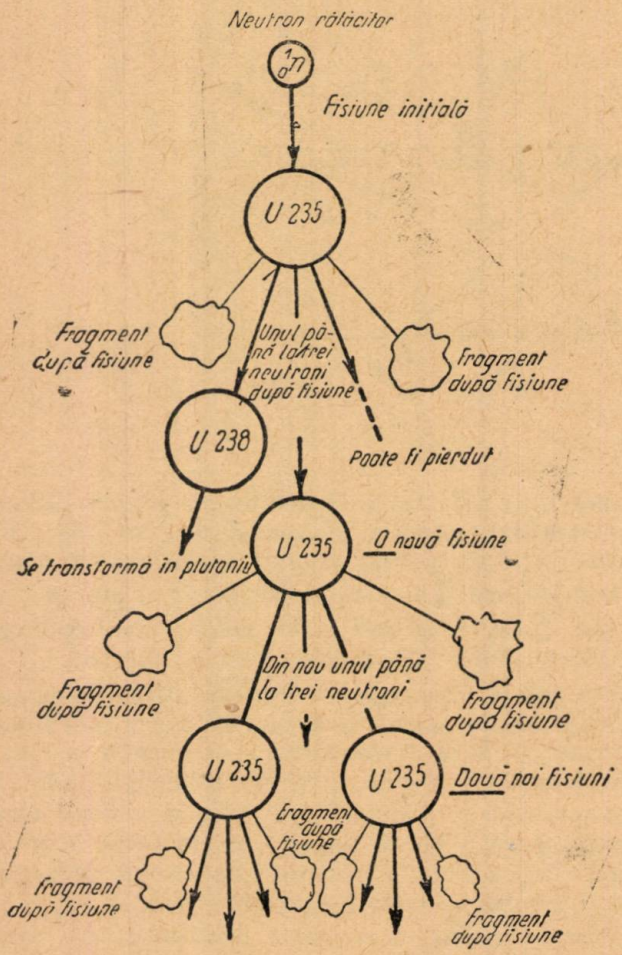
Condiţiile pentru ca reacţia în lanţ să se poată desfăşura, sînt următoarele:

1° Explozivul nuclear să conţină o concentraţie suficientă de izotop ^{235}U. Uraniul obişnuit conţinînd numai 0,71% izotop 235, este necesară o prealabilă «îmbogăţire» a materialului în acest izotop. Descrierea metodelor folosite în ccest scop ar depăşi cadrul articolului de faţă.

2° Masa de uraniu îmbogăţit în izotop 235 trebuie să depăşească o anumită «masă critică».

3° Neutronii emişi cu viteze mari din nucleele fisionate trebuie încetiniţi pînă la viteze de 400—600 $m.s^{-1}$ (neutroni termici, singurii capabili de a produce fisiunea). Aceasta se realizează cu ajutorul unor substanţe «moderatoare»: apă grea (D_2O), parafină cu hidrogen greu, grafit (carbon).

Viteza reacţiei în lanţ poate ea însăşi fi reglată pînă la zero, cu ajutorul unor substanţe (*Bor* sau *Cadmiu)* cu mare putere de captare pentru neutroni lenţi şi datorită cărora numărul neutronilor disponibili pentru despicarea materialului fisionabil, poate fi micşorat după voie.



Schema fisiunii în lanţ a nucleului de uraniu

Dispozitivele în care procesul de fisiune se poate face în *mod controlat* pe baza principiului de mai sus, se numesc «pile atomice» sau mai corect «reactori nucleari». In aceste dispozitive, în loc de explozie nucleară se petrece ceea ce putem numi o «ardere» nucleară, prin analogie cu oxidarea treptată a unui combustibil. Energia liberată poate fi utilizată (sub formă de căldură), de pildă, pentru acţionarea unei turbine cu aburi, cuplată cu un generator de curent: avem astfel, o «centrală atomo-electrică».

In U.R.S.S. la 27 iunie 1954 a fost dată în exploatare prima centrală electrică atomică din lume. Centrala atomo-electrică a început să furnizeze dela această dată curentul electric pentru industria şi agricultura raioanelor învecinate. S-a făcut astfel un pas real pe calea folosirii paşnice a energiei atomice.

Dar ceea ce e important din punctul de vedere al radioactivităţii artificiale este că reactorii nucleari constituie surse foarte intense de neutroni; spre pildă, o pilă cu uraniu de putere 1 kW, în care fiecare nucleu produce în mijlociu, 2 neutroni, emite 6.10^{13} neutroni pe secundă. Se înţelege lesne că în aceste condiţii se pot obţine cantităţi mari de izotopi radioactivi artificiali.

VI. Cîteva aplicaţii ale radioactivităţii artificiale

Din cele peste 1000 specii atomice naturale şi artificiale, azi cunoscute, mai bine de două treimi sînt radioactive. Existenţa unui număr atît de mare

de izotopi radioactivi ai elementelor sistemului periodic a permis lărgirea într-o măsură considerabilă a domeniului aplicațiilor științifice și tehnice ale radioactivității. Pentru exemplificare, vom arăta în articolul de față cîteva utilizări în medicină și fiziologie.

Se știe că organele corpului omenesc asimilează în mod selectiv, diversele elemente chimice. Dacă prin urmare, vom introduce în corp un izotop radioactiv determinat, el se va fixa mai ales într-un anumit organ. Acesta va fi supus acțiunii directe a radiației radioizotopului care — dacă *dozarea* a fost făcută în mod corect — va produce asupra organului (bolnav) efecte *curative* (de însănătoșire).

Se folosește astfel, radiosodiul $^{24}_{11}Na$ (vezi reacțiile *d*, α și *d*, *p*) cu care se prepară clorură de sodiu (sare de bucătărie) radioactivă. Ea servește la tratamentul anumitor boli de stomac și intestinale.

Glanda tiroidă fixează și acumulează iodul din sînge; această funcție fiziologică normală devine exagerată în boala numită «gușă» (hipertrofie tiroidiană). Prin administrare de iodură de sodiu preparată cu radioiod ($^{124}_{53}J$ sau $^{126}_{53}J$) poate fi restabilită funcția normală a glandei tiroide și deci, vindecarea bolnavului.

Fosforul se fixează în primul rînd, în organele «hematopoietice» (măduva spinării, etc.) care generează globulele roșii ale sîngelui. Dacă se introduce în organism un compus de fosfor care conține și fosfor radioactiv, de ex. $^{32}_{15}P$, atunci radiația β^- emisă de acest izotop are acțiune curativă asupra modificărilor patologice ale sîngelui, cum ar fi în special, *leucemia* (adică, creșterea exagerată a numărului globulelor albe față de cele roșii).

Să trecem acum la alte aplicații, medicale, bazate pe folosirea metodei zisă a *indicatorilor radioactivi*.

Se cunoaște importanța deosebită în medicină și chirurgie, a transfuziilor de sînge. Adesea transfuziile se fac cu sînge conservat (în care s-au adăugat mici cantități de anumite substanțe care împiedică coagularea sîngelui). Pentru ca o transfuzie să-și ajungă scopul, trebuie ca sîngele injectat să rămînă în circulație cît mai mult timp posibil, ceea ce depinde de calitatea conservării. Pentru a judeca deci, dacă transfuzia e sau nu izbutită, trebuie să putem deosebi între sîngele bolnavului și sîngele injectat. In acest scop, în momentul luării sîngelui dela donator, i se injectează acestuia, o mică doză de citrat de amoniu și fier, preparat cu fier radioactiv ($^{59}_{26}Fe$) al cărui timp de înjumătățire este $T = 46$ zile. Fierul radioactiv se fixează în hemoglobina donatorului care devine ea însăși radioactivă. Dacă sîngele (conservat) radioactiv s-a păstrat în bune condiții, atunci, după 48 de ore de la transfuzie, cel puțin 70% din hemoglobina injectată trebuie să mai fie prezentă în circulația sanguină a bolnavului, lucru care se determină ușor prin măsurarea radioactivității sîngelui acestuia.

O altă problemă medicală foarte importantă este aceia a asimilării și eliminării *vitaminelor* în corpul omului. Pentru cercetarea ei, metoda indicatorilor radioactivi s-a dovedit deosebit de utilă. Vitamina B_1 — de pildă — în compoziția căreia intră și sulf, poate fi făcută radioactivă prin utilizarea unui sulf care să conțină și izotopul artificial $^{35}_{16}S$. Datorită radiației acestuia procesul de asimilare și eliminare a vitaminei B_1 poate fi urmărit pas cu pas. S-a stabilit de pildă, că în 24 ore se elimină circa 10% din cantitatea de vitamină introdusă în organism.

Ne oprim aci, şi pentru a termina, dăm mai jos o listă a principalilor izotopi radioactivi artificiali folosiţi curent, în cercetările de biochimie, fiziologie animală şi vegetală:

Denumirea izotopului	Felul dezintegrării	Timpul de înjumătăţire	Energia radiaţiei
${}^{3}_{1}H$ (tritiu)	β^-	31 *a.*	0,0179 *MeV*
${}^{14}_{6}C$	β^-	5700 *a.*	0,1563
${}^{32}_{15}P$	β^-	14,3 *d.*	1,689
${}^{35}_{16}S$	β^-	87 *d.*	0,169
${}^{41}_{18}A$	β^-	109 *min.*	1,245
${}^{24}_{11}Na$	β^-	14,8 *h.*	1,38
${}^{41,45}_{20}Ca$	β^-	152 *d.*	0,24
${}^{59}_{26}Fe$	β^-	46 *d.*	0,46
${}^{64}_{29}Cu$	β^- şi β^+	12,88 *h.*	0,6
${}^{65}_{30}Zn$	β^+, *K*	250 *d.*	0,36
${}^{74}_{33}As$	β^- şi β^+	17,5 *d.*	1,0
${}^{82}_{35}Br$	β^-	33,9 *h.*	0,465
${}^{42}_{19}K$	β^-	12,4 *h.*	3,0

DIN ISTORIA GEOMETRIEI

APLICAREA METODEI EXHAUSTIUNII ÎN DEMONSTRAŢIA GEOMETRICĂ

ION ARMEAN, Cluj

MATEMATICENII greci nu se ocupau bucuros cu noţiuni care nu erau bine definite, fiindcă raţionamentele asupra acestor noţiuni puteau conduce la concluzii false, chiar în contrazicere cu realitatea. Au existat însă, filozofi greci, numiţi «sofişti», care prin diferite raţionamente numite sofisme căutau să prezinte neadevărul sub formă de adevăr sau invers. Unul dintre cei mai de seamă reprezentanţi ai lor a fost Zenon din Elea (—495—435). Folosind confuzia dintre «infinit de mult» şi «infinit de multe ori», Zenon a căutat să dovedească diferite paradoxe, cunoscute sub numele de «aporiile lui Zenon».

«Nu există mişcare, spunea Zenon, deoarece corpul care trebuie să parcurgă o distanţă oarecare, trebuie să treacă mai întîi prin mijlocul acestei distanţe, apoi prin mijlocul distanţei rămase, ş.a.m.d. la infinit; şi deci, nici odată nu va putea ajunge la capătul drumului său».

Desigur că Zenon ştia că mişcarea totuşi există; dar el ignora — poate în mod voit — că orice distanţă nu e altceva decît o sumă a jumătăţii ei,

a sfertului ei, a optimii ei, ş.a.m.d. la infinit, ceea ce în mod matematic se poate exprima prin egalitatea:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Rezultă de aici că, adunînd de «infinit de multe ori» jumătatea cu jumătatea ei, ş.a.m.d. nu obţinem în mod necesar «infinit de mult», cum insinua Zenon», ci vom avea:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = 1$$

putînd astfel considera orice număr ca limita unei progresii infinite.

Acest lucru însă, era greu de înţeles pe vremea aceea, dar mai ales, greu de dovedit, fiindcă infinitul nu se poate defini ca o mărime matematică cu care să se poată efectua diferite operaţiuni.

Dar Zenon urmărea prin această aporie punerea unei alte probleme filozofice, aceea a continuităţii sau a discontinuităţii spaţiului şi a materiei. In acest scop, a recurs la «dihotomie» (înjumătăţire), punînd întrebarea dacă o mărime oarecare se poate înjumătăţi la infinit sau nu se poate?

In ipoteza cînd o mărime oarecare are un caracter de continuitate nimica nu ne-ar putea împiedica, principial, să o înjumătăţim la infinit. Dar această ipoteză ar conduce — după Zenon — la negarea mişcării. In consecinţă, nu rămîne plauzibilă decît a doua ipoteză, aceea a discontinuităţii materiei, pe care elevul lui Zenon, Leucip (sec. V) nu a întîrziat să o enunţe sub forma: «există nişte corpusculi uşori, unii aspri, alţii rotunzi, ... etc.; din ei a luat naştere cerul şi pămîntul, fără intervenţia naturii, ci printr-o împrejurare întîmplătoare», întemeiînd astfel, şcoala atomistă.

Pentru a evita contradicţia dintre continuitatea şi discontinuitatea spaţiului, provenită din noţiunea confuză a infinitului, Eudoxus din Cnidos (—408—355) a stabilit un raţionament rămas celebru pînă în ziua de azi, cunoscut sub numele de «axioma lui Arhimede» (relatat în operele acestuia) şi anume:

«Date fiind două mărimi de acelaş fel dar inegale, atunci există totdeauna un multiplu al celei mai mici, care să fie mai mare decît mărimea cea mai mare».

La prima vedere, această propoziţie nu pare a ne spune prea mult. Cu toate acestea ea este izvorul din care s-a format «metoda exhaustiunii» şi care, lărgită şi completată în decursul timpului, s-a transformat în calculul infinitezimal de astăzi; ale cărui aplicări în toate domeniile ştiinţei şi în practica vieţii sînt de nepreţuit.

Intrebuinţînd ca axiomă propoziţia de mai sus, Euclid (—300) demonstrează în cartea X-a a «Elementelor», propoziţia următoare:

«Dacă două mărimi neegale $a > b$ sînt date, dacă din a luăm mai mult decît jumătatea sa, din rest luăm din nou, mai mult decît jumătatea sa, ş.a.m.d. ne va rămîne odată un rest care este mai mic decît b».

Iată demonstraţia acestei teoreme în limbajul nostru de azi: Fie n multiplul lui b care, conform axiomei lui Eudox ne va da: $a < n \cdot b$ (1). Să împărţim mărimea nb în n părţi egale cu b. Din mărimea a să luăm mai mult decît jumătate: a_1, din rest să luăm din nou mai mult decît jumătate:

a_2, ş.a.m.d. pînă cînd mărimea a a fost împărţită în n părţi: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, neegale între ele. Inlocuind în (1) pe a cu părţile sale componente, obţinem

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n < nb.$$

Scăzînd acum, din partea stîngă a inegalităţii pe a_1, iar din partea dreaptă pe b, vom avea:

$$a_2 + a_3 + a_3 + \ldots + a_n < (n - 1)\, b$$

fiindcă din partea stîngă am scăzut mai mult decît jumătatea acestei părţi iar din partea dreaptă mai puţin decît jumătatea acelei părţi. Repetînd această operaţie, vom obţine pe rînd:

$$a_3 + a_4 + \ldots + a_n < (n - 2)\, b$$

$$a_4 + \ldots + a_n < (n - 3)\, b$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1} + a_n < 2b$$

fiindcă în toate cazurile, în partea stîngă am scăzut mai mult decît jumătatea acestei părţi, în partea dreaptă mai puţin decît jumătatea acestei părţi. In sfîrşit vom avea:

$$a_n < b$$

fiindcă din partea stîngă am luat mai mult decît jumătate, iar în dreapta numai jumătate.

Pentru a scoate în evidenţă însemnătatea acestei propoziţii a lui Euclid, să observăm că mărimea b ar putea fi foarte mică; în acest caz, luînd din a mai mult decît jumătatea sa, din rest din nou mai mult decît jumătatea sa, ne va rămîne odată un rest care va fi mai mic decît b sau mai mic decît orice mărime, oricît de mică. Cu alte cuvinte, dacă am avea un vas plin cu apă am putea goli acest vas scoţînd prima dată ceva mai mult decît jumătatea apei din vas, apoi ceva mai mult decît jumătate din apa rămasă, ş.a.m.d., urmînd ca după un număr suficient de operaţiuni să rămînă în vas un rest mai mic decît o picătură de apă — spre exemplu — iar în mod practic, vasul să fie golit de întreg conţinutul său.

Iată principiul de bază a metodei exhaustiunii, semnificaţia acestui cuvînt fiind — epuizarea unei mărimi — sau — golirea unui conţinut — prin metoda indicată mai sus.

Euclid aplică această metodă o singură dată în « Elemente », pentru demonstrarea propoziţiei 2 din cartea XII şi anume:

« Ariile a două cercuri se raportă între ele ca pătratele diametrelor lor ».

Este interesantă demonstraţia acestei teoreme nu numai prin faptul că este o aplicare frumoasă a metodei exhàustiunii, ci şi prin ingeniozitatea şi rigurozitatea caracteristică raţionamentului euclidian.

Fie date cercurile de arii S_1 şi S_2. Va trebui să arătăm că:

$$BD^2 : FH^2 = S_1 : S_2.$$

Cazul I. Să presupunem că raportul

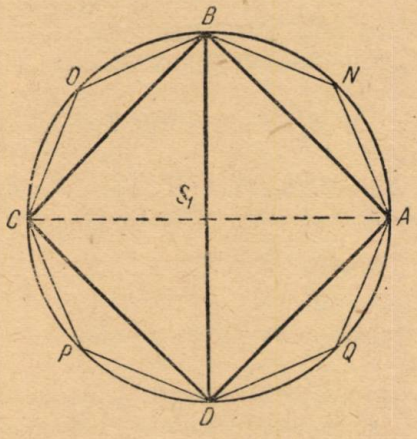
$$BD^2 : FH^2 = S_1 : T$$

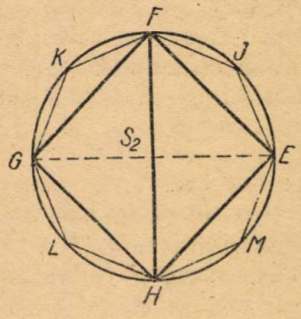
unde $T < S_2$. Atunci există o arie V care să întregească aria T la S_2. De aici rezultă:

$$S_2 = T + V.$$

Se înscrie în cercul al doilea, pătratul $EFGH$. Aria acestui pătrat este egală cu jumătatea ariei pătratului circumscris aceluiaşi cerc. (Euclid I, 41). Pătratul circumscris este mai mare decît cercul (vom considera toate mărimile ca arii, prin urmare, jumătatea sa, anume pătratul înscris, este mai mare decît jumătatea cercului).

Să înjumătăţim acum, cele patru arce de cerc corespunzătoare laturilor pătratului, prin punctele J, K, L, M obţinînd astfel, octogonul $EJFKGLHM$. Fiecare din triunghiurile EMH astfel obţinute, este mai mare ca jumătatea





segmentului său. Dreptunghiul format de tangenta în M şi cu baza cît latura EH este mai mare ca segmentul de cerc EMH, deci şi jumătatea lui — triunghiul EMH — este mai mare decît jumătatea segmentului de cerc EMH. Continuînd înjumătăţirea arcelor octogonului, etc., vom obţine la fel, triunghiuri mai mari decît jumătatea segmentelor de cerc în care sînt înscrise. Rezultă deci, că putem epuiza aria cercului S_2 scoţînd din ea mai mult decît jumătate — pătratul $EFGH$ — apoi din rest din nou mai mult decît jumătate — triunghiurile de forma EMN — ş.a.m.d. urmînd ca la un moment dat, suma segmentelor rămase să fie mai mică decît aria V. Să admitem, spre exemplu, că cele opt segmente de cerc: EJ, JF, etc. satisfac această condiţie. Suma acestor segmente fiind deci, mai mică decît V şi cum $S_2 = T + V$, va trebui ca aria poligonului $EJFKGLHN > T$ deoarce aria acestui poligon cu aria segmentelor rămase, trebuie să facă împreună aria cercului. Dar aria segmentelor rămase fiind mai mică decît V, aria poligonului trebuie să fie mai mare decît T [1]) în caz contrar vom avea: $T + V < S_2$.

---

[1]) Notă. Dăm şi o demonstraţie algebrică a acestei propoziţiuni esenţiale. Avem:

$$\text{Segmentele} < V$$

$$S_2 = \text{polig.} + \text{seg.} = T + V$$

Scăzînd egalitatea a doua din inegalitatea întîi obţinem:

$$-\text{polig.} < -T \qquad (1)$$

sau:

$$\text{polig.} > T.$$

Să înscriem acum, în cercul întîi, poligonul $AN...Q$ asemenea cu poligonul din cercul al doilea. Atunci între aceste două poligoane există relaţia:

$$BD^2 : FH^2 = (\text{Polig. } AN...Q) : (\text{Polig. } EJ...M).$$

Dar am presupus că $BD^2 : FH^2 = S_1 : T$ de unde urmează că:

$$S_1 : T = (\text{Polig. } AN...Q) : (\text{Polig. } EJ...M).$$

Dar cum $S_1 > (\text{Pol. } AN...Q)$ urmează neapărat că şi $T > (\text{Pol. } EJ...M)$ ceea ce contrazice inegalitatea demonstrată mai sus:

$$T < (\text{Pol. } EJ...M).$$

In consecinţă, ipoteza: $BD^2 : FH^2 = S_1 : T$ în care $T < S_2$

este absurdă. La fel, este absurdă ipoteza: $FH^2 : BD^2 = S_2 : U$ în care $U < S_1$ ceea ce se demonstrează uşor, repetînd raţionamentele de mai sus cu cercurile inversate.

Cazul II. Să admitem că $BD^2 : FH^2 = S_1 : T$ în care $T > S_2$. Inversînd rapoartele vom avea: $FH^2 : BD^2 = T : S_1$.

Putem determina o arie oarecare Z încît să avem: $T : S_1 = S_2 : Z$. Cum însă, am admis că $T > S_2$ urmează că $S_1 > Z$. Prin urmare vom avea:

$$FH^2 : BD^2 = S_2 : Z \quad \text{în care} \quad Z < S_1,$$

ceea ce am arătat în cazul I că este absurd.

Cum ambele ipoteze conduc la concluzii absurde, rămîne adevărată singura posibilitate $BD^2 : FH^2 = S_1 : S_2$.

Vedem deci, că pentru a aplica metoda exhaustiunii la demonstrarea unei teoreme, va trebui să facem două demonstraţii indirecte. Vom afirma dela început, spre exemplu, că mărimile $a = b$. S-ar putea însă, ca a să nu fie egal cu b. Atunci va putea exista o altă mărime c care să fie egală cu b. Se pune acum întrebarea: cum ar putea să fie mărimea a faţă de mărimea c?

Există numai trei posibilităţi şi anume:

$$1)\ a > c \qquad 2)\ a < c \qquad 3)\ a = c.$$

Arătînd prin exhaustiune că ipotezele 1) şi 2) sînt absurde, sîntem nevoiţi să acceptăm a treia ipoteză: $a = c = b$ ca adevărată.

Deşi la început cititorul nu vede scopul introducerii unor mărimi arbitrare este totuşi, nevoit să accepte relaţiile de inegalitate ce rezultă din ele, ca pînă la urmă să fie constrîns să accepte întreaga propoziţie ca demonstrată.

Un filozof german, ale cărui cunoştinţe matematice nu depăşeau cu mult pe acelea ale unui elev din clasa VIII, a comparat — nu fără oarecare umor — metoda exhaustiunii, cu o cursă de şoareci ademenind raţionamentul prin tot felul de iluzii şi care, odată prins, nu mai poate scăpa din această cursă.

Desigur că pentru acei oameni ale căror lucruri sau idei sînt în permanentă dezordine, stabilirea unei anumite ordine este interpretată de ei ca o restrîngere a libertăţii lor.

Pentru gîndirea matematică însă, metoda exhausiunii nu numai că nu a însemnat o cursă pentru prinderea raţionamentului, ci dimpotrivă, ea a fost cheea care a deschis porţile gîndirii spre drumul ingenios al analizei infinitezimale, ducînd astfel, pe om spre cele mai înalte culmi ale ştiinţei.

CAPACITATEA BUTOAIELOR

Profesor I. TEODORESCU

Centrul viticol Valea Călugărească

DETERMINAREA capacităţii butoaielor, cum se mai spune «*cotitul vaselor*», este o problemă ce prezintă în practică, un interes deosebit. Partea teoretică a acestei probleme constă în a stabili formule care să exprime cît mai exact capacitatea unui butoi. O greutate ce intervine în această lucrare o constituie diversitatea formelor pe care constructorii o dau acestor vase. Astfel, unele butoaie au forme care se apropie foarte mult de cilindrul circular drept; diametrul luat la gura vasului diferă foarte puţin de diametrul fundurilor. Alte butoaie au doagele mult curbate, diametrul vasului luat la gura lui diferă mult de diametrul fundurilor. Acestor vase li se potrivesc alte forme geometrice, ca aceea a două trunchiuri de con sau a două trunchiuri de paraboloid sau elipsoid de rotaţie.

Pentru a găsi formule matematice care să exprime capacitatea butoaielor se porneşte dela ipoteza unei echivalenţe între aceste vase şi corpurile studiate în geometrie, cilindrul circular, trunchiul de con, trunchiul de paraboloid şi trunchiul de elipsoid cu bazele cercuri paralele.

Formulele găsite pe consideraţii teoretice se ajustează unori prin coeficienţi numerici potriviţi.

Fie D diametrul la gura vasului, d diametrul la funduri şi L lungimea interioară a vasului. Practic, lungimea vasului se măsoară la exterior din care se scade apoi, grosimea doagelor dela funduri. La unele vase se poate întîmpla ca cele două funduri să nu fie riguros egale, atunci în formule se ia media aritmetică a diametrelor acestor funduri. Această medie o însemnăm cu d.

După provenienţa lor avem următoarele tipuri de formule corespunzătoare diferitelor forme.

1. Forme cilindrice

Să considerăm butoiul ca fiind echivalent cu un cilindru circular avînd diametrul bazei, media aritmetică a celor două diametre D şi d. Raza acestui cilindru va fi atunci $\frac{D+d}{4}$. Volumul este

$$V = \frac{\pi}{16} \cdot (D+d)^2 \cdot L. \qquad (1)$$

Practica a dovedit că aplicînd această formulă obţinem o capacitate prea mică şi ea s-a corectat înlocuindu-se valoarea $\pi = 3{,}14159\ldots$ cu o valoare ceva mai mare, anume, cu coeficientul 3,2. Vom da atunci peste formula

$$V = 0{,}2\ (D+d)^2 \cdot L$$

care dă volumul în metri cubi, dacă dimensiunile butoiului D, d, L sînt date în metri liniari. Dacă multiplicăm cu 10 obţinem o formulă practică care exprimă capacitatea vasului în hectolitri

$$C \text{ în } hl = 2\ (D+d)^2 \cdot L \qquad (I)$$

II. La alte formule se ajunge bazat pe următoarea observaţie. Se consideră butoiul echivalent tot cu un cilindru, care ar avea însă diametrul bazei egal cu diametrul D luat la gura vasului, micşorat încă cu o anumită fracţie din diferenţa $(D - d)$ a diametrelor vasului. Formula precedentă porneşte dela consideraţia că butoiul este echivalent cu un cilindru avînd diametrul D micşorat cu $\frac{1}{2}$ din diferenţa $(D - d)$. Acest diametru este

$$D - \frac{1}{2}(D - d) = \frac{D + d}{2},$$

iar volumul vasului este exprimat prin relaţia (1), care după cum s-a spus dă o capacitate prea mică.

O a doua formulă în care se urmăreşte a se obţine o capacitate ceva mai mare priveşte butoiul ca fiind echivalent cu un cilindru avînd diametrul D micşorat cu $\frac{1}{3}$ din diferenţa $D - d$.

Diametrul acestui cilindru este deci

$$D - \frac{1}{3}(D - d) = \frac{2D + d}{3}$$

Volumul cilindrului cu raza secţiunii $\frac{2D + d}{6}$ este dat de formula

$$V = \frac{\pi}{36}(2D + d)^2 \cdot L \qquad \text{(II)}$$

III. O a treia formulă se găseşte considerînd butoiul ca fiind echivalent cu un cilindru avînd ca bază un cerc cu diametrul D micşorat cu $\frac{3}{8}$ din diferenţa $D - d$ a celor două diametre. Acest diametru este

$$D - \frac{3}{8}(D - d) = \frac{5D + 3d}{8}.$$

Volumul acestui cilindru cu raza $\frac{5D + 3d}{16}$ este atunci

$$V = \frac{\pi}{256}(5D + 3d)^2 \cdot L$$

Luăm cîtul $\frac{\pi}{256}$ egal cu 0,01227 şi multiplicăm cu 1000 pentru a avea capacitatea în litri. Găsim formula capacităţii

$$C \text{ în litri} = 12{,}27\ (5D + 3d)^2 \cdot L \qquad \text{(III)}$$

IV. O a patra formulă se găseşte considerînd butoiul ca fiind echivalent cu un cilindru avînd baza un cerc cu diametrul D micşorat cu $\frac{2}{3}$ din diferenţa $D - d$. Diametrul acestui cilindru va fi

$$D = \frac{2}{5}(D - d) = \frac{3D + 2d}{5}.$$

Raza va fi $\frac{3D + 2d}{10}$ iar volumul

$$V = \frac{\pi}{100}(3D + 2d)^2 \cdot L$$

Luăm pentru fracţia $\frac{\pi}{100}$ valoarea 0,031416, multiplicăm cu 1000 şi avem o formulă care dă capacitatea vasului în litri

$$C \text{ în litri} = 31{,}416\,(3D + 2d)^2 \cdot L \qquad \text{(IV)}$$

Din cele arătate pînă acum se vede că toate formulele corespunzătoare formelor cilindrice au un mod uniform de stabilire a lor.

Butoiul este considerat în toate aceste cazuri ca fiind echivalent cu un cilindru avînd ca diametru o expresie de forma

$$D - \alpha\,(D - d)$$

unde α este un număr subunitar care depinde mult de forma vaselor. Numărul acesta are o limită superioară şi una inferioară. In cazul formulelor stabilite mai înainte am avut pentru α succesiv, valorile $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}$. Se vede uşor că trecînd dela o valoare mai mică la una mai mare volumul obţinut scade. Astfel, comparînd între ele formulele II, III, IV, formula IV corespunzătoare valorii $\alpha = \frac{2}{5}$ dă o capacitate mai mică decît formula III corespunzătoare valorii $\alpha = \frac{3}{8}$ şi aceasta dă un rezultat mai mic decît formula II unde $\alpha = \frac{1}{3}$.

Forma tronconică

Să pornim dela ideia că butoiul ar fi echivalent cu două trunchiuri de con egale, lipite prin bazele mari. Un asemenea trunchi de con are razele bazelor $\frac{D}{2}$ şi $\frac{d}{2}$ şi înălţimea $\frac{L}{2}$ (fig. 1).

Dacă aplicăm formula cunoscută, volumul a două trunchiuri egale este

$$V = \frac{\pi}{12}(D^2 + d^2 + D \cdot d) \cdot L$$

Această expresie se mai scrie sub forma

$$V = \frac{\pi}{12}[(D - d)^2 + 3D \cdot d] \cdot L$$

In practică formula se reduce în modul următor. Se suprimă patratul $(D - d)^2$ şi se corectează această lipsă înlocuind coeficientul $\frac{\pi}{4}$ cu valoarea mai mare 0,8. Se găseşte astfel, formula care se aplică în practică

$$V = 0{,}8 \; D \cdot d \cdot L \cdot \qquad \text{(V)}$$

Forma parabolică

Se consideră butoiul ca fiind echivalent cu un corp compus din două trunchiuri de paraboloid cu bazele cercuri de raze $Nn = R$, $Mm = r$ şi cu distanţa dintre baze $mn = h$ (fig. 2).

Volumul unui asemenea trunchi de paraboloid de rotaţie, se află înmulţind semisuma ariilor bazelor cu distanţa dintre baze. Avem anume expresia volumului

$$\frac{1}{2}(\pi R^2 + \pi r^2) \cdot h$$

Dublăm această cantitate şi apoi, facem înlocuirile

$$R = \frac{D}{2}, \quad r = \frac{d}{2}, \quad h = \frac{L}{2}$$

Găsim o formulă utilizată la calculul volumului butoaielor

$$V = \frac{1}{8}\pi(D^2 + d^2) \cdot L. \qquad \text{(VI)}$$

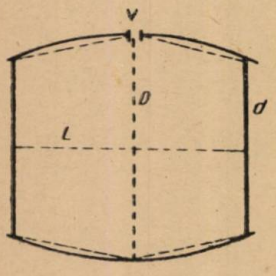


Fig. 1.

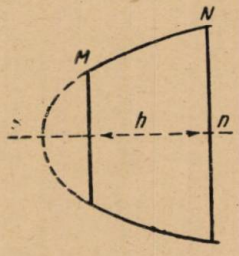


Fig. 2.

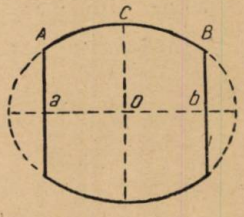


Fig. 3.

Forma elipsoidală

In cele ce urmează vom considera butoiul ca fiind compus din două trunchiuri de elipsoid de rotaţie cu bazele alipite. Trunchiul de elipsoid este născut din rotirea arcului de elipsă AC în jurul axei mari a elipsei. Dacă $OC = R$ şi $Aa = r$ sînt razele bazelor trunchiului şi $ab = h$ distanţa dintre baze (fig. 3), atunci volumul lui se exprimă prin formula

$$V = \frac{1}{3}\pi(2R^2 + r^2) \cdot h$$

Dublăm această valoare şi punem $R = \frac{D}{2}$, $r = \frac{d}{2}$, $h = \frac{L}{2}$, găsim o formulă pentru calculul capacităţii butoaielor

$$V = \frac{1}{12}\pi(2D^2 + d^2)\cdot L \qquad \text{(VII)}$$

Aceasta se aplică la vasele cu o formă ovală pronunţată, care se apropie de elipsoid.

Comparînd formula (VI) cu (VII) pentru aceleaşi date, ultima dă un rezultat mai mare. Diferenţa dintre aceste volume este egală cu

$$\frac{\pi}{24}(D^2 - d^2)\cdot L$$

Formulele care sînt utilizate mai mult în practică sînt formulele corespunzătoare formelor cilindrice şi formula (V). Ca încheiere, să tratăm exemplul numeric $D = 0{,}74$ m, $d = 0{,}66$ m, $L = 1{,}20$ m.

Formula I:

$$C \text{ în } hl = 2\,(D + d)^2\cdot L$$

dă $$C = 2\,(0{,}74 + 0{,}66)^2\cdot 1{,}20 = 4{,}70 \text{ hl} = 470 \text{ litri}$$

Formula II:

$$V = \frac{\pi}{36}(2D + d)^2\cdot L$$

dă $$V = \frac{\pi}{36}(1{,}48 + 0{,}66)^2\cdot 1{,}20 = 479 \text{ litri}$$

Formula III:

$$C \text{ în litri} = 12{,}27\ (5D + 3d)^2\cdot L$$

dă $$C = 12{,}27\ (3{,}70 + 1{,}98)^2\cdot 1{,}20 = 475 \text{ litri}$$

Formula IV:

$$C \text{ în litri} = 31{,}4\cdot(3D + 2d)^2\cdot L$$

dă $$C = 31{,}4\ (2{,}22 + 1{,}32)^2\cdot 1{,}20 = 472 \text{ litri}$$

Formula V: dă:

$$V \text{ în } dm^3 = 0{,}8\cdot 0{,}74\cdot 0{,}66\cdot 1{,}2 = 469 \text{ litri.}$$

PROBLEME REZOLVATE

Problema 968

Se dă ecuația:

$$mx^2 - (m - 4)\,x + 3m - 11 = 0$$

unde m este număr întreg. Să se determine m și să se rezolve ecuația, știind că ea are o rădăcină cuprinsă între 0 și 1.

* * *

Soluția. Fiindcă ecuația are o rădăcină cuprinsă între 0 și 1, înseamnă că rădăcinile ei sînt reale. Pentru ca ecuația să aibă rădăcinile reale, trebuie ca realizantul să fie pozitiv:

$$\Delta = -11\,m^2 + 36\,m + 16 > 0,$$

sau

$$11\,m^2 - 36\,m - 16 < 0.$$

Trinomul se anulează pentru

$$m = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 176}}{11} = \frac{18 \pm 10\sqrt{5}}{11}.$$

Dacă dăm lui m valori între m_1 și m_2, trinomul este negativ deci realizantul pozitiv. Ecuația are deci, rădăcini reale, cînd:

$$\frac{18 + 10\sqrt{5}}{11} > m > \frac{18 - 10\sqrt{5}}{11}$$

sau cu aproximație $3{,}6 > m > -0{,}39$.

Cum însă m este prin ipoteză un număr întreg, nu putem să-i dăm decît valorile 0,1, 2 sau 3, pentru ca ecuația să aibă rădăcini reale.

Cînd $m = 0$, ecuația devine de gradul I; Cînd $m = 1$, avem:

$$x^2 + 3x - 8 = 0,$$

de unde

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2} \approx \frac{-3 \pm 6{,}4}{2}$$

Problema nu este deci, satisfăcută pentru $m = 1$. Cînd $m = 2$ ecuația devine:

$$2x^2 + 2x - 5 = 0,$$

de unde

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 10}}{2} \approx \frac{1 \pm 3{,}31}{2}$$

Problema nu este satisfăcută fiindcă nici una dintre rădăcini nu are valoarea cuprinsă între 0 și 1. Cînd $m = 3$, ecuația devine:

$$3x^2 + x - 2 = 0,$$

de unde

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}\ ;\quad x_1 = -1 \text{ și } x_2 = \frac{2}{3}.$$

Rezultă că ecuația are o rădăcină cuprinsă între 0 și 1 cînd $m = 3$. In acest caz, rădăcinile ecuației sînt:

$$x_1 = -1\ ,\quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Problema 1007

Rezistența unui bec electric de 120 V și de 100 W, este de 10 ori mai mare la cald, decît la rece. Să se afle rezistența R la rece și coeficientul termic, dacă temperatura de încălzire a filamentului este de 2000°C.

* * *

Soluție.

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{120^2}{100} = 144 \text{ ohmi} \quad R_{2000} = R(1 + 2000\,\alpha)\,10 = 1 + 2000\,\alpha;\ \alpha = 0{,}0045.$$

Problema 1009

Un isvor de lumină avînd o intensitate luminoasă de 80 candele luminează o suprafață plană sub un unghi de incidență de 60° dela o distanță de 2 m. Să se calculeze iluminarea produsă, în lux și phot.

* * *

Soluție.

$$E = \frac{I \cos \alpha}{d^2} = \frac{80 \cdot \frac{1}{2}}{4} = 10 \text{ lux.}$$

$$E = 10 \text{ lux} = 0{,}001 \text{ phot.}$$

Problema 1012

Paralelele duse prin virfurile B și C la înălțimea AD a triunghiului oarecare ABC întîlnesc laturile AC respectiv în P și Q. Dreptele AB și DP se întîlnesc în E; dreptele AC și DQ, în F. Să se arate că:

a) *Dreptele BF și CE sînt concurente într-un punct M, mijlocul înălțimii AD.*

b) *Înălțimea AD este bisectoarea unghiului PDQ.*

Emil Secoșan

Soluție. a) Notăm cu M intersecția dreptelor AD și CE. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiul ABD tăiat de transversale EMC și ținînd seama că

$$\frac{BE}{EA} = \frac{PB}{AD} = \frac{BC}{DC}$$

obținem $AM = MD$. Analog, arătăm că BF trece prin M.

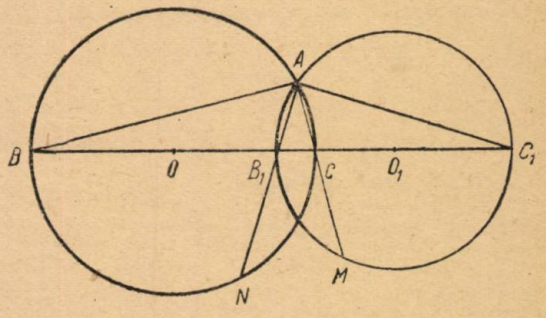
b) Acest punct este consecința faptului că BF și CE se întîlnesc pe înălțimea AD. (A se vedea «Culegere de probleme de Geometrie plană» pentru cl. VIII-a și a IX-a medie, exercițiul 314. ediția 1950).

Problema 1014

Prin punctul A de intersecție a două cercuri O și O_1 se duce o secantă care taie linia centrelor respectiv în B_1 și C, iar cercurile în N și M. Să se arate că:

$$AB \cdot CM = AC_1 \cdot B_1 N$$

N. Păun, student



Soluție. Avem $\sphericalangle BAN_1 = \sphericalangle MAC_1$ întrucît

$\sphericalangle BAM = \sphericalangle B_1 AC_1 = 90°$.

Prin urmare:

$$\frac{\text{aria } BAB_1}{\text{aria } CAC_1} = \frac{AB \cdot AB_1}{AC \cdot AC_1} = \frac{BB_1}{CC_1} \quad (1)$$

Mai avem:

$$AC \cdot CM = B_1C \cdot CC_1 \tag{2}$$

$$B_1C \cdot BB_1 = AB_1 \cdot B_1N \tag{3}$$

Inmulţind membru cu membru relaţiile (1), (2), (3) obţinem relaţia cerută.

Problema 1016

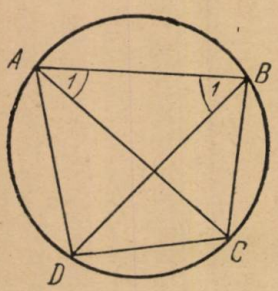
Intr-un patrulater $ABCD$ convex înscris într-un cerc, raportul $\dfrac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ *nu depinde de raza cercului circumscris.*

* * *

Soluţie. Avem:

$$\overline{AC} = 2R \sin B;\ \overline{BD} = 2R \sin A;\ \overline{AD} = 2R \sin B_1;\ \overline{BC} = 2R \sin A_1.$$

Prin urmare, raportul



$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{\sin A \sin B}{\sin A_1 \sin B_1}$$

adică, este independent de R, iar unghiurile A, B, A_1, A_1 sînt constante deci şi raportul este constant.

Observare. Orice funcţie omogenă şi de grad zero în raport cu laturile sau diagonalele patrulaterului $ABCD$, este independentă de raza aleasă, adică această funcţie este constantă.

Problema 1023

Să se rezolve ecuaţia:

$$16 \sin^6 x + 6 \cos 2x - 3 \cos 4x = 4{,}75.$$

R. Bernstein

Soluţie. Substituind:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 4x = 8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1$$

ecuaţia devine $\left(\text{notînd } \sin^2 x = \dfrac{z}{4}\right)$;

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0 \quad \text{sau} \quad (z-1)(z^2 - 5z + 7) = 0$$

de unde $z = 1$.

Trinomul $z^2 - 5z + 7$ nu are rădăcini reale. Avem deci:

$$\sin^2 x = \frac{1}{4};\quad \sin x = \pm\frac{1}{2};\quad x = K\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

Problema 1025

Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sqrt{3}(1 - \sin a) - \cos a}{\cos a - \sqrt{3} \sin a} = \frac{2 \cos a}{\cos a + \sqrt{3}(1 + \sin a)}.$$

Maria Neuman

Soluție. Identitatea se poate scrie:

$$(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3}\sin a + \cos a)^2 - 2\cos a(\cos a - \sqrt{3}\sin a)$$

$$3 - 3\sin^2 a - \cos^2 a - 2\sqrt{3}\sin a\cos a = 2\cos^2 a - 2\sqrt{3}\sin a\cos a$$

care se verifică imediat, întrucît $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$.

Problema 1026

Fie M un punct în interiorul unui poligon conex $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$ a cărui arie este S și în care notăm

$$\sphericalangle MA_iA_{i+1} = a \quad , \quad \sphericalangle MA_iA_{i+1} = a_i',$$

$$\sphericalangle MA_{i+1}A_i = a_{i+1} \quad , \quad \sphericalangle MA_{i+1}A_{i+2} = a_{i+1}'.$$

Să se arate că

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\overline{A_iA_{i+1}}^2}{\operatorname{cotg} a_i' + \operatorname{cotg} a_{i+1}}.$$

Ion Gligor

Soluție. Avem:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \text{aria } MA_iA_{i+1}.$$

Insă,

$$\text{aria } MA_iA_{i+1} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot \overline{A_iA_{i+1}},$$ h fiind înălțimea din M pe A_iA_{i+1}:

$$h = \frac{\overline{A_iA_{i+1}}}{\operatorname{cotg} a_i + \operatorname{cotg} a_{i+1}}.$$

Prin urmare,

$$\text{aria } MA_iA_{i+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{A_iA_{i+1}}^2}{\operatorname{cotg} a_i' + \operatorname{cotg} a_{i+1}}$$

deci, egalitatea din enunț este adevărată.

Problema 1027

Să se arate că pentru $|x| > 1$ avem:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^8} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^4} + \frac{1}{1-x^8} + \ldots$$

C. I. Ț.

Soluție. Avem:

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} = -\frac{2}{x^2-1}, \text{ deci:}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-1};$$

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{x^4-1} - \frac{2}{x^8-1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}-1} - \frac{2}{x^{2^{2n}}-1}.$$

Adunînd aceste egalităţi şi ţinînd seamă că: $\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{x^{2^n}-1} = 0, ;(|x|<1)$, obţinem relaţia cerută.

Problema 1029

Se dă $x+y+z=1$. *Să se arate că*

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}.$$

S. Fiterman

Soluţie. Problema este un caz particular al problemei nr. 735 din R.M.F./953, p. 19. Chestiunea este de altfel, evidentă, deoarece $x+y+z=1$, ne dă:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}\left[(x+y+z)^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right] \geqslant \frac{1}{3}.$$

Problema 1030

Să se arate dacă $x<2$, *expresia*

$$E = arc\,sin\,(x-1)+2\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$$

este constantă.

I. Stepanov

Soluţie. Avem:

$$2\ \text{arc tg}\ \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \arccos\frac{1-\frac{2x-x^2}{x^2}}{1+\frac{2x-x^2}{x^2}} = \arccos(x-1)$$

Prin urmare:

$$E = \arcsin(x-1)+\arccos(x-1)=\frac{\pi}{2}.$$

Problema 1032

Să se calculeze greutatea specifică a aerului dintr-o cameră cu temperatura de 15°C, *presiunea atmosferică normală şi gradul de saturaţie* 50 %, *Ştiind că presiunea maximă a vaporilor de apă la* 15°C *este* 12,79 *mm coloană de mercur.*

Stan M. Fotă, elev, Giurgiu

Soluţie. Presiunea vaporilor de apă este:

$$0{,}5.12{,}79 = 6{,}395 \text{ mm}$$

Presiunea aerului este deci:

$$760-6{,}395 = 753{,}605 \text{ mm}$$

Intrucît la 0°C şi 760 mm densitatea aerului este 1,293 g/dm³, în condiţiile probleme densitatea aerului va fi:

$$d=\frac{1{,}293\cdot 753{,}605}{760\,(1+15\,\alpha)}\ (\alpha = 1/273)$$

de unde:

$$d = 1{,}243 \text{ g/dm}^3.$$

Problema 1033

Se dă un trapez $ABCD$ cu laturile paralele BC şi AD. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor. Să se stabilească relaţiile:

$$\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}{\overline{AC}^2}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OD}}{\overline{BD}^2} \text{ şi } \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}}{\overline{AD}^2}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{\overline{BC}^2}.$$

B. Caşin

Soluţie. In triunghiurile AOD şi BOC, avem:

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OD}{BD} \text{ şi } \frac{OC}{AC}=\frac{OB}{BD}; \tag{1}$$

$$\frac{OA}{AD}=\frac{OB}{BC} \text{ şi } \frac{OD}{AD}=\frac{OC}{BC}; \tag{2}$$

Inmulţind membru cu membru relaţiile (1), apoi relaţiile (2) obţinem relaţiile cerute.

Problema 1035

Să se construiască grafic, triunghiul ABC, cunoscînd poziţia centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor care au ca vîrfuri cîte două din vîrfurile triunghiului ABC, iar cel de al treilea vîrf, fiind ortocentrul triunghiului ABC.

V. Udrescu

Soluţie. Punctele în care înălţimile înţeapă cercul circumscris fiind simetricele ortocentrului faţă de laturile respective, rezultă că centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCH, ACH, ABH, sînt simetricele centrului cercului ABC faţă de laturile BC, AC, AB.

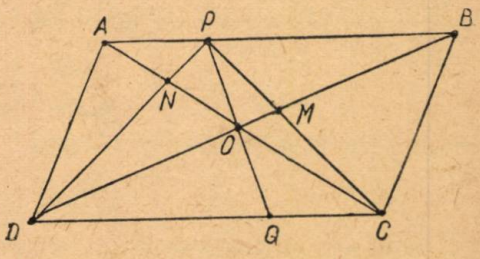
Fie O_A, O_B, O_C aceste puncte. Se observă cu uşurinţă că triunghiurile $O_AO_BO_C$ şi ABC sînt egale şi că ortocentrul lui $O_AO_BO_C$ se confundă cu centrul cercului ABC.

După cele spuse mai sus, construcţia triunghiului ABC este evidentă.

Problema 1038

Fie P un punct pe latura AB a paralelogramului $ABCD$. Dreptele PC şi PD intersectează diagonalele BD şi AC respectiv M şi N. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{MP}{MC}+\frac{NP}{ND}=1.$$



Mihail Popescu

Soluţia I-a. Ţinînd seama că triunghiurile MCD şi MPB sînt asemenea, rezultă $\frac{MP}{MC}=\frac{PB}{CD}$ (1). Din asemănarea triunghiurilor NCD şi NPA, avem:

$$\frac{NP}{ND}=\frac{PA}{CD}. \tag{2}$$

Adunînd relaţiile (1) şi (2) obţinem relaţia din enunţ.

Soluţia II-a. Notăm cu 0 intersecţia diagonalelor şi Q intersecţia dreptelor OP şi DC.

Conform teoremei lui Van Aubel avem:

$$\frac{MP}{MC} + \frac{NP}{ND} = \frac{OP}{OQ}.$$

In cazul particular $OP = OQ$ obținem relația din enunț.

Observare. Relația din enunț se mai poate scrie:

$$\frac{MB}{MD} + \frac{NA}{NC} = 1 \quad \text{și cum} \quad MB = BD - MD \quad \text{și} \quad NA = AC - NC$$

deducem:

$$\frac{AC}{NC} + \frac{BD}{MD} = 3.$$

Problema 1043

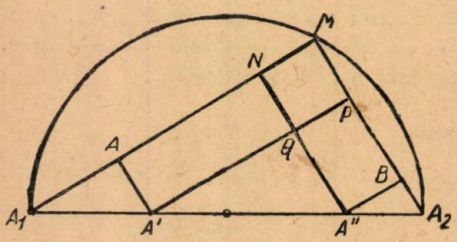
M fiind un punct mobil pe semicercul de diametru $A_1A_2 = 2R$, se construiește patratul MNQP de latură a, N și P fiind situate respectiv, pe MA_1, MA_2 sau pe prelungirea acestora. Fie A' A'' intersecțiile diametrului A_1A_2 respectiv, cu prelungirile laturilor PQ, NQ. Să se arate că M descriind semicercul, există relația:

$$\frac{1}{A_1A'^2} + \frac{1}{A_2A''^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Matei I. Nazarie

Soluție. Din A' și A'' ducem perpendicularele $A'A$, $A''B$ respectiv pe MA_1, MA_2. Din asemănarea triunghiurilor A_1AA', A_1MA_2, deducem:

$$\frac{A_1A'}{A_1A_2} = \frac{AA'}{MA_2} \quad \text{sau} \quad MA_2 = \frac{2Ra}{A_1A'}.$$



La fel, din asemănarea triunghiurilor A_2BA'', A_1MA_2, scoatem: $MA_1 = \dfrac{2Rl}{A_2A''}$.

Ridicînd la pătrat fiecare relație și ținînd seama că

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2$$

obținem după înlocuire:

$$\frac{4R^2l^2}{A_1A'^2} + \frac{4R^2l^2}{A_2A''^2} = 4R^2$$

sau, simplificînd și împărțind cu a^2, avem:

$$\frac{1}{A_1A'^2} + \frac{1}{A_2A''^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Se observă că relația se menține și în cazul cînd construim patratul pe prelungirile laturilor triunghiului dreptunghi A_1MA_2.

Problema 1057

Se împarte un segment în trei părți egale. Dintr-un punct exterior fiecare din cele trei segmente egale se văd sub unghiurile $a < b < c$

Să se stabilească relația:

$$(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)(\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c) = 4\ (1 + \operatorname{ctg}^2 b)$$

Florin Torjesen

Soluție. Fie AD segmentul și B și C punctele care îl împart în trei părți egale, iar O punctul exterior. $\sphericalangle AOB = a$, $\sphericalangle BOC = b$ și $\sphericalangle COD = c$.

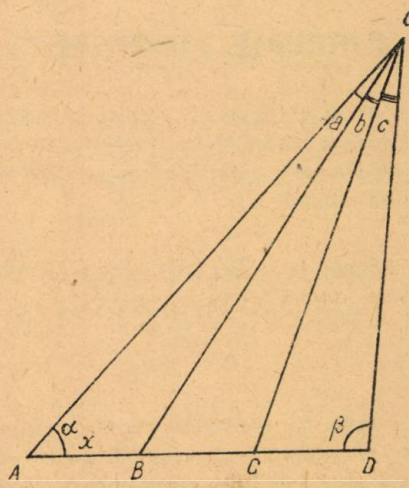
$$\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin (a + b)}{\sin a \sin b}$$

$$\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c = \frac{\cos b}{\sin b} + \frac{\cos c}{\sin c} = \frac{\sin (b + c)}{\sin b \sin c}.$$

Atunci

$$(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)(\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c) = \frac{\sin (a + b) \sin (b + c)}{\sin a \sin^2 b \sin c}.$$

Notăm $AB = BC = CD = x$ și $\sphericalangle OAB = \alpha$ și $\sphericalangle ODC = \beta$.



Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile OAB și OAC

$$\frac{x}{\sin a} = \frac{OB}{\sin \alpha}$$

deci

$$\sin \alpha = \frac{OB \sin a}{x}$$

și

$$\frac{2x}{\sin (a + b)} = \frac{OC}{\sin \alpha}$$

deci,

$$\sin \alpha = \frac{OC \sin (a + b)}{2x}.$$

Rezultă că:

$$\frac{OB \sin a}{x} = \frac{OC \cdot \sin (a + b)}{2x},$$

sau

$$\frac{\sin (a + b)}{\sin a} = \frac{2\,OB}{OC}. \qquad (1)$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile OCD și OBD.

$$\frac{x}{\sin c} = \frac{OC}{\sin \beta} \quad \text{deci,} \quad \sin, \beta = \frac{OC \cdot \sin c}{x}$$

și

$$\frac{2x}{\sin (b + c)} = \frac{OB}{\sin \beta} \quad \text{deci,} \quad \sin \beta = \frac{OB \cdot \sin (b + c)}{2x}.$$

Rezultă că:

$$\frac{OC \cdot \sin c}{x} = \frac{OB \cdot \sin (b + c)}{2x}$$

sau

$$\frac{\sin (b + c)}{\sin c} = \frac{2 \cdot OC}{OB} \qquad (2)$$

Inlocuind rapoartele

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin a} \quad \text{şi} \quad \frac{\sin(b+c)}{\sin c}$$

prin valoarile corespunzătoare din egalităţile (1) şi (2), obţinem:

$$(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)(\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c) = \frac{2\,OB}{OC} = \frac{2\,OC}{OB} \cdot \frac{1}{\sin^2 b} = \frac{4}{\sin^2 b} =$$

$$= 4 \cdot \frac{(\sin^2 b + \cos^2 b)}{\sin^2 b} = 4\left(1 + \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\right) = 4(1 + \operatorname{ctg}^2 b) \cdot$$

Rezultă că

$$(\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)(\operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c) = 4\,(1 + \operatorname{ctg}^2 b)$$

PROBLEME PROPUSE *)

1294. Dacă un şofer pretinde pentru efectuarea unui transport de 27 km cîte 0,50 lei pentru fiecare km/h al vitezei, maşina să parcurgă uniform această distanţă şi 0,40 lei pentru fiecare minut din durată, care trebuie să fie viteza pentru care costul transportului să fie minim?

Al. Matei, Bucureşti

1295. Să se afle unghiurile unui triunghi care satisfac relaţiile:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{60} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{35} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{48}.$$

M. Kacenovski (Moscova)

1296. Un motor electric de curent alternativ monofazat de 2 kw, 110 V şi $\cos \varphi = 0{,}8$ este alimentat printr-o linie de cupru cu secţiunea de 1,5 mm² avînd o lungime de 100 m. Să se afle căderea de tensiune din acea linie. Care ar trebui să fie secţiunea pentru ca în linie să nu apară o tensiune mai mare de 5%.

Sergiu Gh. Popescu, elev, Slatina

1297. Pe baza DC a unui dreptunghi $ABCD$ se ia un punct M. Perpendicularele din C şi D respectiv pe BM şi AM, se taie în P. Fie N piciorul perpendicularei din P pe DC. Să se arate că $DM = NC$.

Emanuel Cocoş, elev, Constanţa

1298. *a)* In ce caz o lentilă biconvexă confecţionată din sticlă cu un indice de refracţie $n = 1{,}5$ şi aflată în aer, va fi divergentă?

b) In ce caz o lentilă biconvexă confecţionată dintr-un meterial avînd un indice de refracţie n, mai mare decît indicele de refracţie a mediului înconjurător, va acţiona ca o lamă planparalelă?

* * *

1299. O corabie navigă în drum pe direcţia Est. La un moment dat, relevează un far în direcţia E — NE. După ce corabia a parcurs 4 mile marine, farul este relevat în direcţia NV. Să se calculeze distanţa dela far la drumul făcut de navă şi după cît timp decînd a fost văzut farul în direcţia E — NE acest far a fost văzut în direcţia Nord, viteza fiind constantă.

C. V. Costăchescu

---

*) La problemele propuse 1307 — 1330 se primesc soluţii pînă la 1 Noembrie 1954.

1300. Intr-un calorimetru se află un bloc de ghiață de 1200 g la 0°C. Aruncăm în calorimetru o bucată de plumb de 20 g la 250°C. Căldura latentă de topire a ghieții este de 80 cal/g, iar căldura specifică a plumbului este de 11 cal/g. *a)* Cîtă apă rămîne la sfîrșit; *b)* Care va fi temperatura apei; *c)* Care va fi temperatura finală a plumbului?

* * *

1301. Prin centrul de greutate G al unui triunghi ABC se duce o dreaptă oarecare care taie segmentele AB și AC respectiv în M și N. Să se arate că:

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3.$$

Florin Constantinescu, elev, Cluj

1302. In triunghiul ABC dreptunghic în A, perpendiculara în M pe BC, taie pe AB în punctul N. Să se arate că:

$$AN \cdot BC + MN \cdot AC = MC \cdot AB.$$

N. Gheorghiu, student, Iași

1303. Să se arate că:

$$(7 + \cos 4a)^2 = 32\,(1 + \sin^8 a + \cos^8 a).$$

C. Ionescu-Țiu

1304. Să se afle grafic distanța focală a unei lentile convergente dacă: mărimea obiectului este a, mărimea imaginei este b, iar distanța dintre lentilă și imagine este cu m mai mare decît distanța dintre obiect și lentilă.

Vasilescu Constantin elev, Călărași

1305. Se dă funcția $y = \dfrac{a - bx}{b - ax}$. Să se arate că reprezentarea grafică a acestei funcții este o curbă simetrică față de bisectoarea unghiului xoy. Să se reprezinte grafic în același sistem de axe dreptunghiulare xoy, funcțiile:

$$y = \frac{12 - 13x}{13 - 12x} \quad \text{și} \quad xy = \frac{25}{144}$$

și să se arate că aceste curbe determină segmente egale pe orice dreaptă paralelă cu bisectoarea unghiului xoy.

C. Ionescu-Țiu

1306. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{3x^2 - x + 2} + 2x - 6x^2 + 2 = 0.$$

Simon St. Petre, Tîrgu Mureș

1307. Să se rezolve ecuația:

$$x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x + 5 = 0$$

știind că:

$$x_1 x_2 = x_3 + x_4 + x_5$$

Constantin Berdan

1308. Dacă M și N sînt două numere prime între ele, cel mai mare divizor comun al numerelor $a^M - 1$ și $a^N - N - 1$ este $(a - 1)$.

* * *

1309. Să se arate că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, există inegalitatea:

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 3\,[a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Popescu I. Mihail, student, Bucureşti

1310. Dacă se adună un număr de trei cifre diferite cu răsturnatul lui, se obţine numărul 666. Să se afle acel număr.

N. C. Ciomu

1311. Să se demonstreze că dacă produsul $M \cdot N$ este de forma $2^m - 1$, atunci $M + 1$ şi $N - 1$ se divid printr-o aceeaşi putere a lui 2.

Gh. Buicliu

1312. Un solenoid umplut cu miez de fier moale produce un flux magnetic de 30000 maxwelli. Ştiind că intensitatea cîmpului magnetic din interiorul solenoidului, care are o secţiune de 15 cm^2, este de 40 oerstezi, să se calculeze inducţia cîmpului şi permeabilitatea miezului de fier.

Georgescu I. Emil elev, Alexandria

1313. Dacă U_1, U_2, U_3, U_4 ... sînt termeni ai şirului lui Fibonacci, să se arate că există relaţia:

$$\left(U_1 + U_2 + U_3 \ldots + U_{2n}\right) \cdot \left(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_{2n}^2\right) =$$
$$= U_{2n+1}\left(2U_{2n} + U_{2n-1} - 1\right)\left(U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2\right).$$

Indicaţie. Consultaţi broşura: *Numerele lui Fibonacci*, de N. N. Vorobiov (pag. 8—11).

Coşa Dan elev, Oraşul Stalin

1314. Considerăm triunghiul dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) şi cercul său circumscris. Tangenta în C taie cateta AB în U; tangenta în B taie cateta AC în V iar tangenta în A taie pe CU în H şi pe BV în K.

a) Să se arate că H este mijlocul lui CU şi să se deducă că BH taie înălţimea AD în mijlocul ei, apoi să se deducă că dreptele BH, CK, AD sînt concurente.

b) Să se arate că există relaţia:

$$\frac{UA}{UB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$$

c) Să se arate că dreptele BC, HK, UV sînt concurente.

N. N. Mihăileanu

1315. *a)* De tavanul cabinei unui vapor ce se mişcă uniform este atîrnată o greutate. Ce schimbare se produce în poziţia greutăţii dacă viteza vaporului se măreşte; se micşorează? Dacă vaporul întoarce spre stînga? se opreşte brusc?

b) Pe puntea unui vapor în mişcare un pasager aruncă în sus o minge. Cade aceasta înapoi în mîinile aceluiaşi pasager?

c) Pămîntul se învîrteşte dela apus spre răsărit. De ce totuşi, făcînd o săritură în sus, noi cădem pe acelaşi loc şi nu ne deplasăm spre apus?

* * *

1316. Un tren se mişcă pe un drum orizontal. Cum poate să stabilească un pasager, fără a privi pe fereastră, caracterul mişcării trenului (uniformă, accelerată, întîrziată)?

* * *

1317. O greutate cade de-a lungul catargului unui vapor care se află în stare de repaus. Cum va fi mişcarea greutăţii în raport cu catargul, la mişcarea uniformă, accelerată, întîrziată a vaporului, sau la o curbă?

* * *

1318. Indicaţi manifestarea acţiunii şi reacţiunii în următoarele cazuri: elicea trage avionul înainte; ciocanul împinge cuiul în perete; piatra cade pe pămînt; ventilatorul fixat în rama (giurgiuveaua) unei ferestre, goneşte aerul cu paletele sale.

* * *

1319. *a)* In ce constă inexactitatea expresiei: piatra cade fiindcă o atrage pămîntul?

b) De ce omul poate să ridice o greutate în mînă deşi această greutate acţionează asupra mîinii omului în jos cu o forţă identică cu aceea cu care mîna acţionează asupra greutăţii în sus?

* * *

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E. 505. Un părinte are doi copii, un băiat şi o fată. Adunînd la un loc cele trei vîrste obţinem 90 ani. Care este vîrsta fiecăruia, ştiind că vîrsta fetei este 1/2 din vîrsta băiatului, iar vîrsta tatălui este de trei ori mai mare decît a băiatului.

Roşianu C. Dragomir, elev, R. Vîlcea

E. 506. Să se afle puterea calorifică a unui combustibil care conţine 81 % carbon, 14 % hidrogen, 4 % oxigen şi 1 % sulf.

* * *

E. 507. O marfă a intrat în depozit la preţul de 1080 lei. După două reduceri de preţuri, acea marfă s-a vîndut cu 874,80 lei. Ştiind că reducerile au fost proporţionale cu noile preţuri ale mărfii, să se afle preţul mărfii după prima reducere de preţuri.

Ioan St. Muşat

E. 508. Intr-un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendiculara în C pe BC întîlneşte pe AB şi D, iar bisectoarea unghiului C taie latura AB în E. Să se arate că bisectoarele unghiurilor B şi C se taie, formînd un unghi de 45° şi că segmentele CD şi DE sînt egale.

C. I. Ţ.

E. 509. Un aliaj de 200 g, cu titlul de 0,870 se topeşte cu alte două aliaje de greutăţi egale: unul cu titlul 0,880 şi celălalt cu titlul 0,790. Se obţine un nou aliaj cu titlul 0,850. Care este greutatea aliajului obţinut?

* * *

E. 510. Suma a patru numere este 2037. Primul număr este 75 % din al doilea; al doilea este 30 % din al treilea şi al treilea este 68 % din al patrulea. Care sînt aceste numere?

C. I. Ţ.

E. 511. Fie A unul din punctele de intersecţie a două cercuri secante. Dreapta dusă prin cele două centre O şi O' taie cercurile respectiv în B, C şi D, E. Dreptele AD şi AC

---

*) Repartizarea pe clase: V (505; 507; 509; 510; 515) VI (506; 512; 513; 514) VII (508; 511; 516; 517; 518; 519; 520; 521). Se primesc soluţiile pînă la 1 Noembrie 1954 şi dela elevi de altă clasă.

taie cercurile respectiv în M şi N; iar dreptele MC şi ND se taie în punctul P.
Să se demonstreze că $PD = PC$.

M. D. Zigulescu, elev, R. Vîlcea

E. 512. Să se arate că

$$\frac{(-a+b+c)^2}{a}+\frac{(a-b+c)^2}{b}+\frac{(a+b-c)^2}{c}+$$

$$+8(a+b+c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2$$

Simon St. Petre

E. 513. Pe o dreaptă să luăm puncte în ordinea O, A, B, C şi să notăm cu M, N, P respectiv mijloacele segmentelor AB, BC, CA. Să se arate că:

$$OM \cdot AB + ON \cdot BC = OP \cdot AC$$

Mihai I. Popescu, student, Bucureşti

E. 514. Să se arate că

$$\frac{\dfrac{a+b}{x-y}+\dfrac{a-b}{x+y}}{\dfrac{x-y}{x-y}+\dfrac{y}{a}}-\frac{\dfrac{a+b}{x+y}-\dfrac{a-b}{x-y}}{\dfrac{x+y}{a+b}-\dfrac{y}{b}}=2\,\frac{\dfrac{a+b}{x+y}+\dfrac{a-b}{x-y}}{\dfrac{x+y}{a+b}+\dfrac{x-y}{a-b}}=2\,\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}$$

Cristea I. Ion, elev, Constanţa

E. 515. In ziua de 16 decembrie 1953, minierii dela mina Lonea III, au sărbătorit o nouă victorie a brigăzii minierului stahanovist Geza Kopetin, deputat în Marea Adunare Naţională a R.P.R., şi anume, extragerea primei cantităţi de cărbuni în contul anului 1957. După cum se ştie, la 16 aprilie 1953, această brigadă terminase sarcinile de plan pe întreg cincinalul. Să se afle în contul cărui an va lucra brigada sa la sfîrşitul cincinalului, considerînd că brigada va lucra în acelaşi ritm.

Ioan St. Muşat

E. 516. Să se arate că:

$$\frac{x^{n-1}-y^{n+1}}{x^{n+1}+y^{n+1}}-\frac{x^{n+1}-y^{n-1}}{x^{n+1}+y^{n+1}}-\frac{x^{n2}+y^{2n}}{x^{2n}+y^{2n}}=$$

$$=\frac{(x^{n-1}-y^{n+1})(x^{n+1}-y^{n-1})(x^{2n}-y^{2n})}{(x^{n-1}+y^{n+1})(x^{n+1}+y^{n-1})(x^{2n}+y^{2n})}$$

Ilie N. Constantinescu

E: 517. O locomotivă are puterea de 1600 CP. Să se calculeze consumul de cărbune pe oră dacă randamentul este de 7%. Să se ţină seamă că la o locomotivă cu puterea de 560 CP şi randamentul de 5,2 %, consumul de cărbune este de 975 kg pe oră?

* * *

E: 518. *a)* Obiectele de sticlă se sparg cînd cad pe piatră şi pot rămîne întregi cînd cad pe iarbă. De ce?

b) Pentru a fi transportate obiectele fragile se împachetează în talaj. De ce?

* * *

E: 519. In vagonul unui tren, pe măsuță se află o minge. Cum s-a schimbat mișcarea trenului dacă mingea s-a rostogolit înainte, înapoi, sau lateral în raport cu mișcarea trenului?

* * *

E: 520. Aburul transportă din cazanul unei locomotive în cilindrii mașinii de abur 3600 kcal de căldură pe secundă. Aburul de evacuare duce din cilindri 3100 kcal de căldură. Să se calculeze randamentul mașinii.

* * *

E: 521. Cîte rotații pe secundă fac roțile motoare ale unei locomotive cînd aceasta se mișcă cu o viteză maximă de 115 km/h? Diametrul roților motoare este de 1850 mm.

* * *

POȘTA REDACȚIEI

Răspuns la corespondența primită pînă la 15 iunie 1954

— *Floareș Alexandru, Roman.* Luăm act de angajamentul pe care l-ați luat ca să faceți cunoscută «Gazeta Matematică și Fizică» seria B, pentru tineret, tuturor elevilor școalei și să-i îndemnați să colaboreze la această revistă.

— *Ologu Pavel, Giurgiu.* Pe măsură ce vom dispune de spațiu în corpul acestei reviste, vom publica recreații matematice. *Problema propusă de dv. este cunoscută.*

— *Unui grup de elevi din clasa VII-a Popricani-Iași, unor elevi din Giurgiu și altora de la S.M.T.T din Sft. Gheorghe.* Socotim că e bine ca un număr mare de elevi dintr-o clasă să trimită rezolvări de probleme; însă cerem ca fiecare soluție să fie redactată individual. Soluțiile necorespunzătoare nu sînt anunțate.

— *Unui grup de 16 elevi din Tg. Jiu și tov. N. Idriceanu-Iași.* Reclamațiile pentru neprimirea revistelor sau acelea care privesc numărul insuficient de exemplare ce sosesc în localitate, precum și cereri de exemplare mai vechi din colecția revistei, trebuie adresate direct către «Centrul de Difuzare a Presei» din București, str. Const. Mille nr. 14.

— *Matei Margareta, Brăila.* Pentru abonamente la «Gazeta Matematică și Fizică», seria B, pentru tineret, vă adresați Oficiului Poștal, Brăila.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *)

EVIDENȚIAȚI

In cursul lunei aprilie 1954 s-au evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Iosifescu V. Marius (clasa XI-a, Pitești), *Bocu Mircea* (clasa X-a, Oradea), *Ionescu I. Ion* (clasa XI-a, Târgoviște), *Donescu St. Dragomir* (clasa X-a, Focșani). *Cocoș Emanuel* (clasa XI-a, Constanța), *Bătinețu M. Dumitru* (clasa X-a, Giurgiu), *Zigulescu D. Marin* (clasa X-a, R.-Vâlcea), *Jipa Gh. Vasile* (clasa X-a, Ploești), *Popescu Sergiu* (clasa X-a, Slatina), *Silion Dinu* (clasa XI-a, Ploești), *Ionescu V. Savin* (clasa XI-a, Pitești), *Fotă M. Stan* (clasa X-a, Giurgiu), *Matei Nicolae* (clasa XI-a, Tg.-Mureș), *Pandrea Nicolae* (clasa X-a, Focșani), *Nicolae St. Alexandru* (clasa X-a, 1.b.1., București), *Bădănac M. Alexandru*

---

*) Incepînd cu numărul următor vor fi anunțate numai numele rezolvitorilor care au completat un număr de minimum 10 soluții bune la probleme propuse în ultimele 4 reviste. Ceilalți rezolvitori vor fi anunțați după completarea numărului cerut.

(clasa X-a, Corabia), *Andreescu Radu* (clasa X-a, L.B.10, Bucureşti), *Buzuloiu Vasile* (clasa X-a, Oradea), *Serb G. Adrian* (clasa IX-a, Piteşti), *Cristea I. Ioan* (clasa IX-a, Constanţa), *Roşca I. Ion* (clasa X-a, L.b,10, Bucureşti), *Dabija Sorin* (clasa XI-a, Galaţi), *Pupăzan Nicolae* (clasa XI-a Predeal), *Graure I. Ştefan* (clasa XI-a, Slatina), *Alexandru Ştefan* (anul II S.M.T. hidrotehnică, Constanţa), *Pupăză N. Nicolae* (clasa XI-a, Tg. Mureş), *Butencu Igor* (clasa X-a, Oraşul Stalin), *Ianuc I. Corneliu* (clasa X-a, Focşani), *Robănescu Adrian* (clasa X-a, Focşani), *Saraci M. Dumitru* (clasa X-a, Piteşti), *Berechet M. Oprea* (clasa IX-a, L.b.5, Bucureşti), *Minzat Laurenţiu* (clasa IX-a, Cluj), *Tănase Dumitru* (anul II, S.M.T. măsurători terestre, Bucureşti), *Timpoc Dinu* (clasa X-a, L.b.2, Bucureşti), *Minui M. Petru* (clasa X-a, Piatra Neamţ), *Dogaru Ştefan* (clasa X-a, Focşani), *Budai Teodor* (clasa X, Suceava), *Bunica M. Octavian* (clasa XI-a, Tg. Mureş), *David Marta* (clasa X-a, Bîrlad), *Vlaga Marius* (clasa XI-a, Bîrlad), *Li-In-Hoan* (S.M.T. minereuri, Brad), *Buruiană Gheorghe* (clasa X-a, Focşani), *Baieră Bogdan* (clasa X-a, Focşani), *Zamfirescu Mihnea* (clasa XI-a, L.b.1, Bucureşti), *Rus A. Ioan* (clasa IX-a, Oradea).

* * *

Dela 1 la 25 aprilie 1954 s-au mai primit cel puţin cinci soluţii bune la problemele din ultimele cinci numere apărute, dela rezolvitorii la care sînt trecute numerele problemelor după numele fiecăruia, probleme propuse (P), articole (A) şi note (N) după cum urmează:

AIUD: clasa VIII-a. Peteanu Lucia (1118, 127, 128, 148, E: 411, 412, 418, 440, 443); clasa IX-a. Vrăjitoru Dan (1040, 42, 62, 63, 65, P).

ALBA-IULIA. Clasa XI-a. Torsan Ilie (1148, 152, E: 387, 389, 391, 398, 400, 404, 409).

ALEXANDRIA. Clasa X-a. Folescu Gheorghe (980, 986, 988, 999, 1000, 3, 5, 38, 42, 68, 69, 81, 84, 127, E: 363, 364, 365, 373, 382, 383, 384, 389, 390, 391, 392, 396, 397, 398, 400, P), Georgescu Emil (1002, 87, 152, 165, E: 396, 411, 412, 415, 418, 424, 426, 427, 428, 429, 431, 434, 435, 436, 438, 442, P).

ARAD. Clasa XI-a. Avramescu Bujor (1118, 127, 128, 129, 137, 141, 149, 152, 159, E: 386, 387, 389, 391), Vlaga Marius (1056, 58, 62, 64, 65, 68, 69, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 86, 87, 89, 90, 91, 95, 97, 98, 113).

BACĂU. Clasa VIII-a. Umbrărescu Dumitru (E: 404, 407, 425, 426, 428, 434); clasa IX-a. Cojocaru Constantin (1065, 78, 84, 93, 98, 118, 126, 165,) Hanu Ioan (1068, 84, 165, E: 356, 358, 411, 418,), Lazăr Mihai (1068, 69, 152, 165, E: 398, 409), Onofrei N. Grigore (1082, 68, 127, 148, 152, 159, 165, 183, E: 356, 373, 402, P), Merticaru Vasile (1040, 42, 69, 79, 87, 88, 102, 118, 121, 127, 148, 159, 165, 183), Mălinici I. Mircea (1084, 145, 152, 167, E: 403, 406, 409, 411, 412, 418, 424), Palaghiţă I. Ştefan (1000, 19, 37, 84, 98, 118, 125, 127, 128, 148, 165, E: 407, 409, 411, 415, 418, 441, 443, 445), Popa V. Lucian (1068, 69, 79, 81, 84, 152, 165, E: 353, 381, 382, 389, 425, 428), Savin Constantin (1038, 98, 127, 128, 148, 165, E: 353, 356, 359, 361, 362, 370, 371, 373, 378, 382, 387, 396, 404, 418), Stan Gheorghe (1084, 152, 165, E: 411, 418, 428), Simion I. Emil (1043, 68, 78, 81, 86, 87, E: 370, 373, 378, 382), Subţirelu V. Gheorghe (E: 370, 371, 380, 387, 409, 426, 428, 429), Tofan Vasile (1068, 69, 87, 152, 159, 165, 183); clasa XI-a. Neacşu C. Octavian (973, 974, 1033, 68, 69, 79, 87, 152), Vaisbuch Leon (1065, 68, 78, 79, 81,0 84, 126, 152, 159, 165, 183).

BALŞ (CRAIOVA). Clasa VI-a. Babău Eliza (E: 434, 435, 436, 438, 441,) Berinde Elena (E: 434, 435, 436, 438, 441), Brad Elena (E: 434, 435, 436, 438, 441), Cîlţan Doina (E: 434, 435, 436, 438, 441), Nicoară Sonia (E: 434, 435, 436, 438, 441); clasa XI-a. Târnăveanu Marius (1149, 152, E: 403, 404, 411, 414, 417).

BÎRLAD. Clasa IX-a. Pavel Nicolae (E: 441, 447, 449, 454, 455); clasa X-a. David Marta (1065, 66, 68, 71, 78, 79, 80, 82, 83, 88, 89, 90, 91, 118, 124, 125, 126, 127, 128, 130, 142, 143, 148, 152, 165). *Şcoala Răcoasa* (Panciu), clasa VI-a. Porumb Mircea E: 402, 407, 411, 413, 420, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 433, 434, 435, 436, 440, 441, 442, 443).

BAIA MARE. Mureşan Traian (986, 988, 1038, 43, 65, 73, 84, 87, 88, 118, 126, 152, 165, 178, 179, 183, E: 411, 418).

BOTOŞANI. Clasa V-a. Aritonovici Emilia (E: 425—433), Voloşencu Lucia (E: 425—433) Iftimie Vasile (425—433); clasa VI-a. Herşcu Ozias (E: 434, 435, 438, 439, 440, 441), Sin R. Idil (434, 435, 436, 438, 441), clasa VII-a. Bîrzoi Maria (E: 411, 412, 415, 424, 425 ; clasa VIII-a. Fraiberg Ella (E: 411, 412, 415, 424, 425), Filip Mariana (E: 411, 412 415, 418, 424); Vieru Tatiana (E: 411, 415, 418, 424); clasa IX-a. Vamanu Elena (E: 353, 371, 375, 378, 404, 411, 418, 445); clasa X-a. Avram Lucia (1053, 54, 93, 171, 173, 175, 183), Casianov Eugenia (1165, 171, 179, 181, 183); clasa XI-a. Wechsler Etty (1079, 81, 85, 90, 118, 159, E: 356, 370, 371, 389, 397, 402, 409).

BRAD. Şcoala medie tehnică de minereuri. Amăruţei Margareta (1149, 157, 183, 188, 208), Baculea Paul (1152, 165, 183, 204, 207), Brîndean Ioan (1149, 151, 152, 157, 183, 201), Circu Teodor (1149, 152, 157, 159, 183, 188), Ciucur Marin (1126, 149, 152, 159, 183, 208), Cîmpeanu Victoria (1149, 152, 165, 183, 201), Coposu Constantin (1097, 126, 149, 152, 201), Cristea Estera (1157, 183, 201, 203, 208), Dogaru Steliana (1126, 149, 152, 165, 183, 203, 208), Dărău Gheorghe (1151, 152, 159, 165, 195, 203), Hăgăruş Dumitru (1149, 150, 152, 159, 195, 201, 207), Li-In-Hoan (1097, 113, 126, 128, 149, 150, 151, 152, 157, 159, 165, 174, 175, 183, 184, 188, 195, 201, 203, 204, 207, 208), Loga Ioan (1102, 152, 159, 183, 207, 208), Lupei Voicu (1126, 128, 134, 149, 150, 151, 152, 157, 159, 165, 183, 184, 188, 195, 201, 203, 204, 207, 208), Mărcuş Simion (1126, 149, 152, 165, 183, 207), Matei Gheorghe (1126, 128, 149, 152, 207), Păpai Ana (1152, 183, 184, 188, 195, 201, 207, 208), Pîrva Adina (1097, 126, 128, 149, 152, 157, 159, 165, 183, 188, 208), Salapa Vasile (1126, 149, 151, 152, 157, 165, 183, 207, 208), Sgondea Doina (1126, 149, 152, 159, 165, 183, 195, 201), Slihinski Lidia (1126, 150, 152, 201, 207), Trifu Florin (1149, 151, 152, 183, 201, 203, 208), Tudoran Ioan (1149, 150, 152, 183, 201, 204, 207), Vaida Alexandru (1097, 126, 140, 149, 150, 151, 152, 159, 165, 175, 183, 184, 188, 195, 203, 204, 207, 208), Vlad Ionel (1097, 126, 149, 151, 165), Voicu Olaru (1126, 149, 150, 165, 201), Zan-Ion-Zic (1126, 128, 149, 152, 157, 159, 165, 183, 188, 208).

BUCUREŞTI. *Liceul 1 fete.* Clasa VI-a. Sălăgeanu Simona. (E: 370, 382, 425—433). Clasa X-a. Cruceanu Viorica (1086—1090, 1118, 121, 140, 150, 151, 162, 164, 169, 175, 185, P), Filimon Rodica (1061, 70, 85, 124, 125, 126, 137, 140, 165, 183, 194, P). *Liceul 3 fete.* Clasa VIII-a. Cîmpu Demetra (1078 81, 84, 108, E: 369, 370, 371, 373, 378, 380, 381, 389, 391, 397, 398, 402, 407, 409, 411, 412, 414, 415, 418, 424, 426, 427, 428, 429, 431, 435, 441, 442, 443, 444, 447, 452, 4t56). *Liceul* 2-10-13 *fete.* Clasa VII-a. Butoi Mihaela (E: 411, 412, 415, 416, 419, 420), Ivănceanu Tatiana (E: 411, 412, 413, 414, 416, 420, 421); clasa X-a. Fumărel Olga (1127, 165, E: 14, 414, 416), Gongea Valentina (1080, 98, 183, E: 370, 373, 381), Guţu Anca (1098, 121, 124; E: 412, 41, Roceric Maria (1036, 40, 42, 43, 55, 58, 65, 69, 70, 78, 79, E: 350, 351, 355, 358, 359), Umbreanu V. Aurica (E: 396, 406, 409, 411, 412, 418,)*Liceul* 5-7-8 *fete.* Clasa X-a. Constantinescu Ioana (1053, 54, 55, 68, E 406); clasa XI-a. Rojan Liana (1098, 124, 126, 127, 148, 159, E: 370, 38, 397, 402, 405, 406, 407).

Liceul 2 fete. Clasa VIII-a. Dogaru D. Voica (E: 384, 387, 389, 390, 391, 392, 395, 396, 398, 400, 402, 411, 412, 418).

Şcoala 11 Fete. Clasa V-a Pădureţ Maria (E: 425, 426, 427, 428, 429, 43, 432, 433).

Liceul 1 băieţi. Clasa VIII-a. Basarab Şerban (1084, 98, 102, 109, 152, 159, E: 370, 371, 373, 374, 378, 383, 401, 402, 404, 101, 416, 423, 442) Schileru I. Dinu (1152, E: 402, 411, 412, 413, 448); clasa X-a. Iosif I. Dan (1038, 79, 80, 81, 83, 84, 88, 91, 98) Litinshi Mihai (1079, 80, 87, 88, 118, E: 387, 390, 402, 404, 406, 407, 411, 412, 415, 418, 442, 426, 427, 429, 434, 438, 440, 441, 442, 443), Nicolae St. Alexandru (951, 1029, 30, 33 35, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 48, 53, 54, 55, 57, 58, 61, 62, 63, 65—72, 76, 78—83), Zamfirescu Mihnea (1037, 40, 42, 55, 63, 69, 81, 84, 87, 113, 119, 121, 124-128, 148, 152, 165,

165, 166, 173, 179); Clasa XI-a Istinie Crăciunel (1165, 175, 183, E: 413, 417, 429, 434, 442, 443, 444) *Liceul 2 băieți.* Clasa VIII-a. David José (355, 358, 362—365, 378, 396, 405, 411, 412, 413, 418), Duduica C. Radu (1089, 91, 121, 175, E: 390, 43, 436, 439, 441—444, 452, P). Herbert Singer (E: 355, 358, 362-365) clasa X-a. Solomon Sergiu (1029, 65, 66, 68, 69, 70, 93, 118, 124, 126, 129, 149, 152, 159, 165, 183, 185).

Liceul 3 băieți. Clasa VIII-a. Dobre Ion (E: 353, 358, 370, 411, 412, 419, 426).

Liceul 4 băieți. Clasa VIII-a. Stănescu N. Radu (1159, E: 325, 328, 331, 337, 345, 346, 347, 354, 358, 370, 382, 385, 387, 389, 391, 392, 397, 400, 405). Clasa X-a. Grigore N. Lucian (1054, 58, 65, 67, 69, 78, 79, 80, 81, 82, 165, 183).

Liceul 5 băieți. Clasa IX-a. Berechet M. Oprea (994, 1029, 33, 35, 38, 40, 43, 55, 57, 61, 62, 65, 68, 69, 79, 80, 81, 90, 91, 93, 98, 106, 113, 126, 127, 128, 129, E: 360, 377, 380, 401, 402, 404, 406, 411, 412, 416, 418, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 434, 436, 440) Stanciu Alexandru (1004, 37, 38, 68, 69, 79, 80, 106, 127, 128, 140, 148, 159, 165, 191, E: 378, 389, 398, 402, 404, 428); clasa X-a. Petrescu A. Ştefan (1149, E: 394, 406, 408, 411, 412, 413, 415, 418, 423, 424).

Liceul 6 băieți. Clasa IX-a. Luzi Florea (1040, 55, 79, 80, 159, E: 352, 390, 396, 400, 402, 404, 409, 411, 412, 415), Păltineanu Dan (1033, 38, 40, 47, 55, 61, 65, 68, 69, 73, 79, 80, 84, 87, 98, E: 355, 358, 359, 364, 365, 366, 367, 370), Popovici I. Radu (1065, 80 93, 165, 179, E: 414, 412, 415, 418, 421, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 438, 442, 443, 446); clasa X-a. Kestenband Barbu (979, 1048, 125, 128, 132, 142, 154, 159, 165, 169, 174, 175, 179. 183, 185, 186, 188).

Liceul 7 băieți. Clasa VII-a. Maftei C. Alexandru (E: 408, 411, 442, 454, 443); clasa IX-a. Stegăroiu Radu (1037, 152, 40, 42, 84, E: 350, 351, 370, 373, 379, 397); clasa X-a. Lucreţianu Dorin (1061, 70, 103, 104, 128, 159, 165, 179, 183, 185); clasa XI-a. Cosmin Dan (1083, 38, 40, 41, 42, 43, 141, 149)

Licel 9 băieți. clasa IX-a. Ellenberg M. (1029, 40, 43, 65, 79, 90, 98, 128, 159, 165, 191); clasa XI-a. Chioveanu Emil (1053, 55, 57, 58, 61, 62, 65, 68, 69, 70, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83), Răzuş Alexandru (1051, 53, 54, 55, 58, 61, 62, 65, 67, 68, 70, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83).

Liceul 10 băieți «Aurel Vlaicu». Clasa VIII-a. Adam Marian (1028, E: 354, 358, 386, 400), Filcescu Viorel (E: 411, 417, 418, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 438, 441, 442, 445), Nistreanu N. Valeriu (1084, E: 362, 380, 401, 405, 409, 411, 412, 415, 418, 419, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 437, 438, 441, 446); clasa IX-a. Maria Pavel (1038, 68, 78, 84, 98, 127, 148, 165, E: 353, 354, 366, 370, 372, 380, 381, 382, 383, 387, 389, 391, 392, 400, 404, 418), Todescu Cornel (1085, 93, 121, 165, 406, 411, 447), Petre T. Petre (1148, E: 402, 409, 413, 421); clasa X-a. Alvirescu Gavril (1099, 106, 141, 142, 148, 149, 151, 158, 159, 165, 167, 169, 183, 189), Palade Doru (1099, 124, 128, 141, 159, 165, 167, 169, 171, 183, 189), Roşca I. Ioan (1033, 38, 40, 53, 62, 63, 64, 65, 67, 70, 72, 80, 82, 85, 87, 91—96, 98, 102, 127, 128, 129, 137, 140, 148, 149, 151, 152, 157, 159, 165, 167, 171, 189, 208); clasa X XI-a. Alexe M. Gheorghe (1067, 106, 110, 121, 139, 152, 162, 183), Radu Negru Lucian (1041, 68, 76, 79, 82, 84, 88, 106, 110, 121, 139, 149, 152, 162, 193), Nica Nicolae Barbu (E: 425—E: 446), Stroescu Gheorghe (1084, 85, 87, 88, 90, 94, 132, 165, 183). Andreescu Gh. Radu (1140—146, 148—171, 173, 174, 175, 177—190).

Liceul 11 băieți. Clasa VI-a. Bogdan Alecu (E: 353, 358, 361, 370, 371, 387, 396, 397, 398, 409).

Şcoala hidrometeorologică. Anul I. Ganea Marin (E: 402, 406, 411, 412, 418).

Şcoala medie tehnică de construcţii. Anul II. Şerban Gheorghe (1165, 183, E: 412, 418, 431), Foma Mihai (1084, 87, 88, 118, 152, E: 369, 370, 371, 372, 374, 376, 377, 378, 380, 381, 382, 383, 384, 387, 389, 391, 392, 395, 396, 399, 400, 401, 402, 404, 405, 406, 409, 410, 414).

Şcoala medie electrotehnică. Anul II. Dicu Gheorghe (1106, 353, 354, 358, 363, 365, 370, P), Ţăranu Florea (1074, 159, 165, E: 358, 365, 414, 411, 412).

S.M.T. măsurători terestre, anul II. Maftei Nicolae (1128, 165, 201, E: 389, 391, 394, 398, 400); anul III. Tănase Dumitru 1112, 122, 123, 129, 130, 140, 142, 149, 152, 154, 162, 165, 167, 169, 171, 175, 179, 183, 185, 186, 190, 194, 195, 201, 202, 203, E: 386, 402, 403, 404, 406, 407, 409, 419, 421, 444, 446—449, 451—455), Vasile Bălu (1118, 139, 152, 167, 179, 183, E: 397, 396, 404, 407, 409—413, 415, 416, 417, 425—431, 434—436, 439—447).

Şcoala medie tehnică mecanică nr. 2, anul I. Butnaru Iacob (358, 373, 378, 402, 411, 412, 426, 427, 440, 441), Chican Gheorghe (1065, 84, E: 358, 370, 376, 412, 426, 429,) Dan Maria (E: 372, 382, 389, 411, 418, 426, 428, 429, 441, Dinescu Mircea (1159, 358, 370, 372, 382, 402 412, 418, 426), Dumitrescu Ion (E: 378, 381, 400, 406, 411, 412, 415, 418, 428, 441), Ilinca P. Gheorghe (E: 358, 370, 372, 382, 389, 411, 412, 426, 428, 429), Lucian Cojocaru (1159, E: 358, 370, 375, 402, 408, 411, 412, 448), Pescaru Nicolae (1065, 68,78, 81, 84, E: 354, 369, 370, 371, 372, 375, 378, 382, 384, 387, 389, 391, 397, 398, 407, 409, 426, 428), Văduva Ion (E: 389, 395, 411, 412, 418, 426, 428, 440, 441, Velicioglu Dumitru (E: 358, 370, 372, 382, 389, 402, 411, 428, 429), Vlad Radu (E: 372, 382, 389, 402, 411, 418, 428); anul II. Caragea I. Gheorghe (E: 370, 379, 402, 409, 411, 418, 425, 426, 428, 429), Cristea Gheorghe (E: 354, 358, 370, 371, 372, 375, 382, 389, 394, 397, 407, 411, 412, 418, 426 427, 428, 431, 441), Bădescu Nicolae (1063, 65, 68, 69, E: 370 379, 382, 389, 391, 395, 398, 402), Grigoriu Maria (E: 350, 358, 362, 370, 372, 402, 411, 429), Lupu Aurel (E: 370, 372, 379. 382, 389, 391, 392, 411, 428,) Grigoraş Aurel, (E: 370, 379, 382, 389, 391, 394, 398, 418, 428, 434), Dăscăliţa N. Teodor, (1069, E: 353, 358, 370, 387, 411, 412, 426, 428, 441), Munteanu Aurel (E: 258, 370, 309, 402, 411, 412, 426, 428, 434, 441,) Drăgănescu Petre (E: 358, 362, 370, 371, 376, 389, 392, 411, 412, 426, 429, 441,) Nicolae V. Constantin (E: 354, 358, 370, 372, 375, 380, 382, 387, 389, 406), Rotaru Nicolae (E: 354 358, 370, 372, 375, 389, 394, 411), Smărăndoiu Aurel (1061, 63, 65, 68, 69, E: 358), Soare Constantin (E: 370, 389, 394, 411, 412, 426, 428, 429, 431, 441), Surciceanu Lidia (E: 372, 389, 411, 418, 426, 428, 429), Stănică Gheorghe (E: 350, 370, 371, 379, 382, 394, 402, 426, 429,) Segal Armand (1069, E: 358, 370, 387, 411, 412, 426, 428, 429, 435), Vînturiş Gheorghe (E: 354, 358, 370, 372, 374, 375, 389, 397, 407, 411, 412, 418, 426, 429, 431), Voicilă Sergiu (E: 358, 362, 370, 371, 379, 38, 409, 426, 429, 441), Zilişteanu Alexandru (1061, 63, 65, 68, 69, E: 370, 371, 372, 379, 382, 389, 391, 392, 395, 396).

Şcoala 40 băieţi. Clasa VII-a. Draica C. Constantin (E: 411, 412, 413, 421, 426, 428, 429, 436, 442, 443, 446).

BUZĂU. Clasa IX-a. Carpat Letiţia. (1152, 1149, 1194, 1212, E: 451), Arhire Cornelia (1165, 179, 183), E: 407, 411, 412, 413), Borescu T. Dragoş (1183, E: 389, 391, 402, 403, 411, 412, 416, 418, 442, 444), Bărbulescu Eugen (1118, 183, E: 370, 373, 371, 391), P9, Haidău Aurel (1069, 79, 148, 152, 159, E: 402, 403, 418,) Ioniţă Aurelia (1183, E: 355, 362, 401, 402, 403, 404, 406, 407, 411, 412, 413, 415), clasa X-a. Popescu N. Ion (1137, 140, 148, 152, 165, 179, 183, 185, E: 402, 406, 407, 409, 412, 413, 415, 418, 426, 428, 429, 431, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446); clasa XI-a. Stoicescu T. Dumitru (1118, 124, 125, 126, 127, 148, 149, 151, 152, 154, 157, 165, 174, 185),

CĂLĂRAŞI. clasa VIII-a. Guţulescu Aurel (E: 358, 362, 389, 398, 412, 413, 418), Ionel I. Aurel (1191, E: 413, 416, 425, 426, 427, 428, 429, 435, 436, 440), Manolescu I. Ilie (1068, 78, 84, 102, 106, E: 378, 381, Simionescu I. Dumitru (1068), E: 338, 355, 336, 359, 378, 381, 387, 390, 392, 402, 404, 436); clasa X-a. Mazilu N. Constantin (1029, 35, 37, 68, 82, 83, 98, 121, 148, 149, 152, 159, E: 404, 421, 422, 426, 435,); clasa XI-a. Vasilescu Costantin (1002, 9, 14, 23, 29, 55,); S.M.T. mecanizarea agriculturii. Banu

Alexandru (1087, 118, 154, 165, 169, 183, E: 411, 412, 415, 418), Petrovici Gheorghe (E: 406, 427, 428, 429, 433, 434, 440).

CÎMPINA. S.M.T. Petrol, anul III. Căciulă Ion (1055, 63, 65, 69, 78, 79, 81, 82, 84, 98, 105, 127, 128, 139, 161), Doboş Maria (1053, 55, 63, 65, 73, 81, 82, 86, 88, 98, 102, 105, 127, 139, 165).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. *Liceul mixt.* clasa VIII-a. Apetrei Nicolae (E: 402, 409, 411, 413, 428).

CÎMPULUNG—MUSCEL. Absolvent. Ilioiu C. Aurelian (1065, 68, 69, 78, 81, 89, 128); S.m.t. cărbuni, anul III. Opriş A. Ioan (1038, 52, 66, 67, 68, 70, 73, 78, 81, 84, 102, 107, 118, 127, 152, E: 350, 351, 364), Popescu F. Mihai (1102, 7, E: 358, 362, 364, 365, 371, 409, 441), Savin I. Dan (1036, 38, 43, 47, 54, 65, 67, 68, 70, 74, 75, 82, 128, 174, P); *Şcoala pedagogică băieţi.* Anul I. Feleanu Gheorghe (E: 412, 413, 414, 426, 427, 433, 436), anul IV. Duţă I. Gheorghe (E: 356, 361, 382, 426, 427,) *Liceu.* Clasa VIII-a Negrea C. Marian (1084, E: 370, 379, 387, 392, 396, 397), clasa X-a. Irimia Carmen (1002, 69, 78, 84, 98, 127, 128, 137, 148, 149, 152, 159); clasa XI-a. Serban Ion (1084, 98, 124, 126, 143, 150, 152, 154, 157).

CARACAL. Clasa X-a. Vintilă Sterie (1140, 148, 165, 185, 186, 190, P). *Şcoala Redea.* Clasa VI-a. Mihăilescu I. Viorel (E: 405, 425, 434, 435, 438).

CHITILA *(Bucureşti).* Clasa VII-a. Chiru Constantin (E: 354, 356, 361, 365), Ciuntu M. Florin (E: 354, 356, 361, 364, 365), Constantinescu Remus (E: 352, 353, 354, 357, 385, 408), Grigoriu G. Anca (E: 352, 353, 354, 366), Vasilache Ştefan (E: 352, 353, 354, 357, 386.

CLUJ. Clasa VIII-a. Costin Lucia (1058, 68, 128, E: 389, 391, 402, 404, 418, 442, 443 ; clasa IX-a. Minzat Laurenţiu (1029, 35, 37, 38, 40, 41, 43, 55, 58, 62, 67, 69, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 92, 98, 98, 99, 152); clasa X-a. Malai Marius (1068, 78, 84, 152, E: 353, 358, 361, 371, 375, 398, 406, 409, 411, 412, 413, 418), Popa Felician (1062, 65, 68, 69, 84, 98, 106, 121, 125, E: 356, 362, 363, 364, 365, 370, 380 . *Şcoala Greaca.* clasa VI-a. Hodiş Gavril (E: 425, 426, 428, 429, 434, 439, 440, 441,) *Şcoala Specială de 2 ani.* Apolţan Ion (959, 1121, E: 350, 358, 404), Chelemen Mihai (E: 380, 381, 391, 411, 418), Comşa Aurel (1121, E: 350, 354, 358, 404,) Cuţuş Mihai (1097, 148, 152, 165, 183, E: 404), Negoiţă Nicolae (E: 353, 354, 358, 390, 394), Pistol Niculae (1167, E: 351, 390, 401, 411, 418), Sîngereanu Gheorghe E: 398, 411, 412, 415, 418), Miclăuş Tiberiu (1024, 152, 165, 183, E: 418), Sfîrlea Vasile (1097, 152, 183, E: 350, 404), Suciu Aurel (E: 350, 351, 376, 401, 414, 418), Szapanyos M. (1097, 152, E: 350, 351, 404), Soaită Viorel ((1097, 148, 152, 183, E: 404), Rusu Alexandru (E: 350, 372, 381, 391, 401, 411, 418,) Tutu Petre (E: 351, 372, 376, 391, 401, 411, 414, 418), Zentennay Arpad (1097, 148, 152, 183, E: 404).

CONSTANŢA. Clasa IX-a. Cristea Ion (1102, 106, 119, 123, 130, 134, 135, 142, 145, 146, 149, 150, 154, 162, 169, 190, 193, 195, 202, 203, 204, 208, P); clasa X-a. Mitescu Constantin (1149, 152, 154, 159, E: 404, 400, 435, 439, 441); clasa IX-a. Cocoş Emanuel (1093—1100, 102, 106, 11, 113, 118, 121—130, 132, 133, 135, 137, 140, 142, 145, 146, 148—155, 157, 159, 161), Ceacîru Valentin (1055, 57, 58, 61, 65, 66 ,68, 69, 78, 79, 81, 82), Sachelarie E. Nicolae (1038, 54, 55, 58, 61, 62, 66, 69, 82, 91, 140, 148, 149, 152, 183), Kümbetlian G. (1076, 151, 161, 165, 166, 167, 170, 171, 173, 179, 183, 185, 188, 191, E: 411, 412, 415, 418, P); clasa VIII-a. Omer Caidu (E: 387, 389, 391, 395, 397, 399). *Şcoala hidrotehnică.* Anul I. Abzait Fichiret (1062, E: 357, 370, 382, 410, 414, 422), Lenghel Silvia (1070, 84, E: 353, 354, 358, 371, 375, 382, 392, 398, 401, 402, 405, 406, 409, 410, 412, 415, 418, 447, 454), Dumitru Maria (E: 370, 405, 406, 411, 412, 418), Ilie Timofte (E: 401, 402, 411, 412, 414, 421, 423,) Caraman Cheraţa (E: 363, 365, 367, 371, 392, 398, 401, 402, 409, 411, 412, 420, 421, 422), Mihai I. Ion (E: 389, 391, 392, 398, 410, 413, 435), Vasi-

liev Lucia (1084, 154, E: 370, 371, 375, 382, 398, 402, 405, 409, 410, 412, 420), Movilă Ghenea (E: 370, 398, 411, 412, 425, 426, 428), Pop V. Valeriu (E: 353, 389, 391, 392, 398, 405, 409, 410, 413, 429, 435), Tutelea Stelian (E: 389, 391, 392, 398, 410, 413, 42), Crăciun Nicolae (E: 370, 382, 391, 392, 398, 402, 405, 412, 413, 421), Ghencea Adrian (E: 398, 402, 407, 411, 426, 429, 442), Neagu Nicolae (E: 370, 371, 411, 412, 426, 428), Prodănescu Steluța (E: 358, 392, 398, 402, 409), Ridvan adim (1102, E: 370, 387, 391, 392, 395, 396, 400); anul II. Cerbureanu I. Aurelian (1038, 65, 68, 69, 78, 81, 102, 118, E: 353, 356, 357, 360, 365, 372, 375, 382, 383, 384, 385, 387, 398, 402, 410, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 433, 434), Cîrjoli Haiati (1065, 68, 69, 78, 81, 84, 118, E: 356, 365, 377, 384, 385, 387, 398,) Alexandru Ştefan (1000, 37, 53, 55, 62, 65, 68, 69, 73, 73, 78, 79, 80, 81, 82, 84—89, 91, 93, 95, 98, 102, 105, 106, 121, 127, 128, 136, 152, E: 350, 355, 356, 362, 364, 365, 381, 383, 385, 386, 387, 389, 390, 391, 396, 397, 398, 400). Băcioi Nicolae (1084, 87, 91, 98, 102, 105, 106, 126, 165, 183, 185, E: 353, 354, 358, 360, 362, 365, 368, 377, 380, 411, 412, 416, 418, 426, 428, 429, 431, 434, 435, 441, 442), Giumba Dumitru (E: 369, 370, 375, 398, 413, 426 429), Duagi Oxel (1065, 68, 102, 118, E: 357, 365, 385, 402, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 433, 434, 435), Şerban A. Zaharia (1068, E: 353, 354, 355, 356, 360. 361, 362, 364, 365, 370, 382), Ştefan Ionel (1042, 47, 53, 65, 68, 69, 78, 80, 102, 118, E: 353, 355, 356, 357, 360, 365, 383, 384, 385, 387, 402, 410, 425, 426, 427, 48, 429, 431, 443), Vanghelicescu Sterea (1062, 68, 78, 79, 87, 88, E: 358, 365, 368, 375, 385, 402, 420, 425, 426, 427, 429, 424, 435); clasa VII-a. Ştefan Mihai (E: 356, 357, 358, 361, 362, 365, 358, 370, 389).

CORABIA. Clasa X-a. Bădănac M. Alexandru (1006, 7, 10, 12, 14, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 26, 27, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61).

CRAIOVA. *Liceul 1 băieți.* Clasa X-a. Antonie Ştefan (1040, 81, 84, 118, 121, 152), Radu Alexandru (1084, 126, 127, 128, 152, 165, E: 387, 389, 402, 403, 407); clasa IX-a. Truță Coriolan (E: 401, 410, 425, 446), Trifan Vasile (1152, 165, 183, E: 418, 425); clasa X-a Ion N. Matei (1038, 43, 55, 61, 65, 68, 78, 81, 84, 165, 183, E: 403, 411, 412, 415, 418, 426, 427, 428, 431, 441, 442), Cojocaru Alexandru (1152, 165, 181, 183, 185, E: 402, 404, 407); clasa XI-a. Florescu Gh. Mircea (1033, 80, 81, 87, 88, 90, 91, 94, 100, 111, 121, 126, 140, 141, 149, 151, 153, E: 355, 378, 411, 413, 418, 421, 442, 443, 445,). *Liceul 2 băieți.* Clasa VIII-a. Bărbulescu Nicolae (1118, 127, E: 353, 358, 373, 375, 384, 401, 406, 408, 409, 411, 415, 424, 426, 428, 429, 434, 44, 443, 447); clasa X-a. Sandu Titu (950, 971, 972, 992, 999, 1000, 13, 20, 35, 38, 39, E: 350, 356, 361, 364, 378, 389, 391, 396, 397, P); clasa XI Guran A. Marius (1029, 82, 84, 89, 98, 121, 126, 127, 128, 152, E: 353, 355, 358, 359, 360, 361, 370, 372, 373, 378, 381, 394), Ene Gh. Apostol (1035, 69, 118, 127, 159, 165, 179, 186, P); *liceul 2 fete*, clasa X-a. Mitran Parascviva (1033, 38, 40, 68, E: 361, 362) Păun Elena (1078, 126, E: 369, 370, 371); *S. m. t. construcții.* Anul II. Dicu D. Marin (1046 78, 140, 143, 165, 173, 181, 183, E: 352, 353, 362, 392, 394, 398, 401, 402, 404, 411, 412, 315, 416), Florea M. Dumitru (1165, E: 411, 412, 414, 418, 429, 434, 440), Săulescu Viorica (E: 344, 411, 415, 416, 418), Nedelcu N. Marin (1168, E: 387, 389, 394, 405, 412, 413, 416, 426, P), Radu C. Nicolae (1143, 173, 183, E: 411, 414, 416, 418, 429, 431, 440), *S.m.t. electrotehnică*, anul II. Bărbuică Nicolae (1055, 65, 66, 87, 93, 141, P), Chitucea Eugen (1040, 58, 68, 124, 152, 159, 183, E: 363, 373, 382, 387, 403); *Şcoala elementară Țiu (Filiași)* Clasa VII-a. Ionescu N. Constantin (E: 442, 443, 444, 445, 446); *Şcoala elementară Simnicu de sus.* Clasa VII-a. Bencea Ştefan (E: 426, 428, 441, 442, 445); *Şcoala elementară Gighera.* Clasa VII-a Petrescu Viorel (E: 351, 356, 361, 378, 404).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VI-a. Duculan Paraschiva (E: 425, 428, 434, 435, 436); clasa VIII-a. Bardar Marilena (1038, E: 359, 362, 378, 396, 401, 411, 412, 418), Pririceanu Margareta (1038, E: 359, 362, 378, 406, 418); clasa IX-a. Dumitrescu I. Aurel (1152, 165, 183, E: 404, 405, 411, 412, 415, 418, 428, 434, 436, 441, 442, 443, 444), Preda I. Adrian (1152,

1651, 183, E: 404, 405, 411, 412, 415, 418, 428, 434, 436, 441, 442, 443, 444); clasa X-a. Florescu Constantin (1022, 28, 89, 148, 152, 154, 159, 161, 165, 167, 174, 179, 181, 183, 185, 194), Urluescu Gh, Ion (1110, 152, 165, 167, 174, 179, 183), Ene St. Ion (1152, 154, 159, 165, 183, E: 404, 405, 406, 411, 412 415); *S.m.t.industria lemnului.* Anul I. Manea Sabina (1038, E: 359, 362, 378, 396, 411, 412, 413, 418, 442).

DEJ. Clasa VIII-a. Silaghi Silvia (E: 411, 412, 425, 426, 428, 429, 431, 441), Mangu Ileana (E: 425, 426, 427, 428, 429, 431, 435, 440), clasa XI-a. Ghiricuță Gh. (1062, 68, 81, 82, 83, 84, 98).

DEVA. Clasa VII-a. Gîrbav Emil (E: 411, 413, 415, 416, 418), absolvent Draica Constantin (1101, 159, 165, 168, E: 396, 408, P).

DOROHOI. Clasa VIII-a. Robinsohn Haim (E: 380, 382, 387, 389, 391, 392, 397); clasa IX-a. Jăşcanu Mihai (E: 401, 402, 404, 405, 409) clasa X-a. Burciu B. Ion (1098, 126, 156, 171, 183, E: 378, 380, 381, 382, 409, 411, 412, 415, 418); clasa XI-a. Eftimescu Nicolae (1055, 62, 84, 140, 149, 152, E: 361, 365, 370, 373, 378, 390, 394, 398, 402, 403, 404, 407), Lift Marcel (E: 387, 389, 391, 398, 400).

DRĂGĂŞANI. *S. m. t. agricolă Voiceşti.* Anul I. Paraschivescu V. Gheorghe (E: 412, 415, 418, 425, 426, 427, 428, 429); anul II. Copcea F. Ion (E: 370, 389, 391, 394, 408,428); anul III. Constantin V. Dumitru (E: 368, 382, 405, 408, 425, 428, 434), Mitrache M. Gheorghe (1102, E: 358, 367, 382, 405, 428, 429, 434), Ianu Dumitru (E: 352, 358, 370, 382, 405, 408, 425, 428), Preda I. Andrei (1102, E: 353, 358, 370, 371, 382, 408, 409, 425, 428, 434, 446), Smeure T. Marcel (1102, E: 358, 370, 382, 405, 425, 428, 432).

GALAŢI. *Liceul de băieţi.* Clasa X-a. Ropotan Pavel (1126, 128, 135, 138, 140, 145, 150, 152, 165, 175); clasa XI-a. Dabija Sorin (977, 978, 979, 980, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 991, 992, 993, 996, 997, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14, 24, 25, 30, 33, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 44); *Şcoala m. t. mecanică.* Anul III. Gugonatu Traian (1084, 165, 183, E: 389, 391, 198, 411, 426, 429, 431, 434, 447, 451, 454).

GHEORGHENI. Liceul mixt, clasa X-a. Cilinghir Vladimir (1054, 82, E: 353, 354, 357, 360, 364, 365, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 443); clasa XI-a. Colceriu Valeriu (1165, 128, E: 411, 412, 415, 418, 435, 441).

GIURGIU. *Liceul de băieţi,* clasa VII-a. Radu A. Nicolae (E: 370, 375, 386, 389, 391, 411, 428, 429, 439, 447): clasa VIII-a. Pieleanu I. Dumitru (1011, 1022, 23, 25, 29, 30, 32, 38, 40, 55, 61, 62, 63, 65, 69, 74, 75, 76, 79, 82, 84, 88, 93, 98, 102, 105, 106, 118, 149, 163, 152, 165, 183, 185, E: 369, 370, 371, 372, 374, 378, 381, 382, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 391, 397, P), Iancu M. Marcel (1149, 152, 159, 165, 191, E: 334, 411, 441, Croitoru C. Petre (1078, 149, E: 386, 387, 388, 389, 391); clasa X-a. Bătineţu M. Dumitru (1036, 37, 40, 42, 60,61, 65, 69, 79, 81, 82, 84, 88, 93, 95, 98, 102, 104, 105, 106, 118, 121, 124, 126, 129, 135, 138, 139, 149, 151, 152, 159, 163, 165, 169, 179, 181, 183, 185, 191, E: 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 378, 381, 382, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 391, 397, P), Fotă M. Stan (1045,67, 85, 87, 90, 91, 95, 96, 118, 124, 126, 127, 128, 129, 138, 139, 140, 142, 143, 148, 149, 150, 151, 152, 154, 159, 161, 162, 165, 175, 179, 183, 185, 188, 190, 204, P), Stanciu E. Mirel (1127, 139, 143, 144, 148, 149, 151, 152, 154, 155, 156, 159, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 171, 172, 173, 174, 180, 183, 191, 192, 199, 201, 202, 207, E: 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 396, 397, 399, 400, 401, 403, 404, 405, 406, 409, 410, 411, 412, P), Olaru St. Paul (1038, 40, 42, 55, 61, 62, 63, 65, 69, 75, 76, 78, 79, 81, 84 86, 93, 98, 102, 104, 106, 118, 152, 165, 173, 183, E: 369, 371, 374, 378, 389, 386, 388, 397, 409, 425, 426, 429, 434, 441, 443, 445), Chiran A. Ion (1042, E: 372, 373, 380, 382), Drăgan St.Marin (1042, 93, 98, 104, 118, E: 303, 306, 310, 369, 372, 373, 380, 382, 384, 389, 390, 409), Vasile T. Alexandru (1007, 24, 28, 33, 70, 79, 85, 114, 121, 122, 124, 127, 128, P); clasa XI-a. Mitu St. Velicu (1050, 52, 55, 61, 62, 65, 68, 69, 73, 74, 75, 76, 82, 95, P). *S.t.m.a.* Anul II. Pante M. Gheorghe (1100, 178, E: 339, 342, 344, 346, 361, 362, 364, 369, 370, 371, 372, 374,

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceiaşi foaie; iar fiecare soluţie să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunţul complet şi numele propunătorului. După soluţionarea fiecărei probleme scrieţi citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmaţi sau ocupaţia şi adresa şi apoi trimiteţi problemele aşezate în ordinea lor numerică pe adresa Redacţiei G.M.F *seria B.*

— *Se primesc soluţii* numai la problemele şi exerciţiile din ultimele patru numere apărute. Soluţiile ce se vor enunţa la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1954, se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1954.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au soluţionat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme deja propuse, mai există publicate în cărţi sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul şi pagina unde s-a mai publicat enunţul sau soluţia problemei respective.

— *In redactarea unei soluţii* trebuie alese notaţii potrivite subliniate părţiile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clar, cu linii pline şi punctate. De multe ori, aceste reguli îndeplinite, conduc la soluţia problemei. Adesea, dintr-o problemă simplă pot ieşi chestiuni interesante. Soluţiile mai dificile se obţin uneori, prin încercări succesive şi studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat. *Corespondentul nostru* care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă scoasă dintr-o observare făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele şi în fine, cei mai avansaţi pot să ne trimită şi cîte un articol cu o chestiune generală sau cu o apropiere originală între chestiuni cunoscute. Aceste note sau articole este bine să fie refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise pentru a evita ca în expunerea făcută să fie scrise vorbe fără rost, iar ideile, să deştepte interes pentru cititor. Ordinea şi îngrijirea în prezentarea unei idei pot fi îndeplinite dacă haruicul nostru corespondent a făcut mai multe rezolvări, dacă a citit şi a înţeles deplin, multe din soluţii şi articole publicate şi dacă a studiat îndeajuns, chestiunea de care se ocupă.

— *Tovarăşii colaboratori elevi* sînt rugaţi să ne trimită date asupra activităţii lor extraşcolare la matematică şi fizică, asupra activităţii cercurilor de matematică sau de fizică la care iau parte şi asupra modului de desfăşurare ale « Olimpiadei matematice », pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experienţă.

— *Redacţia nu face abonamente*, nici expediţii de reviste, de aceia, reclamaţiile, sau comenzi de numere vechi şi propuneri sau sugestii în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariţiei, se pot face la Oficiul poştal local sau la Centru de difuzare, a Presei din Bucureşti, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* mai este rugat a face cunoscută revista şi altor cunoscuţi şi a ne trimite propuneri şi sugestii care să fie de folos în munca noastră redacţională.

C. 761. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

378, 387, 397, 398, 399, 402, 405, 408, 409, 420, 425, 427, 429, 435, 436, 437, 440, 441, 442, P); anul III. Negoi M. Ion (1028, 41, 69, 118, E: 337, 338, 342, 346, 354, 361, 362, 364, 365, 369, 370, 375, 376, 387, 391, 392, 396, 397, 402, 406, 411, 412, 420, 425, 426, 427, 429).

HUŞI. *Şcoala pedagogică*, anul II. Olaru Ecaterina (1093, 152, 159, E: 373, 382, 387, 392, 398, 408), Diaconu Ilinca (1093, 152, 159, E: 373, 382, 387. 392, 398). *Vulcani Huşi)* Bostan Mircea (1029, 33. 68, 69, 78, 81, 84, 88, 98).

IAŞI. *Liceul de fete*, clasa V-a. Rotaru Paula (E: 354, 392, 400, 408, 409), Mendel Ioni. (E: 354, 391, 398, 400, 408, 409), Vieru Rodica (E: 354, 391, 398, 400, 408), Chilischi Suzana (E: 354, 392, 400, 408, 409); clasa VII-a. Olaru Marieta (E: 358, 389, 403, 411, 412, 424), Tuţmanu Ana (E: 389, 392, 403, 405, 408, 411), Strul Sura (E: 358, 387, 389, 392, 397, 403, 405), Braver Paulina (E: 358, 387, 389, 403, 405, 408), Ghinja Ludmila (E: 358, 387, 389, 397, 402, 405, 411, 413), Paznicu Aurica (E: 358, 389, 392, 397, 408, 411), Popa Elena (E: 358, 387, 389, 403, 405, 408, 412); clasa X-a. Picher Rodica (1068, 165, 167, 183, E: 358, 364, 365, 370). *Liceul 1 băieţi*, clasa X-a. Arsintescu I. Virgil (1035, 37, 38, 40, 43, 62,) Geambaşu Lică (1029, 33, 34, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 44), Rotaru Iulian (1038, 40, 48, 137, E: 391, 392, 397, 398), Singurelu Gheorghe (1029, 33, 37, 38, 40, 41, 42, 43), Steinman Ionel (1078, 79, 80, 81, 82, 83), Vaisman Izu (1029, 30, 33, 34, 35, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 79, 80), Birsan M. Temistocle (1023, 35, 38, 42, 43, 54, 57, 58, 62, 65, 69, 80, 81, 87, 88, 89, 93, 97, 113). *Liceul 2 băieţi*. Clasa IX-a. Piriu Laurenţiu (1038, 40, 43, 69, 78, 81); clasa X-a. Matri Emil (1033, 37, 38, 40, 43, 68, 97, 98, 113, 124, 127, 128, E: 349, 361), Buruiană Florin (1033, 40, 42, 68, 78, 84, 118, 126, 127, 128), Timpoc Dinu (1037, 38, 40, 43, 45, 48, 53, 56, 57, 58, 61, 62, 63, 93, 98, 99, 100, 113, 123, 124, 126, 127 128, 131, 132, 167, 165, 188), Segal Zigu (1165, 183, E: 411, 412, 416, 418, 424, 445); *Şcoala pedagogică de băieţi*, anul I. Cordun Constantin (1089, E: 357, 358, 389, 391, 408, 411, 429), Crăcană Petrea (1065, 68, 69, 78, 157, E: 355, 357, 384, 389, 391, 399, 408, 411, 429, 440), Cebere Dumitru (1089, E: 353, 358, 389, 391), Bulai Vasile (1084, 89, E: 357, 389, 408, 411, 412, 428, 429), Berlan Traian (1089, E: 358, 389, 391, 398, 411), Burlacu Petru (E: 351, 352, 353, 358, 368, 389, 391, 403, 408, 411, 412, 415, 418), Rusu Mihai (E: 353, 354, 358, 389, 391, 408, 429), Galovan Ion (1039, 65, 84, E: 357, 389, 408, 411, 416, 426, 428, 434), Tulbure C. (E: 352, 354, 368, 391, 408, 428, 429), Morărăşcu Dionisie (1098, E: 358, 389, 391, 408, 411); anul IV. Ioniţă I. Ionel (E: 352, 353, 354, 355, 357, 358, 362, 368), Curcă Gh. (E: 351, 352, 353, 354, 358, 368, 369, 370, 398). *Ş oala nr. 9 mixtă*. Clasa VI-a. Pavel Elena (E: 416, 435, 436, 437, 439, 440, 441), Pascal Magdalena (E: 435, 436, 437, 439, 440, 441); *Şcoala tehnică construcţii*. Anul III. Gratz A. (1035, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44); *Şcoala elementară din Hîrlău*. Clasa VII-a. Ţibuleac Florin (E: 552, 353, 354, 355, 358, 359, 361, 365). *Şcoala elementară din Popricani*. Clasa V-a. Zamisnicu Doina (E: 425, 429, 431, 432, 433); clasa VII-a. Costin Petru (E: 442, 443, 444, 445, 446).

* * *

Notă. *Lista rezolvitorilor din localităţile cu iniţialele F, O—Z, va apare în numărul următor.*

E 1626.

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEN - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Országos Műszaki Könyvtár BUDAPEST

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Tineri şi tinere! Munciţi cu tot entuziasmul şi avîntul vostru tineresc pentru însuşirea ştiinţei, tehnicii şi culturii înaintate! Fiţi luptători hotărîţi şi activi pentru victoria măreţei cauze a socialismului în patria noastră scumpă!

(Din Chemările de 23 August 1954 ale C. C. al P. M. R.)

Anul V — august 1954

8

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)

Anul V, Nr. 8 — august 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*La a zecea aniversare a eliberării patriei noastre....*	265
2.	*Dezvoltarea opticii în R. P. R. în anii 1944—1954* de Acad. E. Bădărău	267
3.	*Cum apar unele linii curbe geometrice în practica vieţii şi în tehnică* de Prof. O. Sacter.....	273
4.	*Cerul în septembrie* de Prof. V. Daimaca	277
5.	*Presiunea radiaţiilor* de elev A. Bucuceta....	281
6.	*Dispozitiv pentru studiul mişcării circulare*	285
7.	*Probleme rezolvate (1017; 1018; 1062; 1065; 1070; 1072; 1124; 1130; 1131; 1132; 1133; 1142; 1148; 1158; 1177; 1179; 1190; E 378; E 404; E 356; E 357;*	286
8.	*Probleme propuse (1320—1345)*	299
9.	*Exerciţii şi probleme pentru şcoala de şapte ani (E. 522—E. 533)*	303
10.	*Poşta redacţiei*	305
11.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	306

ANUL V 8 AUGUST 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Spiru Haret, 12 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi de fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Orszagos Mărzaki Könyvtár TULAJDONA
Institut de Documentare Tehnică BUCUREŞTI OSMEH - CSERE VYMENA - WYMIANA TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL V * Nr. 8 august 1954

LA A ZECEA ANIVERSARE A ELIBERĂRII PATRIEI NOASTRE

ZIUA de 23 August 1944 — ziua eliberării Romîniei de către glorioasa Armată Sovietică — este cea mai mare sărbătoare naţională a poporului nostru.

Insemnătatea istorică a zilei de 23 August constă în faptul că ea a dus la instaurarea puterii poporului, la regimul democrat-popular.

Ziua de 23 August 1944 constituie piatra de hotar dintre veacurile de cruntă asuprire şi jefuire a poporului nostru de către exploatatorii din ţară şi de către cotropitorii străini şi începutul unei vieţi noi, în care poporul romîn şi-a cucerit pentru prima dată adevărata libertate şi independenţă naţională.

Păşind din victorie în victorie, poporul nostru muncitor a obţinut sub conducerea fermă a partidului şi cu ajutorul multilateral al U.R.S.S. realizări măreţe în lupta pentru lichidarea înapoierii economice şi culturale, pentru transformarea socialistă a ţării.

In decada pe care o serbăm, partidul a arătat, prin nenumăratele realizări, că legea de bază a regimului democrat-popular este satisfacerea maximă a nevoilor materiale şi culturale mereu crescînde ale oamenilor muncii. Inainte de 23 August 1944 poporul nostru era numit pe drept cuvînt «popor sărac în ţară bogată». Imensele bogăţii naturale ale ţării erau jefuite de către capitaliştii străini în cîrdăşie cu cei din ţară, iar poporul era condamnat la sărăcie şi înapoiere. Din această situaţie am putut ieşi numai datorită ajutorului frăţesc şi multilateral al Uniunii Sovietice şi faptului că poporul nostru muncitor a urmat cu devotament politica înţeleaptă a partidului.

Ţara noastră înfăţişează astăzi tabloul luminos al muncii harnice şi entuziaste a întregului popor muncitor, care, bucurîndu-se de cele mai largi drepturi şi libertăţi, dezvoltă necontenit economia de pace pe drumul construirii socialismului. Creşte fără încetare industria grea, temelia dezvoltării întregii economii şi ridicării nivelului de trai al populaţiei; industria construcţiilor de maşini, creată în anii regimului democrat-popular, produce numeroase maşini moderne necesare reînzestrării tehnice a diferitelor ramuri industriale, tractoare şi alte maşini necesare agriculturii. Se dezvoltă necontenit industria bunurilor de larg consum; industria uşoară şi industria alimentară şi-au lărgit sortimentele de articole de larg consum şi produc cantităţi cu mult mai mari decît înainte de război.

In alianţă cu clasa muncitoare şi sub conducerea partidului, ţărănimea muncitoare şi-a văzut împlinit visul de veacuri; ea a fost izbăvită de jugul moşieresc. In politica sa faţă de ţărănime partidul se călăuzeşte cu fidelitate după învăţătura

leninistă, de întărire a alianței clasei muncitoare cu țărănimea muncitoare — temelia puterii populare. Partidul și statul democrat-popular sprijină milioane de gospodării agricole individuale să folosească în tot mai mare măsură posibilitățile pe care le au de a spori producția agricolă și de a-și ridica nivelul de trai. Statul democrat-popular dă un puternic sprijin întovărășirilor și gospodăriilor colective ca să se întărească din punct de vedere economico-organizatoric și să devină adevărate centre de atracție ale țărănimii muncitoare pe calea agriculturii socialiste — singurul drum pe care țărănimea muncitoare poate scăpa definitiv de sărăcie și exploatare.

Bilanțul înfăptuirilor istorice ale poporului nostru muncitor în decursul celor 10 ani care au trecut de la 23 August 1944 cuprinde și profunde prefaceri săvîrșite în domeniul științei, culturii și artei noastre, în domeniul învățămîntului și al făuririi de cadre pregătite, capabile să participe activ la opera de transformare socialistă a țării. S-au împlinit de curînd 6 ani de la înfăptuirea reformei învățămîntului, care simbolizează hotarul dintre școala burghezo-moșierească și școala nouă a regimului democrat-popular. Acest eveniment constituie un prilej pentru trecerea în revistă a marilor progrese realizate în direcția transformării școlii într-un bun al maselor populare. In acest timp a fost creată baza materială a dezvoltării învățămîntului nostru public. An de an s-au alocat în bugetul statului nostru sume tot mai importante pentru construirea de școli și de internate. Infăptuindu-se efectiv obligativitatea învățămîntului elementar, au fost lichidate izvoarele analfabetismului. Conținutul învățămîntului s-a schimbat astăzi în mod radical, căpătînd o bază științifică.

Poporul nostru are un sentiment de mîndrie în fața acestor realizări, acest sentiment fiind strîns împletit cu acela al recunoștinței față de marea noastră eliberatoare și sprijinitoare — Uniunea Sovietică. Putem spune că nu există realizare în țara noastră, care să nu poarte semnul ajutorului frățesc al poporului sovietic. Acest ajutor insuflă poporului nostru încredere în propriile sale fapte și sădește în conștiința oamenilor muncii încrederea neclintită în capacitatea lor creatoare, ceea ce contribuie la înflorirea economiei, a culturii și a științei noastre. De aceea oamenii muncii își exprimă hotărîrea de a apăra ca bunul cel mai prețios și de a întări necontenit prietenia indestructibilă cu marele popor sovietic și cu toate popoarele lagărului democratic, strîns unit prin legăturile de colaborare economică frățească, prin grija reciprocă pentru interesele tuturor țărilor lagărului democrat.

Marile victorii obținute de poporul nostru în cei zece ani de la eliberare au fost cu putință datorită faptului că în fruntea lui se află o asemenea avangardă călită în lupte, ca Partidul Muncitoresc Romîn care în întreaga sa activitate se călăuzește de învățătura marxist-leninistă și de experiența gloriosului Partid Comunist al Uniunii Sovietice.

Pășind în întîmpinarea Congresului Partidului Muncitoresc Romîn, care va avea loc în luna octombrie 1954, să luptăm cu avînt sporit pentru continua întărire a partidului, sub conducerea căruia am putut obține toate victoriile amintite.

Să luptăm cu avînt pentru continua întărire a legăturilor partidului cu masele, pentru întărirea alianței clasei muncitoare cu țărănimea muncitoare, — temelia regimului democrat-popular. Documentele plenarei din august 1953 subliniază cu deosebită putere că întărirea alianței dintre clasa muncitoare și țărănimea muncitoare sub conducerea clasei muncitoare, constituie chezășia înaintării cu succes și a rezolvării tuturor sarcinilor pe drumul construirii socialismului.

Toate realizările pe care poporul muncitor le sărbătorește în ziua de 23 August, toate viitoarele victorii pe frontul construirii unei vieți mai bune pentru cei ce muncesc își au izvorul în unitatea indestructibilă dintre partid, guvern și popor, în sprijinul nelimitat pe care oamenii muncii îl acordă politicii partidului de construire a socialismului, de asigurare a bunei stări a poporului și de apărare a păcii.

Poporul nostru muncitor, învățătorii și profesorii, tineretul școlar de pe tot cuprinsul țării întîmpină ziua de 23 August hotărît să lupte împotriva tuturor dușmanilor care caută să submineze opera de construire a socialismului și de asigurare a unei păci trainice, hotărît să obțină noi realizări în construirea socialismului și apărarea păcii, noi succese la locul lor de muncă.

DEZVOLTAREA OPTICII ÎN R.P.R. ÎN ANII 1944 — 1954

ACAD. EUGEN BĂDĂRĂU
Prof. Univ. București

PRIN descoperirile ei extraordinare din ultimele decenii, fizica a devenit știința de bază pentru toate științele naturii, pentru tehnică, industrie și agricultură. Ea este și un sprijin neprețuit pentru unica concepție științifică despre natură, concepția materialist-dialectică.

Dezvoltarea acestei științe a adus și aduce mereu omenirii realizări de mare importanță pentru ca oamenii muncii să-și poată creia o viață tot mai bună, tot mai fericită. In această perioadă, să ne gîndim numai la ultima realizare a științei și tehnicii sovietice — punerea în funcție a primei uzine electroatomice, care furnizează unui vast teritoriu o mare cantitate de energie pe baza dezintegrării atomice, cu cheltuială redusă și în modul cel mai comod. Precum se știe, scopul utilizării pașnice a energiei atomice este tocmai ieftinirea energiei necesare industriei și agriculturii și reducerea considerabilă a orelor de muncă a celor ce muncesc.

Unul din cele mai vechi capitole ale fizicii, optica, a adus și aduce și ea foloase importante omenirii. Toate aparatele și instrumentele optice atît de necesare în mai toate cercetările, în diverse laboratoare, în geodesie, astronomie și, în general, în viața noastră de toate zilele, se construiesc pe baza formulelor opticii geometrice.

Analiza spectrală și luminiscentă aduc servicii enorme metalurgiei, biologiei, agriculturii și ajută în modul cel mai eficace la găsirea bogățiilor naturale. Cercetările spectrelor emise de diferite elemente au fost și sînt de o mare importanță pentru cunoașterea cît mai completă a structurii atomului, pentru pătrunderea în tainele micronaturii, iar spectrele moleculare permit a stabili alcătuirea moleculelor.

Pe de altă parte, studiul cronologic al cercetărilor din domeniul opticii arată marea luptă între două concepții cu privire la natura luminii, concepția ondulatorie și cea corpusculară; luptă care, în ultimul timp, în primul rînd grație contribuției bogate a fizicienilor sovietici, duce la elaborarea unei concepții unitare asupra naturii luminii, problemă de importanță principială pentru fizică.

In Patria noastră dezvoltarea cercetărilor în domeniul opticii pînă în anul 1944 a fost foarte înceată. Pînă la începutul deceniului al treilea din secolul nostru, au fost făcute numai cîteva cercetări şi acelea mai mult de natură matematică.

In acel deceniu, apare la noi un grup de tineri fizicieni opticieni, în majoritate spectroscopişti, cu o foarte bună pregătire, fizicieni care astăzi conduc cu succes diferite colective şi instituţii de cercetări. Dar atunci aceşti fizicieni opticieni nu şi-au putut pune în valoare cu totul temeinica lor pregătire, din cauza lipsei de laboratoare de optică bine înzestrate. Cu mare greutate, graţie eforturilor neobosite ale acestor tineri fizicieni s-au putut organiza două centre modeste de cercetări optice, la Universitatea din Bucureşti şi la aceia din Cluj, ştiinţa sub regimul burghezo-moşieresc, negăsind un sprijin serios. Totuşi, graţie elanului acestor opticieni, s-au putut face sporadic, cu aceste mijloace modeste unele cercetări în domeniul spectroscopiei vizibilului, ultravioletului pe de o parte şi a infraroşului pe de altă parte, scopul acestora fiind în primul rînd cunoaşterea structurii atomilor şi a moleculelor.

In ceea ce priveşte aplicaţiile opticii în industrie, înainte de 1944, ele au fost extrem de reduse. Este adevărat că, cunoscînd bunăoară marea importanţă a analizei spectrale în uzinele metalurgice, multe din ele şi-au procurat aparate spectrale, dar acestea, cu rare excepţii, ca de exemplu la uzina «23 August», stăteau neutilizate în dulapuri.

A fost creată chiar şi o industrie optică, dar această industrie era preocupată mai mult cu fabricarea aparatelor şi instrumentelor optice în vederea pregătirii războiului fascist; industriaşii respectivi nu se gîndeau de loc la satisfacerea nevoilor poporului, de exemplu la fabricarea ochelarilor, aparatelor fotografice ieftine, etc.

După eliberarea noastră de către glorioasa Armată Sovietică, situaţia în privinţa opticii în ţara noastră a început să se schimbe radical, mai ales de cînd puterea în stat a trecut în întregime în mîinile clasei muncitoare.

Sub conducerea partidului, cercetările ştiinţifice au devenit problemă de stat, căci în epoca construcţiei socialismului, ştiinţa devine baza economiei naţionale şi culturale. In aceste condiţii, cercetările improvizate, fără un scop precis încetează şi cercetările devin planificate, strîns legate de Planul de Stat.

Plecînd dela aceşte principii, partidul şi guvernul, pe de o parte creiază incontinuu baze materiale tot mai bine dezvoltate pentru cercetări, iar pe de altă parte, ameliorează incontinuu condiţiile materiale şi culturale ale muncii cercetătorilor, pentru ca aceştia să se dedice în întregime şi cu randament cît mai mare muncii ştiinţifice. Este evident că, în astfel de condiţii, ştiinţa a început să se dezvolte foarte repede în R.P.R., dînd şi numeroase aplicaţii importante pentru tehnică, industrie şi agricultură.

Cu scopul promovării cît mai rapide a ştiinţei, a fost creată Academia R.P.R., cu numeroasele ei institute şi colective de cercetări. Au fost reorganizate Universităţile şi create noi instituţii de învăţămînt tehnic superior.

Evident, cercetările din domeniul opticii au început să devină mult mai numeroase, organizate, legate de Planul de Stat, de industrie.

Să vedem acum mai detaliat realizările în domeniul opticii în epoca de după eliberarea noastră. Să începem cu *spectroscopia*, care, cum am amintit mai sus, are o deosebită importanţă atît teoretică cît şi practică. Aceste cercetări se fac în prezent în laboratorul de optică al Institutului de fizică al Academiei R.P.R., în laboratoarele de specialitate din universităţi, în laboratoarele

unor uzine şi în unele institute tehnice superioare. Totodată se formează incontinuu cadre tinere de opticieni în toate aceste instituţii, care să mărească armata existentă de cercetători opticieni. In acest scop, a fost înfiinţată la facultatea de matematică şi fizică a Universităţii « C. I. Parhon » din Bucureşti o secţie de specializare în optotehnică, cu scopul, de a da ţării buni specialişti în optica teoretică şi aplicată (cu specializări în spectroscopie, în construcţia instrumentelor optice, în diverse metode optice necesare dezvoltării unor ramuri de industrie, etc.).

După cum am văzut mai sus, la secţia de optotehnică a Facultăţii de Matematici şi Fizică a Universităţii din Bucureşti, se predă şi spectroscopia. Acest lucru a avut ca urmare că, în ultimii ani, acolo au fost create destul de numeroase cadre de tineri spectroscopişti, care, dacă din punct de vedere al cercetărilor strict ştiinţifice sînt încă mai puţin experimentaţi, sînt însă destul de bine pregătiţi ca tehnicieni pentru executarea lucrărilor în legătură cu *analiza spectrală*. Această analiză spectrală, bazată pe studiul spectrelor de emisie sau de absorbţie permite să se identifice foarte rapid elementele corespunzătoare spectrului, de pildă, compoziţia unui minereu dintr-o regiune oarecare. Deci, această metodă aduce un serviciu imens prospecţiunilor. Trebuie să observăm că metoda de analiză chimică obişnuită ar cere în cazurile acestea un timp incomparabil mai îndelungat şi cîteodată nu ar putea detecta urmele unor elemente conţinute în minereul dat. Este interesant de observat cu această ocazie că, cu ajutorul acestei analize spectrale se mai poate detecta încă prezenţa unui element în concentraţia de 10^{-7}, adică prezenţa unui gram din acest corp amestecat cu o substanţă oarecare care umple un vagon de 10 tone, iar cantitatea absolută a elementului necesară pentru a fi detectată poate să coboare în unele cazuri pînă la infima cantitate de 10^{-10} g.

Analiza spectrală prin emisie este utilizată foarte des în industria metalurgică pentru determinarea mai ales a compoziţiei aliajelor metalice, în primul rînd calitativ dar şi cantitativ cu toate că aceasta din urmă analiză prezintă multe greutăţi.

Analiza spectrală prin absorbţie, precum se ştie, este utilizată atunci cînd corpul studiat nu poate fi folosit decît în starea în care el nu se descompune (este cazul, bunăoară, a moleculelor); această analiză, prin cercetarea spectrului de absorbţie, ne dă foarte des informaţii cu privire la compoziţia substanţei.

In ceea ce priveşte analiza prin emisie, ea a devenit extrem de necesară pentru urmărirea calităţii aliajelor, în particular a oţelului. De aceea, în ultima vreme, unele uzine şi intreprinderi încep a folosi în activitatea lor analiza spectrală.

Bunăoară Uzinele « Tractorul » şi « Steagul Roşu », Uzinele Reşiţa, Uzinele din Sinaia, Baia Mare şi altele au introdus această metodă de analiză cu ajutorul Academiei R.P.R. (Colectivul M. Giurgea de la Institutul de fizică al Academiei, care a făcut şi multe analize în legătură cu prospecţiuni ce se fac în ţara noastră).

De altfel, sesiunea lărgită a secţiei I şi III a Academiei R.P.R. din septembrie 1953 (oraşul Stalin), la care au participat şi numeroşi metalurgişti, a cerut insistent introducerea metodei analizei spectrale în uzinele respective.

Analiza spectrală prin absorbţie (în infraroşu apropiat) a fost şi ea larg utilizată în intervalul ultimilor 10 ani, pentru identificarea compoziţiei diverselor uleiuri vegetale (colectivul Acad. Şt. Vencov), apoi pentru a

se studia procese de polimerizare în funcţie de diferiţi factori, lucru de mare importanţă în industria plasticelor (colectivul prof. D. Ştefănescu). Trebuie să observăm cu această ocazie că plasticele ocupă din ce în ce un loc mai important în industria modernă, înlocuind cu succes în multe privinţe materialele mai costisitoare, în primul rînd unele metale. In R.P.R., unde se găsesc în abundenţă materiile prime pentru masele plastice, lucrează cu succes cîteva colective în problema preparării acestor substanţe.

Analiza prin absorbţie în infraroşu apropiat a servit şi pentru identificarea prezenţei unor corpuri medicamentoase în unele extrase.

Spectrele de absorbţie în infraroşu au fost studiate în ultima vreme şi la cristalele de mică de diferite provenienţe, cu scopul de a stabili deosebiri de structură (colectivul prof. R. Tiţeica).

Analiza spectrală, mai ales prin absorbţie, interesează foarte mult şi pe biologi. Din acest motiv, o serie de institute au introdus în ultimii ani instalaţii spectroscopice, ajutate fiind în această privinţă de spectropiştii dela Universitate sau dela Academie. Aşa de exemplu Institutul Babeş, Institutul de higienă, Institutul medico-farmaceutic, Institutul de Oncologie (Academia), Institutul de cercetări petrolifere, IPROM, etc.

Importanţa dezvoltării spectroscopiei la noi în ţară este atît de mare, încît forul nostru ştiinţific suprem, Academia R.P.R. a hotărît ca, în scurtă vreme, să organizeze o consfătuire pe ţară a tuturor spectroscopiştilor din diferite ramuri de activitate, pe de o parte, cu scopul de a se face evidenţa specialiştilor şi inventarul aparaturii existente în ţară, pe de altă parte pentru a se fixa planul comun de muncă organizată, în strînsă legătură cu Planul de Stat.

In afară de aceste lucrări din domeniul spectroscopiei cu caracter aplicativ, opticienii romîni au urmărit în ultima vreme o serie de cercetări cu caracter teoretic, cum sînt bunăoară cercetările de difuzia luminii prin macromolecule, cercetări ce pot da informaţii asupra greutăţii moleculare şi formei polimerului, apoi difuzia combinată în diferite condiţii ceea ce poate îmbogăţi cunoştinţele noastre în privinţa structurii corpurilor examinate, etc.

Tot în domeniul spectroscopiei (herţiene), pot fi încadrate şi foarte interesante cercetări ale prof. T. Ionescu cu privire la nivelele energetice ale ionilor negativi, cercetări care aruncă lumină asupra structurii ionosferei şi rolul ei în radiocomunicaţii.

In legătură cu studiul absorbţiei în diferite părţi ale spectrului trebuie să amintim că opticienii noştri au dat o serioasă mînă de ajutor protecţiei muncii.

Se ştie că sudorii, pentru a avea vederea protejată, trebuie să aibă nişte ochelari speciali, care, pe lîngă atenuarea intensităţii luminii (în partea vizibilă a spectrului), trebuie să fie scutiţi şi de pătrunderea în ochii lor, atît a radiaţiilor ultraviolete, cît şi mai ales a acelor infraroşii, care, precum se ştie, sînt foarte pătrunzătoare şi dăunătoare. In această privinţă, s-a făcut la noi în ultimii ani o serie de cercetări de natură aplicativă, care au permis elaborarea unei reţete pentru fabricarea sticlei potrivite (colectivul prof. I. Agîrbiceanu şi prof. Bîrcă). Graţie acestor cercetări, a început la noi fabricarea masivă a acestor ochelari de protecţie, controlul fabricaţiei fiind făcut de acelaşi colectiv.

O a treia analiză bazată pe fenomenele optice şi care cîştigă în ultimii ani şi la noi teren, este aşa numita *analiză luminiscentă*. Această analiză se bazează pe faptul că multe substanţe, fiind iluminate de unele radiaţii ultraviolete, emit lumină (aşa zisul spectru de fluorescenţă), a cărui culoare este foarte des caracteristică pentru substanţa dată. Dacă această substanţă are o com-

poziție variabilă (cum este cazul, bunăoară, a sticlei optice) culoarea de fluorescență se schimbă și ea. Acest fapt permite să se recunoască compoziția unui corp prin comparația culoarei lui de fluorescență cu culoarea de fluorescență a unor etaloane cu compoziție precizată. Analiza luminiscentă mai permite a detecta cantități extrem de mici a unor corpuri conținute în unele substanțe grație fluorescenței lor; bunăoară în acest fel se poate constata prezența unor vitamine în diverse corpuri. Analiza luminiscentă are o largă aplicație în industria alimentară, în industria textilă, în expertize judiciare ș.a.m.d. La noi metoda aceasta este puțin răspîndită, cu toate că, în unele cazuri, ea poate înlocui analiza *chimică* și nu cere decît un izvor de radiații ultraviolete, cu un ecran pentru razele vizibile ce se emit din acest izvor. In ultimul timp, această metodă a început să fie din ce în ce mai mult răspîndită și la noi. Bunăoară, de curînd, s-a făcut la laboratorul de optică a Universității din București aplicația la selecționarea bitumurilor din punctul de vedere al calității astfaltului conținut în ele.

Este interesant de observat că fabricile noastre de becuri electrice și-au însușit procesul de fabricație atît a lămpilor care emit radiații ultraviolete necesare pentru această analiză luminiscentă cît și a sticlei ecran, deci am putea răspîndi metoda luminiscentă atît de utilă și simplă pe o scară cît mai mare.

Studiul spectrelor de fluorescență a fost utilizat cu succes într-o recentă lucrare pentru clasificarea benzinelor, ceea ce desigur are un mare interes practic (colectivul prof. C. Mihul).

In legătură cu fenomenul de fluorescență, trebuie să amintim că, în ultimii ani, un colectiv al Institutului de Fizică, împreună cu colaboratorii laboratorului de optică al Universității Parhon, a terminat toate studiile în vederea fabricării la noi în țară a așa numitelor *lămpi fluorescente* (colectivul acad. E. Bădărău). Aceste lămpi nu sînt altceva decît niște tuburi lungi în care se produce o descărcare în vaporii de mercur, iar peretele interior al tubului este acoperit cu o substanță luminiscentă, așa zisul *luminofor.* In timpul trecerii curentului electric prin vaporii de mercur, o parte din atomi, grație ciocnirilor produse de electroni, sînt excitați emițînd apoi liniile spectrale din ultraviolete cu $\lambda = 2537$ Å și $\lambda' = 1850$ Å (liniile de rezonanță). Aceste radiații ultraviolete, căzînd pe luminofor, provoacă fluorescența. Culoarea aceasta fluorescentă poate fi făcută, prin diverse activări a luminoforului, cît mai apropiată de lumina zilei. Avantajul acestor noi izvoare de lumină constă tocmai în aceea că dă ochilor lumină mult mai potrivită decît aceea a becurilor electrice obișnuite, fiind apoi mult mai eftină. Scopul muncii colectivului amintit este tocmai de a face posibilă producția acestor tuburi la noi în țară, din materii prime proprii, renunțînd la importul lor.

Trebuie să adăugăm că luminoforul necesar acestor tuburi se prepară în ultima vreme de către un membru al colectivului (prof. Lucatu) după un procedeu original, mult mai ușor pentru industrie decît cele indicate în literatură.

In legătură cu activitatea acestui colectiv, amintim că, acum trei ani, doi membri ai colectivului (prof. R. Grigorovici și ing. Roth) au reușit să construiască așa zisul « bec solar », un bec de culoare albastră, care dă o lumină cu mult mai apropiată de lumina zilei decît becul electric obișnuit. Acest bec se vinde în prezent peste tot și este foarte apreciat în industria textilă, poligrafică și de cititori.

Revenind la fenomenul de fluorescență, care după cum am arătat mai sus, a servit la aplicații atît de importante, trebuie să constatăm cu satisfacție

că, în acest domeniu, în ultimul deceniu, s-a lucrat la noi şi teoretic. A apărut o serie de lucrări foarte interesante cu privire la spectre de fluorescenţă a unor molecule, la randamentul acestui fenomen, la fluorescenţa soluţiilor şi gradul lor de polarizare, de acţiunea factorilor perturbatori, etc. (colectivul prof. I. Agîrbiceanu). Aceste încercări în legătură cu fluorescenţa sînt interesante în sensul că permit să se precizeze în primul rînd nivelele energetice ale moleculelor studiate. Mecanismul inhibiţiei fluorescenţei de către unii inhibitori a fost precizat din punct de vedere teoretic într-o lucrare de mare importanţă apărută recent (prof. Lucatu).

O largă aplicaţie practică a început să aibă la noi în ultima vreme fenomenul de interferenţă. Faptul că aceste fenomene permit să se determine variaţii de lungimi foarte mici (de ordinul de mărime de o milionime de cm) face posibil un control foarte precis al grosimii unor obiecte (bunăoară a calelor) ca şi al planităţii suprafeţelor. Acest lucru este extrem de important pentru o exactă executare a maşinilor şi a sculelor, ceea ce este necesar pentru randamentul cît mai mare al muncii, iar calitatea produselor să fie cît mai bună. In sensul acesta se lucrează în prezent la Institutul Metrologic ca şi în alte laboratoare de optică.

Acum trei ani, în laboratorul de optică al Universităţii « C. I. Parhon », a fost construit pentru prima oară în ţară dispozitivul de *fotoelasticimetrie*, care permite să se vadă pe machete cu ajutorul fenomenelor de interferenţă distribuţia eforturilor în interiorul diverselor piese. Astfel de cercetări sînt de mare importanţă de exemplu pentru calea ferată (profilul mai convenabil al şinei) şi pentru o serie de întreprinderi.

Astfel de cercetări utile industriei se fac în prezent în laboratorul de fizică al Politehnicii (colectivul prof. Iosipescu) care posedă o instalaţie preţioasă. La noi s-a mai dezvoltat în ultima vreme interesantul capitol al opticii colorimetrice, care are multe aplicaţii atît în cercetări pur ştiinţifice cît şi în practică (colectivul prof. R. Grigorovici). Acelaşi colectiv în prezent face unele cercetări cu privire la sensibilitatea vederii în diverse condiţii care prezintă un interes special pentru fiziologia vederii.

Metodele optice au fost larg folosite în cercetări din domeniul fizicii din ultimul deceniu, bunăoară în determinarea temperaturii în noul tip de descărcare electrică în gaze — torţa (R. Grigorovici şi Gh. Cristescu), etc.

In intervalul de timp 1944 —1954, industria optică s-a dezvoltat mult. Destul să amintim că, în prezent, I.O.R. produce în serie microscoape cu o mare putere de mărire şi de bună calitate. Alte întreprinderi au început să construiască obiective pentru aparate de proiecţie, lupe, ochelari, etc. In legătură cu fabricarea aparatelor optice stă şi construcţia monocromatorului de tip nou pentru ultravioletul apropiat, propusă de prof. Gh. Atanasiu.

In cele mai sus expuse, am căutat să prezint pe scurt realizările din domeniul opticii în ultimii 10 ani. Se poate constata uşor cît de rapidă a devenit dezvoltarea la noi a cercetărilor din acest domeniu, cîte realizări practice de mare importanţă s-au făcut.

Dacă pînă acum au dominat cercetări cu caracter practic faţă de cele teoretice, lucrul se explică prin faptul că, în această epocă a începutului construirii socialismului la noi, opticienii au avut multe sarcini urgente din partea industriei, iar cadrele au fost puţin numeroase.

Graţie grijii deosebite a partidului şi guvernului pentru dezvoltarea ştiinţei, graţie faptului că din Uniunea Sovietică se întorc tineri fizicieni care au primit acolo o pregătire serioasă, ca şi importului de utilaj de mare valoare din U.R.S.S. şi din ţările de democraţie populară, putem avea siguranţa că, în scurtă vreme, dezvoltarea cercetărilor din domeniul opticii, va lua un avînt mult mai mare, contribuind pe de o parte în mod substanţial la tezaurul ştiinţei mondiale, pe de altă parte, acoperind toate nevoile atît de importante ale industriei şi agriculturii noastre care se află în plin progres.

MATEMATICA ŞI VIAŢA

CUM APAR UNELE LINII CURBE GEOMETRICE ÎN PRACTICA VIEŢII ŞI ÎN TEHNICĂ

O. SACTER

STUDIIND geometria în şcoala de şapte ani, elevii au luat cunoştinţă despre două feluri de linii: drepte şi cercuri. Mai tîrziu, în şcoala medie, atunci cînd studiază graficele unor funcţii şi diagramele unor mişcări mecanice, ei îşi îmbogăţesc cunoştinţele cu tipuri noi de linii: parabole, sinusoide şi altele. Dacă pătrundem mai adînc în studiul ştiinţelor naturii, întîlnim din ce în ce mai des fel de fel de linii curbe, ceea ce ne arată şi mai mult strînsa legătură dintre geometrie şi viaţă.

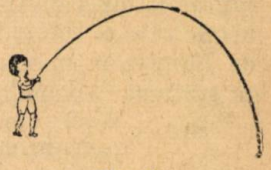


Fig. 1

In articolul de faţă vom arăta cititorului cum apar unele linii curbe în practica vieţii şi în tehnică, demonstrînd astfel necesitatea studierii lor de către anumite capitole ale matematicii.

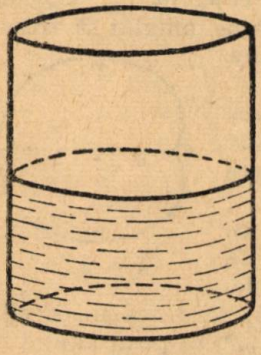


Fig. 2

Urmăriţi, de pildă, drumul pe care-l descrie o pietricică svîrlită oblic dintr-o praştie (fig. 1). Forma traiectoriei descrisă de mobil seamănă cu graficul trinomului de gradul al doilea. Un studiu aprofundat ne precizează chiar natura curbei. Traiectoria descrisă de pietricică este o parabolă.

Turnaţi apă într-un pahar cilindric, pînă la mijlocul său, şi observaţi forma marginii de sus a suprafeţei apei din pahar. Marginea este un cerc, atunci cînd paharul este aşezat în poziţie verticală (fig. 2).

Inclinaţi paharul şi urmăriţi conturul suprafeţei apei din pahar, cercul dispare. Se observă o linie ovală (fig. 3 a şi 3 b).

Urmăriţi atent marginea petei luminoase de pe un perete unde aruncăm lumină cu ajutorul unei lămpi de buzunar care are o lentilă circulară.

Dacă aruncăm un fascicol de lumină perpendicular pe perete, marginea petei luminoase este o circumferință. Mișcînd lampa de buzunar obținem forme de linii care trec de la cerc la ovale și alte forme cum sînt cele din figura 4.

Oamenii de știință, au cercetat natura acestor linii și au urmărit dacă graficul trinomului de gradul al doilea nu este același cu traiectoria unui

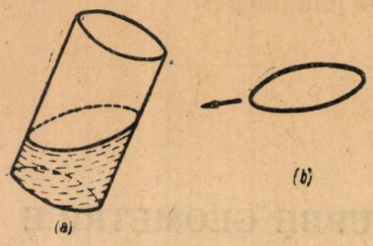


Fig. 3

Fig. 4

proiectil aruncat dintr-o armă sau cu una din formele petei luminoase de pe peretele pe care aruncăm un fascicol de lumină dintr-o lampă de buzunar. Ei au ajuns la o concluzie foarte importantă. Toate liniile de mai sus sînt de aceeași natură. Au însușiri comune, care au fost stabilite de matematicienii tuturor timpurilor. Ba mai mult, astronomii au stabilit că drumul descris de Pămînt în jurul Soarelui este o curbă ovală asemănătoare cu marginea suprafeței apei dintr-un pahar cilindric înclinat. Traiectoriile descrise de planetele care se rotesc în jurul Soarelui sînt asemănătoare cu traiectoria descrisă de Pămînt în mișcarea sa de revoluție. Cometele descriu linii asemănătoare cu graficul trinomului gradul al doilea și cu traiectoria unui proiectil aruncat dintr-o armă, iar toate curbele despre care am vorbit pînă aci se pot obține intersectînd un con circular drept printr-un plan și de aceea poartă numele de conice.

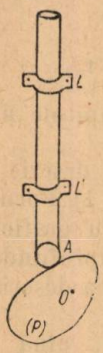


Fig. 5

* * *

2. Tehnica modernă realizează mașini capabile să execute tot felul de lucrări. Aceste mașini au permis omului să treacă la o productivitate care creștea pe măsura perfecționării aparatelor.

Fiecare mașină este o asociație de piese legate între ele în diverse moduri. Cînd una din piese se mișcă ea comunică altora anumite mișcări.

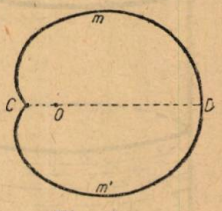


Fig. 6

De pildă, se pune adeseori problema ca o piesă care se rotește uniform în jurul unei axe să comunice alteia o mișcare uniformă alternativă și rectilinie.

Bara AB alunecă între două ghidaje fixe L și L' (fig. 5), care mențin direcția barei în tot timpul mișcării provocată de rotația camei (P) în jurul axului O. Punîndu-se problema ca bara AB să aibă o mișcare alternativă și uniformă, profilul camei (P) capătă forma liniei arătată în figura 6.

Această linie este formată din două arce identice CmD și $Cm'D$ ale unei curbe numită spirală a lui Arhimede.

Alte ori se pune problema de a transforma o mişcare alternativă rectilinie într-o mişcare alternativă circulară.

Fizicianul Watt a reuşit să rezolve această problemă prin folosirea a trei bare articulate.

Barele OA şi CB se rotesc în jurul punctelor fixe O şi C (fig. 7). Bara de lungime fixă AB este articulată cu celelalte două în A şi B. Se demonstrează riguros că un anumit punct fix M de pe bara mobilă AB descrie în timpul mişcării o curbă în forma arătată de figura 8.

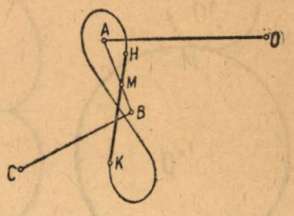


Fig. 7

Cunoscînd însuşirile acestei curbe, Wat a folosit faptul că porţiunea HK este aproape dreaptă şi e descrisă de punctul M.

Prin realizarea sistemului articulat $OABC$ arătat mai sus şi punînd pe M să se mişte rectiliniu pe proţiunea HK a rezultat că A şi B descriu alternativ arce de cerc cu centrele în O şi C.

Astfel se realizează transformarea mişcării alternative rectilinie în mişcare alternativă circulară.

Fig. 8

* * *

3. Pentru a construi un cot cilindric, tinichigii croiesc din tablă de fier dreptunghiulară două bucăţi de formă identică cu a aceleia din figura 9.

Prin alipirea laturilor Aa şi $A'a'$ (fig. 9) se obţine o parte a cotului (fig. 10 a). Alipind secţiunile oblice a celor două cilindre (fig. 10b) se realizează cotul.

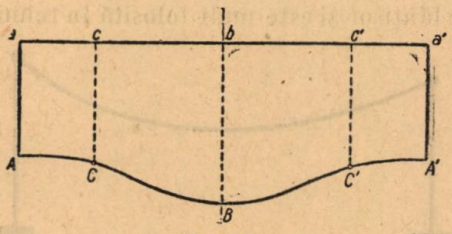


Fig. 9

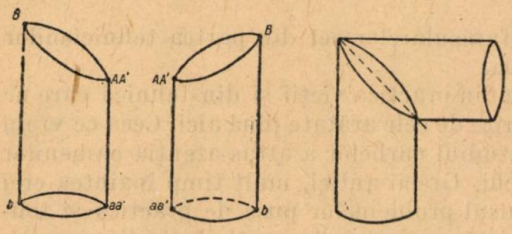


Fig. 10

In tehnică se pun des astfel de probleme. Din table plane urmează să se obţină o croială cu care prin îndoire să se poată realiza o anumită suprafaţă. Astfel de probleme se cer a fi rezolvate de către acei care se ocupă cu trasarea curbelor. Ele ne pun în faţa unor linii noi în anumite situaţii. Linia $ACBC'A'$ (fig. 9) din problema de mai sus este o sinusoidă.

Cunoaşterea însuşirilor acestei sinusoide şi a calculelor legate de ea ne permite să rezolvăm cu uşurinţă problema de mai sus.

* * *

4. In problema transformării mişcărilor, un rol foarte important îl au roţile dinţate, care angrenate între ele transformă o mişcare într-alta. Realizarea tehnică a roţilor dinţate cere din partea proiectanţilor cunoaşterea unor linii numite epicicloide.

Un punct M de pe o circomferinţă mobilă (fig. 11) care se rostogoleşte peste circumferinţa fixă O descrie o curbă epicicloidă.

Formele acestor curbe sînt variate, ele depind de raportul dintre lungimile celor două raze.

Dacă cercurile sînt egale, curba epicicloidă are forma din figura 12.

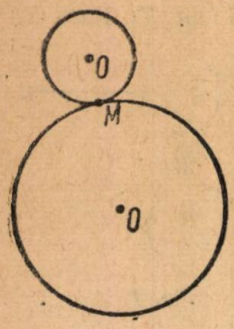


Fig. 11

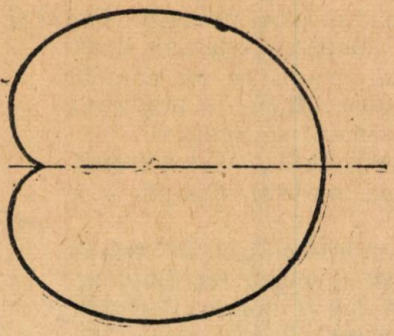


Fig. 12

Curba (fig. 12) se numeşte cardiodă, deoarece forma ei se aseamănă cu forma inimii.

Dacă raza cercului fix este de trei ori mai mare decît raza cercului mobil, curba are înfăţişarea din figura 13.

5. Practica vieţii şi tehnica înaintată ne pun în faţa unor curbe avînd forme cu totul noi. Gîndiţi-vă la forma pe care o ia o frînghie prinsă la capete de doi stîlpi de aceeaşi înălţime. Oricine poate observa o curbă care seamănă cu un arc de parabolă (fig. 14).

Firele de telegraf prinse de stîlpi nu au o formă de linie dreaptă, ceea ce oricine poate observa cu uşurinţă. Forma liniei firelor de telegraf seamănă cu aceea a frînghiei prinsă la capete. Ştiinţa ne arată că această curbă deşi seamănă cu parabola este de o natură cu totul diferită de ea. Curba poartă numele de lănţişor şi este mult folosită în tehnică.

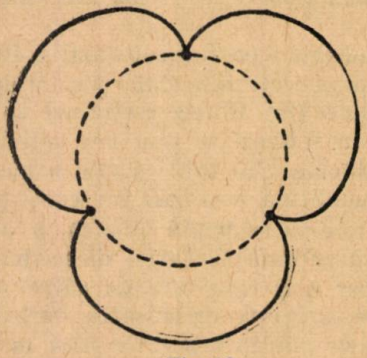


Fig. 13

Fig. 14

Construcţia podurilor suspendate, a funicularelor cer din partea tehnicienilor cunoaşterea profundă a acestei curbe.

Se pot da încă numeroase exemple din practica vieţii şi din tehnică care ne pun în faţa unor curbe cu totul diferite de cele arătate pînă aici. Ceea ce vrem să arătăm cititorului este faptul că studiul curbelor a atras atenţia oamenilor de ştiinţă din timpurile cele mai vechi. Grecii antici, mult timp înaintea erei noastre, studiind geometria sub impulsul problemelor puse de practică şi tehnica construcţiilor din epoca sclavagistă au fost îndemnaţi să studieze curbe noi diferite de circumferinţă, care era cea mai cunoscută curbă din acea epocă.

Apolonius din Perga (secolul III î. e. n.) a studiat secţiunile plane dintr-un con şi cilindru descoperind elipsa, iperbola şi parabola. Aceste curbe numite conice, au fost studiate de urmaşii grecilor antici, iar unele însuşiri descoperite sînt folosite în tehnică pentru realizarea unor dispozitive optice, la construcţii de bolţi, poduri, etc.

CERUL ÎN SEPTEMBRIE

Prof. V. DAIMACA

PENTRU a uşura observarea cerului, oamenii au împărţit stelele în grupuri, care au în fiecare noapte aceiaşi înfăţişare.

Ei au asemuit aceste grupuri de stele, numite constelaţii, cu tot felul de apariţii legendare, cu eroi antici, animale sau unelte uzuale şi de aici şi numele acestor constelaţii.

In aparenţă bolta cerească are înfăţişarea unei emisfere goale, al cărui centru îl ocupăm noi, iar pe această emisferă sînt fixate stelele. A doua emisferă, rămîne invizibilă, fiind aşezată sub noi, adică dedesuptul Pămîntului. Această aparenţă a înşelat pe oameni în vechime făcîndu-i să creadă că Pămîntul este aşezat în centrul lumii, iar sfera cerească era considerată de ei drept o realitate. Rezultatele precise la care a ajuns astronomia, în ce priveşte aşezarea Pămîntului în sistemul solar, nu mai lasă astăzi nici o îndoială.

Se cunoaşte astfel, cu toată siguranţa următoarele realităţi:

1) Sfericitatea globului pămîntesc, 2) izolarea Pămîntului în spaţiu, 3) mişcarea de rotaţie a Pămîntului în 24 ore, în jurul axului său de rotaţie, de la apus spre răsărit şi 4) mişcarea anuală, de revoluţie a Pămîntului în jurul Soarelui, prin care se descrie elipsa kepleriană.

Astfel stînd lucrurile sfera cerească nu este decît o iluzie, mişcarea diurnă a stelelor este o aparenţă, iar deplasarea Soarelui pe ecliptică prin zodiac, în timpul unui an, este doar un efect de perspectivă.

Cercetările şi observaţiile astronomice se fac prin studierea mişcărilor aparente. De aceea, vom spune că sfera cerească se învîrte uniform în jurul nostru, de la răsărit spre apus, în timp de 24 ore. Această presupusă mişcare face ca prin faţa noastră să defileze constelaţiile cerului.

Intr-o noapte nu putem vedea toate constelaţiile de pe sfera cerească, deoarece nu dispunem de o noapte continuă de 24 ore. Lumina zilei, face să nu mai putem vedea constelaţiile, cu mult înainte de răsăritul Soarelui. Cum se explică acest fenomen? Atmosfera Pămîntului, prin a cărei transparenţă putem cerceta astrele cerului, se colorează în albastru odată cu aurora dimineţii. Lumina Soarelui, difuzată de pulberi şi de vaporii de apă ce se găsesc în atmosferă, transformă aerul într-o perdea şi din această cauză nu putem observa stelele şi ziua.

Să revenim acum la constelaţiile cerului. Infăţişarea lor este aceiaşi ca şi acum cîteva mii de ani. De exemplu, Carul Mare are astăzi acelaşi aspect ca şi acum 6000 de ani şi va păstra aceeaşi înfăţişare încă multe veacuri în viitor.

Astronomii ştiu însă că stelele nu sînt fixe, că distanţele dintre ele se schimbă. In adevăr, stelele se mişcă în spaţiu cu viteze diferite şi cu o libertate oarecare în direcţiile respective.

Deoarece distanţa pînă la stele este foarte mare, trebuie să treacă mii de ani pentru ca lumina care vine de la ele să ajungă pînă la noi şi să ne dea astfel de veste despre mişcarea lor.

Astfel Carul Mare îşi va schimba forma şi va avea cu totul altă înfăţişare, abia după aproximativ 500 de veacuri.

Cele mai vechi constelaţii cunoscute sînt constelaţiile zodiacale. Acestea sînt aşezate de-a lungul eclipticii, formînd o zonă largă de 18° şi înclinată cu circa 23° pe ecuatorul ceresc.

Zodiacul are 12 constelaţii adică tot atîtea constelaţii cîte luni sînt într-un an, iar Soarele străbate aceste constelaţii de la apus spre răsărit în timpul unui an. Spre nord se văd oricînd constelaţiile circumpolare: Carul Mare şi Carul Mic, Dragonul sau Balaurul, Cassiopeea, Cefeu, Perseu, Girafa şi Lynxul. Primele şase constelaţii au fost cunoscute din timpuri străvechi, iar ultimele două au fost denumite recent. Există apoi constelaţiile denumite de astronomii greci, după numele unor personajii legendare. In fine mai sînt constelaţiile denumite de astronomii care au trăit în timpurile apropiate de noi, cu numele de Şopîrla, Vulpea, Scutul lui Sobietski, Ogarii, etc. Vom face un scurt istoric al cîtorva constelaţii vizibile în luna septembrie.

Privind bolta cerească spre nord, vom observa foarte uşor constelaţia prea bine cunoscută de popor, Carul Mare.

O linie închipuită trecînd prin ultimile două stele ale patrulaterului ce înfăţişează schematic un car, şi prelungită cam de cinci ori, ne duce la o stea de culoare gălbuie mai luminoasă decît cele vecine; aceasta este « steaua polară ».

In adevăr, alături de ea se găseşte polul nord ceresc, punct abstract, unde axa de rotaţie a Pămîntului prelungită indefinit, înţeapă sfera cerească. Steaua polară, arată nordul şi stelele ce formează constelaţia Carul mic, împreună cu ea, se învîrtesc în jurul acestui pol, în 24 ore, în sens invers mersului acelor unui ceasornic.

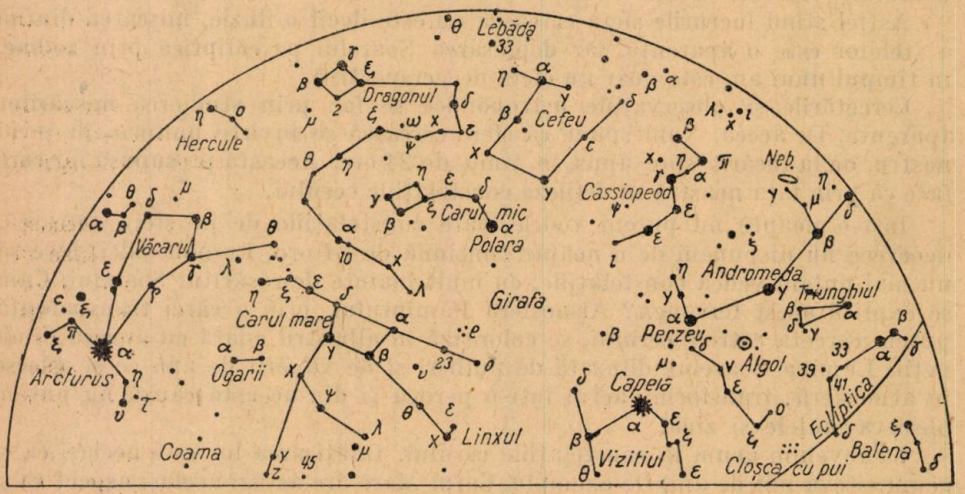


Fig. 1

De altfel, toate stelele din figura 1, se învîrtesc la fel.

Fenicienii numeau această constelaţie « coada cîinelui »; ea se mai numeşte şi « Feniciana ». In călătoriile lor pe mare fenicienii se orientau observînd această constelaţie. Steaua β, era stea polară acum 3000 de ani şi fenicienii o numeau de aceea Kaucab-al-Shemali, adică steaua nordului.

Thales din Milet (anul — 700) numeşte cel dintîi această constelaţie « Ursul mic ».

In mitologie, Carul mare era numită Ursa mare şi această ursoaică fusese odinioară zeiţa Callisto, iar Ursul mic, cîinele ei. Legenda spune că zeul

Jupiter şi cu zeiţa Callisto au avut un băiat numit Arcas. Transformaţi în constelaţii Callisto devine ursoaica mare iar fiul ei Arcas, constelaţia Văcarul.

Mai tîrziu cele şapte stele luminoase care formează şi astăzi trupul Ursei mari (sau Carul Mare) au devenit şapte boi care pasc liniştiţi pe cîmpiile cereşti. Arcas este păzitorul lor, adică Văcarul. Dar aceşti şapte boi, se învîrtesc necontenit în jurul polului, indicat aproximativ de steaua polară. De aceea li s-a dat numele de septem-trionis, adică cei şapte trurători.

Astfel s-a născut cuvîntul septemtrional, care arată ceva nordic adică ceva situat la miază-noapte. Intre Carul mare şi Carul mic, se află un şir de stele care ocolesc aceste două constelaţii după o linie şerpuită ce se termină cu un patrulater. Şirul de stele formează trupul Dragonului, sau Balaurul, iar patrulaterul reprezintă capul. Steaua α, situată între Carul mare şi Carul mic (vezi fig. 1) era stea polară acum 4.600 de ani, după cum se poate constata printr-un calcul retrospectiv al precesiei echinocţiilor, după observaţiile directe făcute în China antică şi după înclinarea galeriilor piramidelor egiptene.

Steaua γ, care alcătuieşte capul dragonului, a servit lui Bradley, în 1728, să găsească aberaţia luminii [1]).

La răsărit de Carul mic se află aşezată în Calea Laptelui, constelaţia Cassiopeea, avînd forma unui W.

Intre aceasta şi Carul mic, ridicată spre zenit este constelaţia Cefeu.

Sub Cassiopeea, tot în Calea Laptelui este constelaţia Perseu, situată la nord-est deasupra orizontului.

La dreapta lui Perseu, se întinde spre est şi sud-est constelaţia Andromeda, de care este legată constelaţia Pegas sau Calul înaripat. Sub Andromeda, este o mică constelaţie « Triunghiul » iar sub Pegas se desfăşoară zodia Peştilor. Pentru a identifica pe bolta cerească, constelaţia Cassiopeea, e de ajuns să ştim că această constelaţie este aşezată simetric cu Carul mare, faţă de steaua Polară. Deci, în cazul nostru, privind nordul, Carul mare e la vest (la stînga observatorului) iar Cassiopeea e la est (la dreapta observatorului). Tot în Calea laptelui este situată şi constelaţia Cefeu. Constelaţiile Cefeu, Perseu, Andromeda şi Pegas, au o origină mitologică comună.

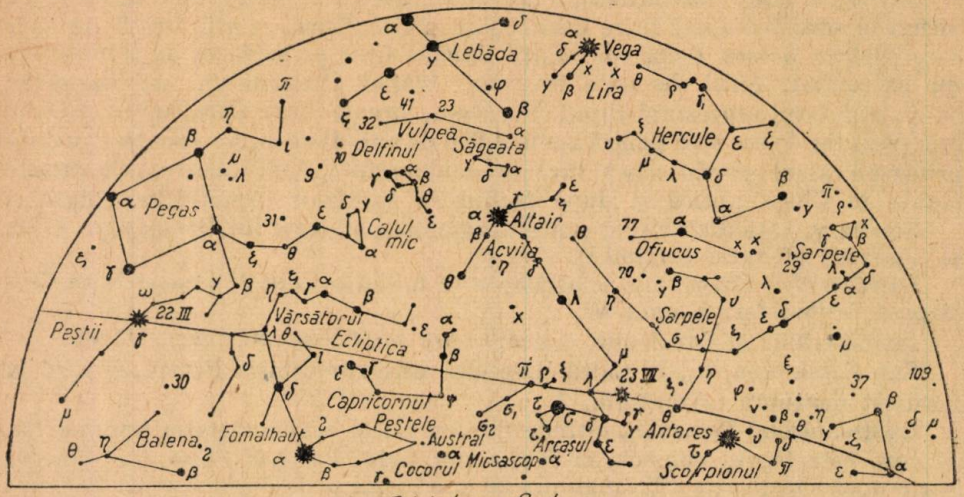
In legendele antice, se spune că Cefeu a fost un rege al Etiopiei (Abisinia de azi), iar Cassiopeea soţia lui. Fiindcă, aceasta a avut îndrăzneala să afirme că este mai frumoasă de cît Nereidele, care erau zeiţe de rasă albă, acestea s-au plîns lui Neptun, zeul mărilor. Ele au rugat pe Neptun să le răzbune de această ocară. Neptun, trimite atunci un monstru marin, care făcînd pagube imense pe coastele Siriei, determină pe Cefeu să-şi sacrifice fiica, numită Andromeda. Aceasta înlănţuită de o stîncă este lăsată pradă groaznicului monstru. Perseu, un viteaz neînfricat, încalecă în grabă pe calul înaripat, numit Pegas, ia într-o mînă capul Meduzei, care avea darul să împietrească pe cel care o privea, şi aleargă spre stînca de care era înlănţuită Andromeda. A ajuns la timp, căci împietrind monstrul, scapă pe Andromeda dela moarte.

---

[1]) Bradley a stabilit că în cursul unui an coordonatele stelelor « fixe » suferă mici variaţii periodice, ele descriind pe bolta cerească nişte elipse a căror axă mare corespunde unui unghi de 40″,29. Lungimea axei mici depinde de poziţia stelei respective faţă de planul eclipticii; stelele situate în acest plan oscilează pe un segment de dreaptă de mărime unghiulară 40″,9; stelele depărtate cu 90° de planul eclipticii descriu un cerc, iar cele cu poziţii intermediare elipse mai mult sau mai puţin turtite. Bradley a explicat acest fenomen, pe care l-a denumit « aberaţia luminii » găsind astfel o nouă metodă pentru determinarea vitezii luminii bazată pe observaţii astronomice.

Perseu se căsătoreşte cu Andromeda şi de atunci cerul înstelat păstrează amintirea acestei întîmplări, căci eroii legendei au fost transformaţi în constelaţii. Monstrul marin este înfăţişat printr-un oval de steluţe ce se găsesc între Andromeda şi Pegas şi este o parte din Zodia Peştilor.

La zenit, avem constelaţia Lebăda sau Crucea Nordului, situată în întregime într-o regiune bogată a Căii Laptelui Din această parte a bolţii cereşti, Calea laptelui se bifurcă: o parte trece prin Ofiucus (vezi fig. 2), Şarpele şi



Privind spre Sud

Fig. 2

Scorpionul, iar altă parte străbate Vulpea, Săgeata, Vulturul şi se pierde la orizontul de sud în constelaţia Arcaşul sau zodia Săgetătorul.

De notat că sub Pegas este constelaţia Peştii, iar sub aceasta se află constelaţia Balena. Dacă privim dela zenit spre miază-zi, întîlnim trei constelaţii mici şi anume Delfinul, Calul mic, iar la dreapta, în Calea Laptelui, Săgeata. Sub aceasta se desfăşoară în Calea Laptelui constelaţia Vulturul şi urmînd spre sud, de-a lungul căii Laptelui, avem sub Vulturul, mica constelaţie Scutul, apoi Arcaşul.

La vest de aceasta găsim Scorpionul cu steaua denumită Antares, stea roşietică α şi de primă mărime. La dreapta, spre sud-vest, zodia Cumpăna sau Balanţa începe să apună. Aproape de zenit, avem strălucitoarea stea albăstruie, Wega, cea mai strălucitoare stea din emisferul nord ceresc, sau α din constelaţia Lira.

Spre vest, avem constelaţia Hercule, apoi Şarpele şi Ofiucus. Toate aceste constelaţii, la care adăugăm Văcarul, cu α numit Arcturus, stea portocalie strălucitoare şi mica constelaţie Coroana boreală, cu α numită Perla, precum şi Vărsătorul, Capricornul şi Peştele austral, terminăm descrierea constelaţiilor vizibile la 1 septembrie ora 9 seara. Trebuie amintit că oriče stea răsare în fiecare seară mai devreme cu patru minute de cît în seara precedentă şi apune de asemenea mai devreme; de aceea înfăţişarea cerului se schimbă din seară în seară, aşa fel încît la 15 septembrie, constelaţiile enumerate aci, pentru aceeaşi oră (9 seara), se găsesc deplasate spre vest cu 15 grade. La sfîrşitul lunei, Cumpăna şi Scorpionul au dispărut la orizont fiind apuse, iar la răsărit au apărut alte constelaţii noi.

De aceea pentru a putea identifica toate constelaţiile vizibile la noi în ţară, e nevoie de un an întreg. Notăm că pe cerul de la 1 septembrie, avem: şase stele strălucitoare şi anume: Arcturus, Vega, Capra sau Cappella, Altair, Fomalhaut şi Antares. Spre deosebire de aceste stele, care sînt aşezate în constelaţiile respective şi îşi păstrează distanţele relative în raport cu celelalte stele, putem găsi alte astre tot strălucitoare, cu lumina liniştită şi care alunecă încet printre stele. Aceste astre sînt planetele. Ele circulă pe sfera cerească pe traiectorii situate numai în zodiac.

Planetele în septembrie 1954

Planeta Venus este luceafăr de seară, toată luna. Va fi în conjuncţie [1]) cu Luna la 1 septembrie şi 30 septembrie. Planeta Marte, poate fi observată la sud-vest în prima jumătate a lunei septembrie şi se află în constelaţia Săgetătorul. Planeta Jupiter poate fi observată către sfîrşitul nopţii la est, fiind situată în constelaţia Gemenii. Planeta Saturn va fi vizibilă la vest, scurt timp după sosirea nopţii fiind situată în constelaţia Balanţa. Planeta Uranus se găseşte în constelaţia Gemenii, deci invizibilă cu ochii liberi în septembrie seara. Planeta Neptun mai slabă decît Uranus este de asemenea invizibilă, fiind în zodia Fecioara.

Fazele Lunei în septembrie 1954

Primul pătrar la 5 septembrie la 14^h, 28^m.
Luna plină la 13 septembrie la 22^h 19^m.
Ultim pătrar la 19 septembrie la 13^h 11^m.
Luna nouă la 17 septembrie la 2^h 50^m.

Fenomene cereşti în septembrie 1954

La 1 septembrie la 16^h 31^m Venus în conjuncţie cu Luna.
La 2 septembrie la 16^h 16^m Saturn în conjuncţie cu Luna
La 7 septembrie la 11^h 41^m Marte în conjuncţie cu Luna
La 16 septembrie la 5^h Venus în conjuncţie cu Saturn
La 21 septembrie la 17^h 45^m Jupiter în conjuncţie cu Luna
La 23 septembrie la 15^h 56^m Soarele intră în semnul Balanţa, începe toamna
La 30 septembrie la 4^h 19^m Saturn în conjuncţie cu Luna.

PENTRU CERCURILE DE FIZICĂ

PRESIUNEA RADIAŢIILOR

PE la sfîrşitul secolului trecut se considera că studiul asupra inerţiei corpurilor este încheiat şi că principiul inerţiei nu s-ar mai putea extinde şi la alte fenomene decît cele pur mecanice. Iată însă că în anul 1873. Maxwell,

[1]) Conjuncţie înseamnă că astrele amintite au la un moment dat, aceeaşi ascensie dreaptă sau mai simplu sînt apropiate una de alta.

bazat pe teoria electromagnetică a luminii elaborată de el, găseşte că, în general, orice radiaţie electromagnetică posedă o proprietate mecanică: inerţia. Desigur că această idee a fost primită cu neîncredere, deoarece nu se putea concepe existenţa inerţiei acolo unde nu există şi masă. Prima concluzie la care ajungem adoptînd ipoteza lui Maxwell este că orice radiaţie care are inerţie, are şi «presiune» asupra corpurilor pe care cade. Pe cale matematică. Maxwell a stabilit şi valoarea acestei presiuni, care, desigur este foarte mică: la amiază, cînd razele solare cad sub un unghi foarte mare, faţă de orizontală, presiunea ar fi, după Maxwell de 4 g pe o suprafaţă de 1 ha. Trebuia o măestrie deosebită pentru a verifica experimental faptele stabilite pe cale teoretică. Timp îndelungat, nici un învăţat nu a reuşit să pună în evidenţă infima valoare a presiunii luminii solare. Abia după 27 de ani, în 1900, marele fizician rus P. N. Lebedev (1866—1912) a reuşit să dovedească experimental presiunea radiaţiilor, prevăzută teoretic de Maxwell. Iată principiul experienţei lui Lebedev: el a luat un balon de sticlă în interiorul căruia a suspendat un cadru cu două discuri metalice, M_1 şi M_2 (fig. 1), unul lustruit (M_1) şi unul înegrit (M_2). Cadrul era suspendat cu ajutorul unui fir subţire AB, cu o rezistenţă mică la torsiune. După ce a realizat în balon un vid extrem de înaintat, a trimis asupra celor două discuri un fascicol de raze luminoase de la un arc electric şi a observat rotirea cadrului M_1 M_2 în jurul firului de suspensiune. După gradul de torsiune s-a măsurat valoarea presiunii radiaţiei luminoase. Tot Lebedev a mai calculat că pe o suprafaţă lustruită, care reflectă aproape toate radiaţiile primite, presiunea este de două ori mai mare decît pe o aceeaşi suprafaţă, înegrită, care absoarbe radiaţiile primite. Lucrul acesta este explicabil dacă ne gîndim că un corp negru transformă toată energia primită în energie calorică, pe cînd unul lustruit nu poate transforma energia reţinută decît în energie cinetică.

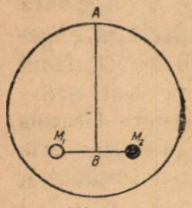


Fig. 1

In anul 1901, o nouă experienţă veni să întărească rezultatele lui Lebedev. Iată principiul ei: un tub de sticlă în care se face vid are forma celui din fig. 2. In partea de sus a tubului (A) se află un amestec fin de praf de cărbune (obţinut prin arderea unor spori de ciupercă) şi smirghel, amestec ce curge în partea de jos a tubului (B) sub forma unui firişor subţire. Spre tubul B se îndreaptă un fascicol convergent de raze provenind de la o sursă puternică (C). Fasciculul de raze cade asupra firişorului ce trece prin gîtuitură. Se observă că firişoarele de cărbune sînt aruncate spre peretele opus al tubului B, pe cînd praful de smirghel, mai greu, continuă să cadă pe verticală.

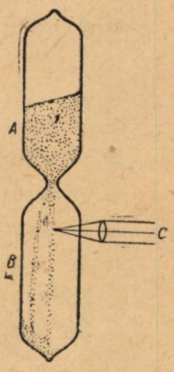


Fig. 2

In anul 1910, tot P. N Lebedev a dat o metodă la fel de ingenioasă de determinare experimentală a presiunii luminii asupra gazelor.

Toate aceste experienţe au făcut posibilă măsurarea cu exactitate a presiunii luminii: 0,26 mg/m². Dar rolul lor nu s-a mărginit la aceasta. Experienţele lui Lebedev au adus o confirmare strălucită teoriei electromagnetice a luminii. Această teorie susţinea că lumina nu este un fenomen periodic mecanic, ci un fenomen periodic electromagnetic. Orice radiaţie este rezultatul variaţiei foarte repezi a două cîmpuri: electric şi magnetic, perpendiculare unul pe altul

şi pe direcţia de propagare. Prin cercetările sale teoretice (verificate mai tîrziu de Hertz), Maxwell dă o explicaţie satisfăcătoare fenomenelor optice cunoscute. Teoria electromagnetică este întărită din ce în ce mai mult prin descoperirea unor noi fenomene: dublarea liniilor spectrale într-un cîmp magnetic (efectul Zeeman) sau electric (efectul Starck). Totuşi, fenomenul fotoelectric studiat de învăţatul rus Stoletov (1888) nu se mai putea explica prin teoria lui Maxwell, care nu dădea nici o indicaţie cu privire la producerea şi absorbţia radiaţiilor de către corpuri.

Teoria cuantelor, elaborată de Max Planck în anul 1900, veni să salveze situaţia. Ea susţinea că energia este emisă şi absorbită de corpuri în mod discontinuu, în cuante de energie caracteristice fiecărui fel de radiaţie. Energia unei cuante este dată de relaţia

$$\varepsilon = h\nu$$

în care ν este frecvenţa radiaţiei, iar h o constantă universală, numită constanta lui Planck şi egală cu $6{,}5 \cdot 10^{-27}$ erg. s.

In anul 1906, Langevin şi 1912 Einstein găsesc însă o relaţie care avea să deschidă drumuri noi în ştiinţă. Bazaţi pe teoria cuantelor şi pe un alt fenomen descoperit cu puţin mai înainte — variaţia masei unui corp cu viteza sa — ei au găsit relaţia reciprocă dintre masă şi energie. Această relaţie este

$$W = m\,c^2 \quad \text{sau} \quad m = \frac{W}{c^2}$$

unde m este masa corpului, W energia lui totală şi c viteza luminii în vid (300.000 km/s.) Semnificaţia fizică a acestei legi este următoarea: în orice împrejurare, un corp de masă m posedă o energie totală egală cu $m\,c^2$ ergi şi, invers o energie W posedă o masă $m = W/c^2$ g. Deoarece c^2 este o mărime foarte mare ($c^2 = 9 \cdot 10^{10}$ km/s $= 9 \cdot 10^{20}$ cm/s), masa corespunzătoare unei energii este foarte mică şi, invers, energia corespunzătoare unei mase este foarte mare. De exemplu, un gram de materie, considerată în repaus şi la temperatura de zero absolut, corespunde unei energii de:

$W = m\,c^2 = 1 \cdot c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ erg $= 215 \cdot 10^{10}$ calorii mici, adică o energie enormă.

Teoria cuantelor ne învaţă că energia radiaţiilor nu este distribuită uniform, ci în cuante, a căror energie este:

$$W = h\nu$$

Din această formulă se vede că mărimea unei cuante depinde de frecvenţa radiaţiei ce o transportă. Ea se numeşte *foton*. In gama radiaţiilor vizibile şi invizibile, valoarea unui foton este în funcţie de regiunea spectrală în care este emis. Un foton al razelor Röntgen ($\nu_1 = 6 \cdot 10^{16}$ Hz) are valoarea

$$W_1 = h\nu_1 = h \cdot 6 \cdot 10^{16} = 37 \cdot 10^{-11} \text{ erg.}$$

Un foton ce aparţine radiaţiei violete din spectrul vizibil ($\nu_2 = 8 \cdot 10^{14}$ *Hz*) are valoarea

$$W_2 = h\,\nu_2 = h \cdot 8 \cdot 10^{14} = 52 \cdot 10^{-13} \text{ erg.}$$

Un foton ce aparţine radiaţiei roşii ($\nu_3 = 4 \cdot 10^{14}$ *Hz*) are valoarea

$$W_3 = h\,\nu_3 = h \cdot 4 \cdot 10^{14} = 26 \cdot 10^{-13} \text{ erg},$$

iar un foton al undelor radiofonice, cu frecvenţe foarte mici ($\nu_4 = 2 \cdot 10^4$) are valoarea

$$W_4 = h\,\nu_4 = h \cdot 2 \cdot 10^4 = 13 \cdot 10^{-23} \text{ erg}.$$

Valorile maselor acestor fotoni sînt date de formula:

$$= \frac{W}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

Vom avea respectiv,

$$m_1 = \frac{W_1}{c^2} = \frac{37 \cdot 10^{-11} \text{ erg}}{9 \cdot 10^{20} \text{ cm/s}} = 4{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ g}$$

$$m_2 = \frac{W_2}{c^2} = \frac{52 \cdot 10^{-13}}{9 \cdot 10^{20}} = 5{,}9 \cdot 10^{-33} \text{ g}$$

$$m_3 = \frac{W_3}{c^2} = \frac{26 \cdot 10^{-13}}{9 \cdot 10^{20}} = 2{,}9 \cdot 10^{-33} \text{ g}$$

$$m_4 = \frac{W_4}{c^2} = \frac{13 \cdot 10^{-23}}{9 \cdot 10^{20}} = 1{,}4 \cdot 10^{-43} \text{ g}$$

Desigur că aceste valori extrem de mici ale masei fotonilor nu puteau fi puse în evidenţă cu mijloacele fizicii clasice şi nici calculate înainte de cunoaşterea formulei lui Einstein. Această masă există totuşi şi ea ne permite explicarea fenomenului de inerţie sau presiune a luminii şi a radiaţiilor în genere.

Inerţia este deci o proprietate generală a radiaţiilor şi manifestarea ei este dovedită deseori în natură, în afară de ingenioasele experienţe ale lui Lebedev.

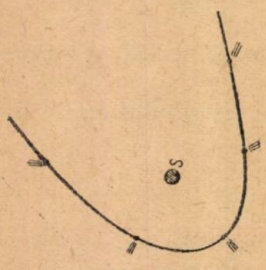


Fig. 3

De exemplu, coada cometelor, care este compusă din particule foarte mici de materie, este îndreptată totdeauna în sens opus Soarelui (fig. 3). Acest lucru se întîmplă deoarece forţa de atracţie între particule şi Soare este mai mică decît presiunea radiaţiilor solare asupra particulelor. In punctele de pe orbită mai apropiate de soare, cometa are o coadă mai lungă, pe cînd în cele mai îndepărtate ea este mai scurtă. De asemenea, protuberanţele solare sînt încă o dovadă a presiunii luminii.

Ca încheiere, nu e de prisos să arătăm că pe baza presiunii radiaţiilor, Svante Arrhenius a încercat să explice originea vieţii pe Pămînt. Germenii de viaţă de pe o planetă au fost ridicaţi de agenţii fizici la înălţimi mari în atmosferă, iar de aici, razele astrelor au transportat aceşti germeni prin spaţiile siderale pînă la vreo planetă cu condiţii favorabile de dezvoltare. Această teorie a căzut, deoarece s-a lovit de obiecţiuni serioase cum ar fi de exemplu, influenţa distrugătoare a razelor ultraviolete din spaţiile siderale, sau temperatura de zero absolut a acestor spaţii.

Din cele relatate se poate vedea că o contribuţie foarte însemnată la studiul luminii a fost adusă de savanţii ruşi: Stoletov prin cercetarea efectului fotoelectric şi Lebedev prin măsurătorile efectuate asupra presiunii luminii.

Aceste experienţe au constituit o dovadă că lumina posedă nu numai energie, dar şi o masă. In zilele noastre, la studiul luminii a contribuit foarte mult renumitul savant sovietic S. I. Vavilov, precum şi alţi fizicieni care urmînd tradiţia fizicii ruse fac ca ştiinţa sovietică să fie astăzi în fruntea cercetărilor bazate pe interpretarea materialist-dialectică a fenomenelor naturii.

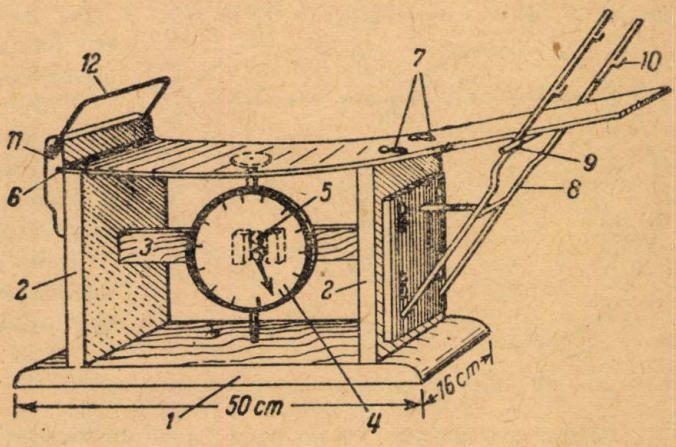
Alex. Butucelea, elev Tg. Ocna

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

DISPOZITIV PENTRU STUDIUL MIŞCĂRII CIRCULARE

LA studiul mişcării circulare se examinează mişcarea unui corp pe podurile convexe şi concave. Schimbarea forţei de presiune asupra podului în comparaţie cu greutatea corpului care se mişcă se poate demonstra cu următorul dispozitiv, (vezi figura).

Pe un postament de lemn 1, sînt fixaţi doi montanţi verticali 2 (stîlpii podului). Intre ei se montează o scîndurică 3, care serveşte drept suport pentru dinamometrul de demonstrare 4 (cu scară pînă la 1,2 kg). In scîndurică sînt executate două orificii 5, şi fixate două rigle mici. Pivotul cilindric al dinamometrului întră într-unul din orificii, iar ieşitura ce o are pe partea din spate, în spaţiul dintre rigle. Astfel, dinamometrul e fixat în plan vertical. Drept pardosea a podului serveşte o bucată de placaj groasă de 1—1,5 mm, care se sprijină pe montanţii verticali 2. Placajul intră cu o muchie în tăietura executată într-o riglă 6, fixată lateral pe unul din montanţi. Pe partea frontală (de sus) a celuilalt montant, se înşurubează două şuruburi astfel încît între capetele lor şi montant să rămînă un interstiţiu egal cu grosimea placajului. Pe acesta din urmă sînt executate două orificii baionetă 7, prin care el este fixat pe montant. Partea placajului care se prelungeşte dincolo de montant serveşte drept plan înclinat, de pe care ia viteză (îşi accelerează mişcarea) corpul.



Pe partea laterală a montantului din dreapta sînt înşurubate patru şuruburi, pe care este atîrnată o placă de fier demontabilă de care e sudat un suport (susţinător) de sîrmă 8 pentru planul înclinat. Acesta din urmă se sprijină pe o bară de fier 9, culcată pe cîrligele 10 ale suportului de sîrmă.

Drept corp în mişcare se foloseşte un cărucior, din completul construcţiei de metal, care poate fi încărcat cu greutăţi marcate.

Căruciorul coboară pe planul înclinat trece pe pod şi se loveşte de rigla de reazim 11. In urma loviturii cade cadrul de sîrmă 12 care cuprinde căruciorul pe după proeminenţa lui.

Demonstrarea se efectuează în felul următor: planul podului se fixează în poziţie (concavă) îndoită, iar dinamometrul, în orificiul de jos al scîndurelii 3. Mai întîi aşezăm căruciorul la mijlocul podului şi notăm indicaţia dinamometruilui. Pe urmă, dăm drumul căruciorului pe planul înclinat. De data aceasta dinamometrul indică o forţă de presiune considerabil mai mare. Diferenţa dintre indicaţiile dinamometrului este evidentă. Experienţa cu podul convex se efectuează în acelaş fel, însă pentru aceasta introducem dinamometrul în orificiul de sus al scîndurelii 3.

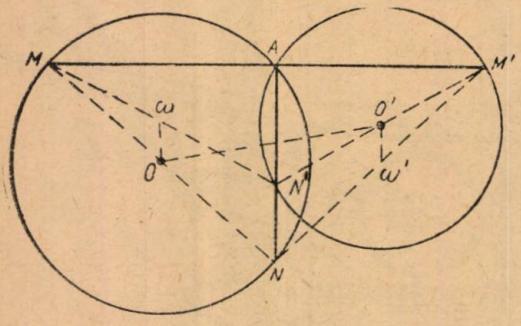
In momentul trecerii căruciorului pe mijlocul podului, dinamometrul arată o forţă de presiune mai mică decît greutatea căruciorului.

Dacă dispozitivul este executat minuţios putem verifica cu ajutorul lui şi legile cantitative.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1017

Se dau două cercuri O şi O' secante în punctele A şi B. Prin punctul A se duce o dreaptă Δ care taie cercurile (O) şi (O') în M şi M' şi o dreaptă Δ' perpendiculară pe Δ, care taie aceleaşi cercuri în N şi N'. Notînd cu ω centrul cercului MAN', şi cu ω' centrul cercului $M'AN$, se cere:



a) *Să se arate că* $\overline{\omega\omega'} = \overline{OO'}$.

b) *Locul geometric al centrelor* ω *şi* ω' *cînd dreptele* Δ *şi* Δ' *se rotesc în jurul lui* A *rămînînd perpendiculare.*

c) *Locul geometric al celui de-al doilea punct de intersecţie* (P) *al cercurilor* (ω), (ω').

d) *Să se determine poziţiile secantelor* Δ *şi* Δ' *astfel ca cercurile* (ω) *şi* (ω') *să fie egale.* **Gh. D. Simionescu**

Soluţie. a) Unghiurile NAM, $N'AM'$ fiind drepte, centrele ω şi ω' sînt respectiv situate în mijloacele segmentelor MN' şi NM'; iar punctele N, O, M respectiv N', O', M' sînt colineare. Vom avea deci, $\overline{\omega O} = \| \overline{O'\omega'} = \| \frac{1}{2}\overline{NN'}$ şi $\overline{\omega O'} = \| \overline{O\omega'} = \| \frac{1}{2}\overline{MM'}$.

Rezultă că patrulaterul $\omega O'\omega' O$ este dreptunghi, deci $\overline{\omega\omega'} = \overline{OO'}$.

b) Segmentul $\omega\omega'$ trece prin punctul fix C, mijlocul lui OO', iar $\overline{C\omega} = C\omega' = \frac{1}{2}\overline{OO'}$.

Locul centrelor ω şi ω' este deci cercul de diametru OO'.

c) Punctul P este simetricul lui A față de $\omega\omega'$. Deci, $\overline{AC} = \overline{CP}$. Locul lui P este deci, cercul $C\ (CA)$.

d) Va trebui deci să avem $A\omega = A\omega'$. Punctele ω și ω' se obțin în acest caz intersectînd cercul de diametru OO' cu diametrul perpendicular pe AC. Vom avea deci $\Delta \parallel \omega O'$ și $\Delta' \parallel \omega' O'$.

Problema 1018

1). *Care este diferența lungimilor a două pendule care bat secunda, una fiind la Moscova* ($g = 981{,}5\ cm/s^2$) *și alta la București* ($g = 980{,}55\ cm/s^2$).

2). *Cu cît ar înainta sau ar întîrzia fiecare pendulă în timp de 24 ore, dacă lungimile pendulelor s-ar schimba între ele?*

* * *

Soluție. 1. Lungimea pendulei care bate secunda este:

$$l = \frac{g}{\pi^2}\ ;\ \text{se ia}\ \pi = 3{,}1416$$

La Moscova:

$$l_M = \frac{981{,}5}{\pi^2} = 99{,}447\ \text{cm}$$

La București:

$$l_B = \frac{980{,}55}{\pi^2} = 99{,}35\ \text{cm}$$

$$l_M - l_B = 0{,}097\ \text{cm}$$

2. Avem:

$$T_M = \pi \sqrt{\frac{l_B}{g_M}} = \sqrt{\frac{g_B}{g_M}}\ \text{s. De unde log}\ T_M = \bar{1}{,}99979$$

$$T_B = \pi \sqrt{\frac{l_M}{g_B}} = \sqrt{\frac{g_M}{g_B}}\ \text{s}\ ;\ \log T_B = 0{,}00021$$

Pendula de la Moscova va înainta zilnic cu:

$86400\ (1 - T_M) \cong 42$ secunde

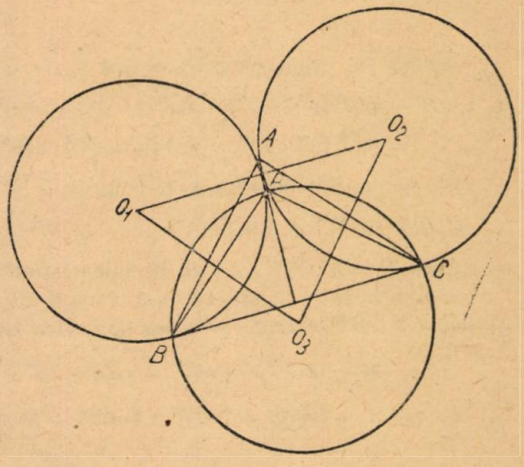
Pendula dela București va întîrzia zilnic cu:

$86400\ (T_B - 1) \cong 42$ secunde.

Problema 1062

Trei cercuri egale trec printr-un punct P și se intersectează două cîte două în punctele A, B, C. Să se arate că P este ortocentrul triunghiului ABC.

Mihail Popescu



Soluție. Fie O_1, O_2, O_3, centrele cercurilor considerate. Deoarece punctele O_1 și O_2 sînt simetricele punctului O_3 respectiv față de mijloacele segmentelor PB și PC, rezultă: $O_1O_2 \parallel BC$. Ținînd seamă că $AP \perp O_1O_2$, deducem: $AP \perp BC$ și prin analogie avem: $BP \perp AC$, $CP \perp AB$.

Problema 1065

Să se rezolve ecuația:

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+8=0.$$

S. V. Ionescu, elev, Pitești

Soluție: Ecuația se poate scrie:

$$[(x-1)(x-6)][(x-3)(x-4)]+8=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+8=$$

$$=(x^2-7x+6)(x^2-7x+6+6)+8=(x^2-7x+6)^2+6(x^2-7x+6)+8=0.$$

Deci am format ecuația:

$$(x^2-7x+6)^2+6(x^2-7x+6)+8=0 \text{ De unde}$$

$$x^2-7x+6=\frac{-6\pm 2}{2};$$

Pentru $x^2-7x+6=-2;$

sau $x^2-7x+8=0;\quad x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$

Pentru $x^2-7x+6=-4;$

sau $x^2-7x+10=0;\quad x=\frac{7\pm 3}{2};$

Deci rădăcinile ecuației sînt:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{17}}{2};\ x_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2};\quad x_3=5;\quad x_4=2;$$

Problema 1070

Să se arate că numărul $N=(3600)^n-(1200)^n+(69)^n-(207)^n$ *se divide cu 2262 oricare ar fi n întreg și pozitiv.*

Miron Oprea, student

Soluția I-a. Numărul 2262 se mai poate scrie $6\cdot 377$, iar numărul

$$N=400^n(9^n-3^n)+69^n(1-3^n)=400^n(9^n-3^n)-69^n(3^n-1)=$$

$$=400^n(9^n-3^n)-23^n(9^n-3^n)=(9^n-3^n)(400^n-23^n)=$$

$$=(9-3)(400-23)\cdot A\cdot B \text{ unde } A=9^{n-1}+3\cdot 9^{n-2}+\ldots+3^{n-1}$$

și $B=400^{n-1}+23\cdot 400^{n-2}+\ldots+23^{n-1}$.

Deci, $N=6\,.\,377\,.\,A\,.\,B$, de unde rezultă că N este divizibil prin 2262.

Soluția a II-a. Se știe că dacă N va fi divizibil prin 6 și 377, el va fi divizibil și prin produsul $6\,.\,377=2262$. Și acum observăm că putem scrie:

$$N=(m6)^n-(m6)^n+(m6+3)^n-(m6+3)^n=m6+3^n-3^n=m6.$$

La fel $N=(m377+207)^n-(m377+69)^n+69^n-(207)^n=m\,377+$

$$+207^n-69^n+69^n-207^n=m\,377.$$

Deci,

$$N=m\,2262$$

Problema 1072

Să se arate că:

a) *Pentru orice x întreg prim cu 5, trinomul:*

$$P(x) = x^{12} - 273x^4 + 272$$

ia valori numerice divizibile cu 20.

b) *Pentru orice x întreg, cîtul:*

$$F(x) = \frac{x^6(x^2-1) + x^2(x^6+1) - 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

este un număr întreg.

N. C. Ciomu

Soluție: a) Putem scrie, — înlocuind $x^4 = y$:

$$P(y) = y^3 - 273y + 272$$

Pentru $y = 1$, avem: $P(y) = P(1) = 0$, deci

$P(y)$ se divide prin $(y - 1)$:

$$P(y) = (y-1)(y^2 + y - 272)$$

Facem $y^2 + y - 272 = 0$, de unde:

$$y_1 = -17; \quad y_2 = 16$$

Rezultă:

$$P(y) = (y-1)(y-16)(y+17)$$

Înlocuim $y = x^4$:

$$P(x) = (x^4-1)(x^4-16)(x^4+17)$$

Descompunem în factori primele două paranteze și avem (ordonînd convenabil):

$$P(x) = (x^4+17)(x^2+4)(x^2+1)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

Se vede că $(x + 2)(x + 1)$ și $((x - 1)(x - 2)$ sînt produse de numere consecutive, fiecare produs fiind astfel multiplu de 2.

Deci $P(x) = M4$.

Un număr prim cu 5 se poate scrie sub una din formele: $(5k - 2)$, $(5k \pm 1)$, $(5k + 2)$. Oricare ar fi x prim cu 5, unul din factorii $(x \pm 1)$, $(x \pm 2)$ este multiplu de 5. Deci avem și: $P(x) = M5$.

Rezultă că $P(x)$ fiind multiplu de 4 și de 5, este multiplu de 20.

b) Avem:

$$x^6(x^2-1) + x^2(x^6+1) - 2 = 2x^8 - x^6 + x^2 - 2 = 2(x^8-1) - x^2(x^4-1) =$$
$$= 2(x^4+1)(x^4-1) - x^2(x^4-1) = (x^4-1)[2(x^4+1) - x^2] =$$
$$= (x-1)(x^3+x^2+x+1)(2x^4 - x^2 + 2)$$

Prin urmare:

$$F(x) = \frac{x^6(x^2-1) + x^2(x^6+1) - 2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)(2x^4-x^2+2)}{x^3+x^2+x+1} =$$
$$= (x-1)(2x^4 - x^2 + 2)$$

expresie care pentru orice x întreg ia valori numerice întregi.

Problema 1124

Să se rezolve ecuația:

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin 3x \cos 4x.$$

Gh. D. Simionescu

Soluție. Dezvoltînd pe $\sin 3x = \sin (2x + x)$, avem:

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin 2x \cos x \cos 4x + \cos 2x \sin x \cos 4x$$

sau:

$$\sin x \cos 2x (1 - \cos 4x) + \sin 2x (\cos 3x - \cos x \cos 4x) = 0$$

Insă: $$1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x \text{ și}$$

$$\cos 3x - \cos 4x \cos x = \cos (4x - x) - \cos 4x \cos x = \sin 4x \sin x$$

Ecuația (1) devine:

$$2 \sin x \cos 2x \sin^2 2x + \sin 2x \sin x \sin 4x = 0$$

sau $$4 \sin x \sin^2 2x \cos 2x = 0 \text{ și}$$

$$16 \sin^3 x \cos^2 x \cos 2x = 0$$

care se desface în:

$$\text{I) } \sin x = 0; \quad \text{II) } \cos x = 0; \quad \text{III) } \cos 2x = 0$$

Rezultă soluțiile ecuației:

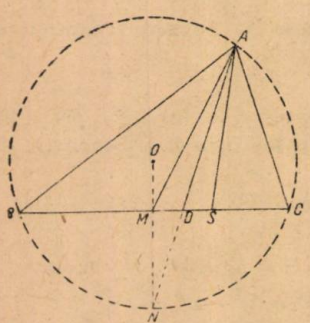
$$\text{I) } x = k\pi; \quad \text{II) } x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{III) } x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Problema 1130

Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd mediana și simediana aceluiași vîrf, precum și unghiul cuprins între ele.

Florin Constantinescu, elev, Cluj

Soluție. Considerăm problema rezolvată și construim un triunghi ABC, mediana AM, simediana AS, bisectoarea AD, precum și centrul O al cercului circumscris.



Prelungim dreptele AD și OM pînă la intersecția lor în N, punct ce aparține cecului O, care este mijlocul arcului BC.

Rezultă următoarea construcție: construim triunghiul AMS cu ajutorul elementelor date. In M ridicăm o perpendiculară pe MS care intersectează în N bisectoarea unghiului MAS. Ducem mediatoarea dreptei AN care intersectează în O perpendiculara ridicată din M pe BC. Totul revine la a prelungi pe MS pînă la inter secțiile în B și C cu cercul de rază OA și cu centrul în O. Acestea sînt celelalte două vîrfuri ale triunghiului căutat.

Problema 1131

Să se construiască un triunghi, cunoscînd mijlocul M al laturii BC, mijlocul N al segmentului AH și punctul A' de tangență al cercului înscris cu latura BC.

Nicolae I. Tița, student

Soluție. Vom construi mai întîi, cercul lui Euler, care are ca diametru segmentul MN.

Ținînd seama că cercul înscris triunghiului este tangent cercului lui Euler în punctul lui Feuerbach, reducem problema construirii cercului înscris la problema 841 — R.M.F. nr. 5/1953.

Fie I centrul cercului înscris. Direcția bisectoarei $A'I$ intersectează perpendiculara din N pe MA' în A. Tangentele din A la cercul I intersectează direcția $A'M$ în B și C.

Astfel am obținut triunghiul cerut ABC.

Problema 1132

Să se construiască un triunghi ABC astfel, ca cele trei puncte de intersecție dintre înălțimile AA', CC' și bisectoarea BB', să fie vîrfurile unui triunghi echilateral și echivalent cu ABC. In acest caz latura triunghiului echilateral este media geometrică a laturilor BA și BC.

Gh. Bazacov

Soluție. Insemnăm cu H, M, N cele trei puncte de intersecție dintre înălțimile AA', CC' și bisectoarea BB' (fig.). Să presupunem cazul că triunghiul HMN ar fi echilateral, fără să fie și echivalent cu ABC. Atunci unghiurile patrulaterului $BNHA'$ sînt: $\sphericalangle N = 120°$; $\sphericalangle H = 120°$; $\sphericalangle A' = 90°$ și atunci $\sphericalangle NBA' = 30°$, dar BNB' este bisectoare și deci $\sphericalangle B = 60°$. Putem afirma atunci, că dacă triunghiul HMN este echilateral, unghiul B trebuie să aibă 60° și reciproc, se poate demonstra.

Trecem acum, la cazul cînd triunghiul HMN trebuie să fie și echivalent cu ABC.

Să calculăm aria triunghiului HMN:

Proiecția pe BC a laturii HN o notăm cu $H'N'$ și avem: $A'N' = A'B - N'B$ dar

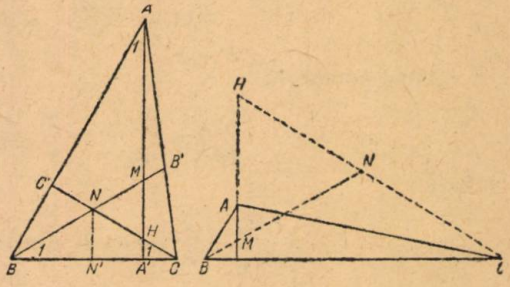
$$A'B = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$$

fiindcă $A_1 = C_1 = 30°$ în triunghiul $AA'B$

$$N'B = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

fiindcă triunghiul BNC este isoscel.

Rezultă că: $A'N' = \frac{c-a}{2}$ și atunci



$$HN = \frac{A'N'}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c-a}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

In consecință

$$S_{HMN} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

dar:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Egalînd cele două suprafețe, obținem condiția

$$\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sau

$$(c-a)^2 = 3ac.$$

Construcția triunghiului ABC se poate face ținînd seamă de relațiile $B = 60°$; $(c-a)^2 = 3ac$

Se va construi unghiul B, una din laturile lui, fie a, fie c ce se considera dată, iar cealaltă se poate căpăta din relația ultimă. Dacă în relația $(c-a)^2 = 3ac$ înlocuim pe $c-a$ cu $HN\sqrt{3}$ din (1), se obține:

$$HN^2 = AB \cdot CB.$$

Problema 1133

Fie G centrul de greutate al tetraedrului oarecare $A_1A_2A_3A_4$. Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4 respectiv centrele de greutate ale feţelor opuse vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4.

Ştiind că M este un punct în interiorul tetraedrului, iar M_1, M_2, M_3, M_4 sînt respectiv simetricele lui M faţă de G_1, G_2, G_3, G_4, se cere:

a) *să se demonstreze că dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 sînt concurente într-un punct P;*

b) *să se arate că punctele M, G, P sînt colineare şi există relaţia: $3GM = 5GP$.*

Popescu I. Mihail
student

Soluţie. Fie B şi C mijloacele muchiilor A_2A_3 şi A_3A_4. Deoarece $M_2M_4 \parallel G_2G_4 \parallel BC$, $BC \parallel A_2A_4$, rezultă că $M_2M_4 \parallel A_2A_4$.

Avem:

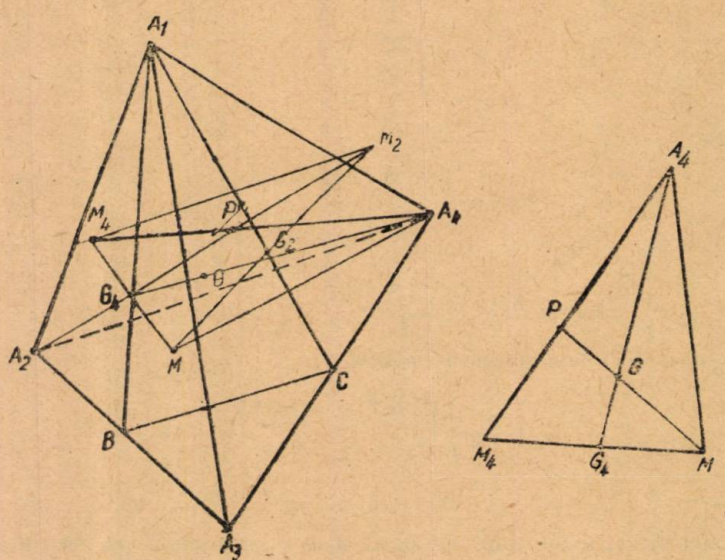
$$BC = \frac{A_2A_4}{2} \quad \text{şi} \quad G_2G_4 = \frac{M_2M_4}{2}.$$

Ţinînd seamă că:

$$\frac{G_2G_4}{BC} = \frac{A_1G_2}{A_1C} = \frac{2}{3} \quad \text{obţinem} \quad \frac{M_2M_4}{A_2A_4} = \frac{2}{3}$$

şi deci,

$$\frac{PM_4}{PA_4} = \frac{2}{3} \text{ (unde } P \text{ este intersecţia } A_2M_2,\ A_4M_4).$$



Analog demonstrăm că şi dreptele A_1M_1, A_3M_3 intersectează pe A_4M_4 într-un punct care împarte acest segment în raportul $\frac{2}{3}$. Aceasta ne arată că dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4A_4 sînt concurente.

b) Considerăm triunghiul MA_4M_4. Punctul G se găseşte pe dreapta A_4M_4, astfel încât: $\frac{GA_4}{GG_4} = 3$.

Ţinînd seamă că:

$$\frac{PM_4}{PA_4} = \frac{2}{3}, \quad \frac{GA_4}{GG_4} = 3, \quad \frac{G_4M}{M_4M} = \frac{1}{2}$$

relaţia lui Menelaus:

$$\frac{PM_4}{PA_4} \cdot \frac{GA_4}{GG_4} \cdot \frac{MG_4}{MM_4} = 1,$$

este satisfăcută şi deci, punctele M, G, P sînt colineare.

Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul MPM_4 tăiat de transversale G_4GA_4, obţinem:

$$\frac{G_4M_4}{G_4M} \cdot \frac{GM}{GP} \cdot \frac{A_4P}{A_4M_4} = 1$$

şi cum:

$$\frac{G_4M_4}{G_4M} = 1; \quad \frac{A_4P}{A_4M_4} = \frac{3}{5};$$

rezultă că:

$$3\,\overline{GM} = 5\,\overline{GP}.$$

Generalizare. Considerăm tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ cu centrul de greutate G şi fie G_1, G_2, G_3, G_4 respectiv centrele de greutate ale feţelor opuse vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4. Fie M un punct oarecare în spaţiu, iar M_1, M_2, M_3, M_4 patru puncte situate respectiv pe dreptele MG_1, MG_2, MG_3, MG_4, astfel încît:

$$\frac{MG_1}{MM_1} = \frac{MG_2}{MM_2} = \frac{MG_3}{MM_3} = \frac{MG_4}{MM_4} = k.$$

— Dreptele A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 sînt concurente într-un punct P.

— Punctele M, G, P sînt colineare şi avem: $3(1-k) \cdot \overline{GM} = (1+3k)\,\overline{GP}$. Demonstraţia este analoagă celei de mai sus, în care $k = \frac{1}{2}$.

Se mai observă că centrul de greutate G' al tetraedrului $M_1M_2M_3M_4$ se găseşte pe dreapţa MG, astfel că $\overline{MG} = k \cdot \overline{MG'}$. Dacă punctul M este fix, iar parametrul k variază, punctul P descrie dreapta MG.

Problema 1142

Să se construiască două cercuri secante de raze date R şi r, în poziţia de a avea tangenta comună egală cu coarda comună.

Gh. Bazacov

Soluţie. Să presupunem cercurile (A) şi (B) de raze R şi r construite în poziţia cerută de problemă.

Fie H, punctul de intersecţie al coardei comune MN cu distanţa centrelor AB, AP şi BQ razele duse la punctele de contact ale tangentei comune şi C, proiecţia lui B pe raza AP.

Notăm: $AB = d$, $MN = PQ = BC = c$, $AP = R$ şi $BQ = r$.

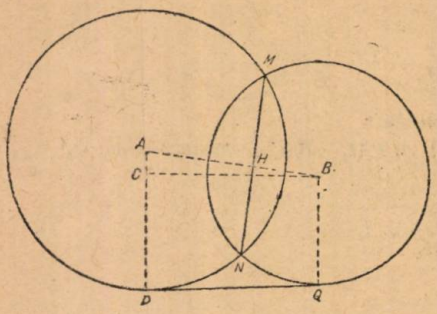
Din triunghiul ABN, avem:

$$BC = d = AH + BH = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}$$

din triunghiul ABC, avem:

$$d = \sqrt{(R-r)^2 + c^2} \tag{1}$$

şi deci, egalînd cele două valori ale lui d, obţinem:



$$\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} + \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{(R-r)^2 + c^2}.$$

O primă ridicare la pătrat ne dă:

$$\sqrt{4R^2 - c^2} \cdot \sqrt{4r^2 - c^2} = 3c^2 - 4Rr.$$

Ridicăm din nou la pătrat, şi avem:

$$\begin{aligned} 6Rr - R^2 - r^2 &= 2c^2 \quad \text{sau} \\ 4Rr - (R-r)^2 &= 2c^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Să căutăm expresia, algebrică a lui d în funcţie de R şi r. Din relaţia (1), avem

$$d^2 = (R-r)^2 + c^2$$

pe care o amplificăm cu 2, şi scăzînd din ea relaţia (2), avem:

$$2d^2 - 4Rr + (R-r)^2 = 2(R-r)^2$$

de unde se obţine: $2d^2 = (R+r)^2$ şi deci $d\sqrt{2} = R + r$.

Din această relaţie se vede că distanţa centrelor A şi B trebuie să fie egală cu latura unui patrat a cărui diagonală este egală cu $(R + r)$.

Problema 1148

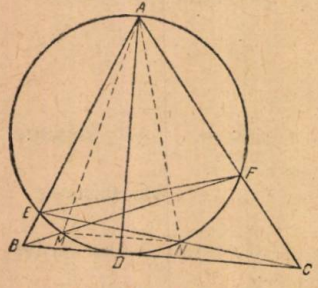
Cercul construit pe înălţimea AD, a unui triunghi oarecare ABC, ca diametru, taie laturile AB, AC respectiv în E şi F. Dreptele BF şi CE taie a doua oară cercul în M şi N. Să se arate că:

a) *dreptele BC şi EF sînt antiparalele,*

b) *triunghiul AMN este isoscel.*

Constantinescu Fiorin, elev, Cluj

Soluţie. a) Pentru a arăta că BC şi EF sînt antiparalele trebuie să demonstrăm că



$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AEF$$

sau că patrulaterul $EBCF$ este inscriptibil.

Intr-adevăr,

$$\text{măs } \sphericalangle ACB = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DNF}}{2} = 90^\circ - \frac{\overset{\frown}{DNF}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AF}}{2}$$

şi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AEF$, deci dreptele BC şi EF sînt antiparalele.

Altă soluţie. Unim pe D cu E şi F. Observăm că $DE \perp AB$; $DF \perp AC$, deci, vom avea:

$$AD^2 = AB \cdot AE \tag{1}$$

$$AD^2 = AC \cdot FA. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că: $AB \cdot AE = AC \cdot AF$ ceea ce înseamnă că punctele B, E, F, C sînt conciclice.

b) Patrulaterul $EBCF$ fiind inscriptibil, avem:

$$\sphericalangle CBF = \sphericalangle CEF$$

dar,

$$\text{măs. } \sphericalangle CBF = \frac{\overset{\frown}{DNF} - \overset{\frown}{DM}}{2}; \qquad \text{măs. } \sphericalangle CEF = \frac{\overset{\frown}{NF}}{2}.$$

Deci,

$$\overset{\frown}{DNF} - \overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{NF} \quad \text{sau:} \quad \overset{\frown}{DNF} - \overset{\frown}{NF} = \overset{\frown}{DM} \quad \text{însă:} \quad \overset{\frown}{DNF} - \overset{\frown}{NF} = \overset{\frown}{DN}.$$

Deci: $\overset{\frown}{DM} = \overset{\frown}{DN}$, de unde rezultă că triunghiul AMN este isoscel.

Soluția III-a. Patrulaterul $EBCF$ fiind inscriptibil $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ACE$. Deci, triunghiurile ABF și ACE sînt asemenea, ca avînd două unghiuri egale. Așa dar și $\sphericalangle AEN = \sphericalangle AFM$, ceea ce înseamnă că $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$, prin urmare triunghiul AMN este isoscel.

Se mai observă că înălțimea AD poate să fie și exterioară triunghiului ABC.

Problema 1158

Fie S_1, S_2, S_3, S_4 ariile fețelor unui tetraedru. Să se arate că aria unei fețe se poate calcula cu formula:

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 -$$

$$- 2\,[S_2S_3 \cos \overset{\frown}{(S_2S_3)} + S_3S_4 \cos \overset{\frown}{(S_3S_4)} + S_2S_4 \cos \overset{\frown}{(S_2S_4)}].$$

Prin $\overset{\frown}{(S_2S_3)}$ *se înțelege unghiul diedru format de fețele tetraedrului, cu ariile respective S_2 și S_3.*

Mihail Popescu, student

Soluție. Ținînd seama că aria proiecției ortogonale a unui triunghi pe un plan, este egală cu produsul dintre aria triunghiului considerat și cosinusul unghiului determinat de planul triunghiului și planul pe care s-a făcut proiecția, avem:

$$S_1 = S_2 \cos \overset{\frown}{(S_1S_2)} + S_3 \cos \overset{\frown}{(S_1S_3)} + S_4 \cos \overset{\frown}{(S_1S_4)} \tag{1}$$

$$S_2 = S_1 \cos \overset{\frown}{(S_1S_2)} + S_3 \cos \overset{\frown}{(S_2S_3)} + S_4 \cos \overset{\frown}{(S_2S_4)} \tag{2}$$

$$S_3 = S_1 \cos \overset{\frown}{(S_1S_3)} + S_2 \cos \overset{\frown}{(S_2S_3)} + S_4 \cos \overset{\frown}{(S_3S_4)} \tag{3}$$

$$S_4 = S_1 \cos \overset{\frown}{(S_1S_4)} + S_2 \cos \overset{\frown}{(S_2S_4)} + S_3 \cos \overset{\frown}{(S_3S_4)} \tag{4}$$

Înmulțind relațiile (1), (2), (3), (4) respectiv cu S_1, S_2, S_3, S_4 și scăzînd ultimele trei relații din prima, obținem relația din enunț.

Problema 1177

Se dau două puncte fixe A și B și pe dreapta AB un punct variabil C. Un cerc cu centrul O trece prin A și C, iar altul cu centrul O′ trece prin B și C. Cercurile O și O′ se intersec-

leză a doua oară în punctul M. Știind că centrele O și O' descriu respectiv două drepte fixe Δ *și* Δ_1 *se cere:*

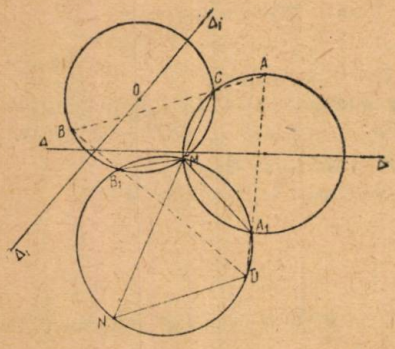
a) locul punctului M,

b) *să se arate că axul radical al cercurilor O și O' trece printr-un punct fix.*

* * *

Soluție: Fie A_1 și B_1 simetricele punctelor A și B respectiv în raport cu dreptele Δ și Δ_1. Evident că cercurile O trec necontenit prin A_1, iar cercurile O' prin punctul B_1. Fie D intersecția dreptelor AA_1 și BB_1. În patrulaterul $ACMA_1$, avem:

$$\sphericalangle A_1MC = 180° - \sphericalangle CAA_1 \qquad (1)$$



iar în patrulaterul inscriptibil $BCMB_1$, avem:

$$\sphericalangle B_1MC = 180° - \sphericalangle CBB_1. \qquad (2)$$

Dar $\sphericalangle A_1MB_1 = 360° - \sphericalangle (A_1MC + B_1MC)$ sau ținînd seama de (1) și (2)

$$\sphericalangle A_1MB_1 = \sphericalangle (CAA_1 + CBB_1).$$

Dar în triunghiul ABD:

$$\sphericalangle A_1DB_1 = 180° - \sphericalangle (CAA_1 + CBB_1).$$

Rezultă că unghiurile A_1MB_1 și A_1DB_1 sînt suplimentare și deci, patrulaterul A_1DB_1M este inscriptibil. Cum punctele A_1, D_1, B_1 sînt fixe, locul lui M este cercul circumscris triunghiului A_1B_1D.

b) Fie N punctul unde axul radical MC al cercurilor O și O' taie a doua oară cercul A_1B_1D. Patrulaterul B_1MDN fiind înscris, avem:

$$\sphericalangle B_1DN = \sphericalangle B_1MN = 180° - \sphericalangle B_1MC$$

sau

$$\sphericalangle B_1DN = \sphericalangle B_1BC$$

relație care ne arată că DN este paralelă cu AB. Cum dreapta AB este fixă, iar punctul D e fix pe cercul A_1B_1D, rezultă că și punctul N e un punct fix.

Problema 1179

Să se stabilească relația

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_c^3} = \frac{12R}{S^2}$$

între elementele unui triunghi oarecare.

Marius V. Iosifescu

Soluție. Dacă în identitatea

$$(x - x + z)^3 - (x + y - z)^3 - (x + z - y)^3 - (y + z - x)^3 = 24\,xyz$$

facem $x = a$, $y = b$, $z = c$ și ținem seama că:

$$a + b + c = 2p, \quad S = pr = (p - a)\,r_a = (p - b)\,r_b = (p - c)r_c$$

$$abc = 4RS$$

obținem relația din enunț.

Observație. Dacă în identitățile:

$$(x + y + z) \equiv (x + y - z) + (x + z - y) + (y + z - x)$$

$$(x + y + z)^5 - (x + y - z)^5 - (x + z - y)^5 - (y + z - x)^5 = 80\,xyz\,(x^2 + y^2 + z)^2,$$

facem aceiaşi substituţie şi obţinem:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};$$

şi

$$\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r_a^5} - \frac{1}{r_b^5} - \frac{1}{r_c^5} = \frac{10R}{S^4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Problema 1190

Să se determine parametrul λ şi să se rezolve complet ecuaţia:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + \lambda x + \lambda + 2 = 0$$

ştiind că suma a două rădăcini este egală cu produsul celorlalte două.

Gh. D. Simionescu

Soluţia. Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = -2$$

$$x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2) = -\lambda$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \lambda + 2.$$

se completează cu

$$x_1 + x_2 = x_3 x_4$$

Din prima relaţie rezultă $x_3 + x_4 = 1 - x_3 x_4$, care dusă în a doua şi a treia, împreună cu $x_1 + x_2 = x_3 x_4$, ne dă:

$$x_3 x_4 (1 - (1 - x_3 x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = -2$$

$$x_1 x_2 (1 - x_3 x_4) + (x_3 x_4)^2 = -\lambda$$

Ţinînd seama de $x_1 x_2 x_3 x_4 = \lambda + 2$ sistemul acesta devine:

$$2 x_3 x_4 - (x_3 x_4)^2 + x_1 x_2 = -2$$

$$(x_3 x_4)^2 + x_1 x_2 = 2$$

Adunînd avem:

$$2 x_3 x_4 + 2 x_1 x_2 = 0$$

Deci, $x_1 x_2 = -x_3 x_4$.

Obţinem înlocuind:

$$(x_3 x_4)^2 - (x_3 x_4) - 2 = 0, \quad \text{deci} \quad x_3 x_4 = -1 \quad \text{şi} \quad x_1 x_2 = 1;$$

$$\text{sau} \quad x_3 x_4 = 2 \quad \text{şi} \quad x_1 x_2 = -2$$

Valorile lui λ sînt: $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -6$.

Calculînd pe $x_1 + x_2 = -1$; $x_3 + x_4 = 2$ sau $x_1 + x_2 = 2$; $x_3 + x_4 = -1$, rezultă descompunerile:

$$(\lambda = -3);\ x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - 2x - 1)$$

$$(\lambda = -6);\ x^4 - x^3 - 2x^2 - 6x - 4 = (x^2 - 2x - 2)(x^2 + x + 2)$$

din care se deduc rădăcinile.

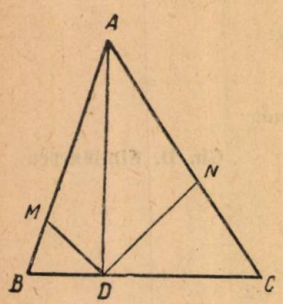
Problema E: 378

In triunghiul ABC cu toate unghiurile ascuțite, înălțimea AD este egală cu latura BC. Bisectoarele unghiurilor ADB și ADC intersectează respectiv pe AB și AC în M și N. Să se arate că:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1.$$

Mihail I. Popescu

Soluție. Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiurile ADB și ADC, obținem:



$$\frac{MB}{MA} = \frac{DB}{DA} \quad (1) \quad \text{și} \quad \frac{NC}{NA} = \frac{DC}{DA} \quad (2)$$

Prin adunarea relațiilor (1) și (2) rezultă:

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = \frac{DB + DC}{DA} = \frac{BC}{DA} = 1.$$

Observare. În cazul când $B > 90°$ sau $C > 90°$ avem respectiv:

$$\frac{NC}{NA} - \frac{MB}{MA} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{MB}{MA} - \frac{NC}{NA} = 1.$$

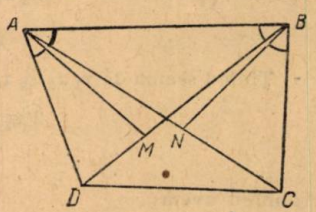
Problema E: 404

Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $\overline{BC} = \overline{AD}$. Bisectoarele unghiurilor A și B intersectează diagonalele BD și AC respectiv în M și N. Să se arate că $\overline{MB}\cdot\overline{NC} = \overline{NA}\cdot\overline{MD}$.

Popescu I. Mihail, student

Soluție. Aplicînd teorema bisectoarei în triunghiurile ABD și ABC obținem:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{AB}{AD} \quad (1) \quad \text{și} \quad \frac{NA}{NC} = \frac{AB}{BC}. \quad (2)$$



Ținînd seama că $AD = BC$, din relațiile (1) și (2) deducem:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{NA}{NC} \text{ sau } \overline{MB}\cdot\overline{NC} = \overline{NA}\cdot\overline{MD}.$$

Problema E: 356

Să se verifice egalitățile:

$$\frac{(1+\sqrt{5})^3}{(3+\sqrt{5})^3} = -2+\sqrt{5} \quad \text{și} \quad \frac{(1-\sqrt{5})^3}{(3-\sqrt{5})^3} = -2-\sqrt{5}.$$

C. I. Ț.

Soluție. Avem succesiv

$$\frac{(1+\sqrt{5})^3}{(3+\sqrt{5})^3} = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{27+27\sqrt{5}+45+5\sqrt{5}} = \frac{16+8\sqrt{5}}{72+32\sqrt{5}} = \frac{8(2+\sqrt{5})}{8(9+4\sqrt{5})} = \frac{2+\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}{(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})} = \frac{-2+\sqrt{5}}{1} = \underline{-2+\sqrt{5}}.$$

Analog avem:

$$\frac{(1-\sqrt{5})^3}{(3-\sqrt{5})^3}=\frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{27-27\sqrt{5}+45-5\sqrt{5}}=\frac{18-8\sqrt{5}}{72-32\sqrt{5}}=\frac{2-\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{(2-\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=\frac{18-9\sqrt{5}+8\sqrt{5}-20}{1}=-2-\sqrt{5}.$$

Problema E: 357

La o gospodărie agricolă colectivă, o echipă de 12 tineri seceră 6 hecatre de grîu în 3 zile. O a doua echipă formată tot din 12 tineri seceră aceiași suprafață în 3 1/3. zile. In cît timp ar fi secerată o suprafață de 12 hectare dacă lucrează 7 tineri din prima echipă și patru tineri din a doua echipă.

* * *

Soluție. 12 tineri din prima echipă seceră în 3 zile 6 ha. Aceiași tineri vor secera într-o zi 6/3 ha, adică 2 ha. Un tînăr din aceiași echipă va secera într-o zi 2/12 ha. 7 tineri din aceiași echipă vor secera într-o zi $\frac{2}{12}\times 7=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$ ha.

12 tineri din a două echipă seceră în $3\frac{1}{3}$ zile 6 ha. Aceiași tineri vor secera într-o zi $6:\frac{10}{3}=\frac{9}{5}$ ha.

Un tînăr va secera într-o zi $\frac{9}{5}:12=\frac{3}{20}$ ha.

Patru tineri din aceiași echipă vor secera într-o zi.

$$\frac{3}{20}\cdot 4=\frac{12}{20}=\frac{3}{4}\text{ ha.}$$

Șapte tineri din prima echipă și patru tineri din a doua echipă vor secera într-o zi împreună $\frac{7}{6}+\frac{3}{5}=\frac{53}{30}=1\frac{23}{30}$ ha. Lucrînd împreună, acești tineri vor secera 12 ha.

$$\text{în } 12:\frac{53}{30}=\frac{360}{53}=6\frac{42}{53}\text{ zile.}$$

PROBLEME PROPUSE

1320. Să se rezolve ecuația:

$$x^3-6x^2+15x-14=0$$

punînd-o sub forma

$$h(x-\alpha)^3+k(x-\beta)^3=0.$$

N. N. Mihăileanu

1321. Un cilindru este continuat la capete cu o emisferă şi cu un con, înălţimea cilindrului fiind egală cu greutatea conului. Suprafaţa corpului este de 197,82 cm^2, iar volumul cilindrului şi al emisferei este de 197,82 cm^3. Să se afle dimensiunile corpului.

N. N. Mihăileanu

1322. Să se arate că numărul $N = n^3$, unde n este un număr întreg, este de forma $9k$ sau $9k \pm 1$, unde k este de asemenea număr întreg.

C. Ionescu-Ţiu

1323. Să se arate că în triunghiul oarecare ABC cu mediana BL şi bisectoarea BM există relaţia:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } MBL} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-C}{2}}$$

unde $A \geqslant C$.

P. Savciuc, Stalinogorsk

1324. Trei bărci de aceiaşi greutate G fiecare, merg una după alta cu aceiaşi viteză constantă v. Din barca dela mijloc se aruncă simultan în barca din faţă şi în cea din spate, cu viteza u faţă de barca din mijloc, nişte greutăţi G_1. Care sînt vitezele bărcilor după această repartiţie a greutăţilor?

* * *

1325. Să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului cu vîrfurile în punctele de intersecţie a trei cercuri egale ce trec prin acelaş punct fix P, unul din cercuri fiind mobil.

Corneliu Zidăroiu, elev Bucureşti

1326. Să se stabilească egalitatea

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{24} + \operatorname{tg} \frac{19\pi}{24} + \operatorname{cotg} \frac{19\pi}{24} = 2\sqrt{2}.$$

Radu Stroe, elev, Ploeşti

1327. Un curent electric trecînd prin apă acidulată produce în timp de trei minute $\overline{150}$ cm^3 de gaz detonant; la sfîrşitul experienţei, nivelul apei din voltametru a coborît cu 12 cm faţă de nivelul din exterior. Presiunea atmosferică în timpul experienţei a fost de 750 mm coloană de mercur, iar densitatea apei acidulate, 1,13 g/cm^3. Să se afle intensitatea curentului.

* * *

1328. Să se afle adevărata valoare a fracţiei

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}, \text{ pentru } x = 1 \text{ şi a fracţiei } \frac{x - \operatorname{tg}^3 x}{x + \operatorname{tg}^2 x}, \text{ pentru } x = 0.$$

Simon St. Petre

1329. Pe un segment CD să se ia un punct M, astfel ca media aritmetică și media armonică a segmentelor MC și MD, să fie catetele unui triunghi dreptunghic ABC. Să se arate că la acest triunghi înălțimea din A bisectoarea din B și mediana din C, sînt concurente.

Gh. Bazacov, Turnu Severin

1330. Să se arate că oricare ar fi n real, avem:

$$0 < \frac{2n^4 - 2n^3 + n^2 + n + 1}{n^4 - n^3 + n^2 - n + 1} < 4.$$

G. I. Bercea

1331. Viteza sunetului în aer la 0°C fiind de 331 m/s să se determine viteza sunetului în hidrogen la aceiași temperatură; greutatea moleculară a aerului se va lua egală cu $M = 28{,}8$. Să se calculeze viteza sunetului în heliu tot la 0°C, ținînd seamă că hidrogenul este un gaz biatomic și că heliu este un gaz monoatomic.

* * *

1332. Se consideră tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$. Vîrfurile A_1 și A_2 sînt fixe, iar A_3 și A_4 se mișcă în spațiu astfel că raportul ariilor $A_1A_3A_4$ și $A_2A_3A_4$ păstrează o valoare constantă. De asemenea, unghiul dreptelor A_1A_2 și A_3A_4 rămîne constant și egal cu φ.

a) Să se demonstfreze că dreapta A_3A_4 rămîne tangentă unei sfere fixe; *b)* Să se găsească locul geometric al centrului de greutate G al tetraedrului considerat, cînd dreapta A_3A_4 rămîne paralelă cu ea însăși.

Mihail I. Popescu, student, București

1333. In triunghiul ABC înălțimea din A retaie cercul circumscris în M; fie N diametru opus lui A și D, simetricul ortocentrului H față de vîrful B. Să se arate că punctele D, M, N sînt situate pe o dreaptă.

I. Drăgoescu, student, Timișoara

1334. — *a)* Un tren se mișcă pe o pantă de 0,008. Ce forță de tracțiune are locomotiva dacă coeficientul de frecare este 0,003, iar greutatea trenului este 2000 tf.?

b) O garnitură este frînată la viteza de 20 km/h. Să se calculeze distanța parcursă din momentul frînării pînă la oprirea garniturii, dacă coeficientul de frecare în urma frînării s-a mărit pînă la 0,002?

* * *

1335. — *a)* De ce viteza unui tren ce se mișcă pe un drum orizontal nu crește la infinit deși forța de tracțiune a locomotivei acționează fără întrerupere?

b) O bilă ce se află pe o placă de sticlă, e atrasă de un magnet în direcția polului magnetic. Cum va fi mișcarea bilei: uniformă, uniform-accelerată sau accelerată?

* * *

1336. — *a)* De ce avioanele cu reacție pot realiza viteze considerabil mai mari decît avioanele cu elice?

b) Poate un corp să se pună în mișcare numai sub acțiunea forțelor interne?

* * *

1337. — *a)* O scîndură lungă este pusă pe niște rulouri netede. Un om încearcă să fugă pe scîndură, dar rămîne în raport cu pămîntul, pe loc. De ce?

b) Pe o scîndură lungă pusă pe rulouri, aleargă unul spre altul, doi oameni. Se va mișca scîndura? Dați un răspuns întemeiat.

* * *

1338. *a)* Dintr-un punct M, situat la egală distanță de laturile unghiului drept XOY ($OM = l$), se duce o dreaptă care taie laturile unghiului XOY, în A și B. Să se determine OA și OB astfel ca aria triunghiului AOB să fie egală cu a^2. Discuție.

b) Fiind dat un unghiu ABC care are latura BC fixă iar vîrful A variabil, se cere să se afle locul descris de A, cînd $\frac{EC}{DC} = k$, unde D și E sînt picioarele înălțimilor coborîte din A și B.

(« Olimpiada Matematică », Iași 4 aprilie 1954)

1339. Intr-un cerc de rază R se înscrie un triunghi ABC în care latura AB este egală cu c, iar unghiul făcut de înălțimea ce pleacă din A, cu latura AB este de 30°.

a) Se cere să se afle laturile și aria triunghiului.

b) Să se arate că punctul H (ortocentrul), punctul M (mijlocul laturii BC) și punctul A' (diametrul opus punctului A pe circumferința dată) sînt coliniare.

« Olimpiada Matematică », București 4 aprilie 1954)

1340. *a)* Să se rezolve ecuația:

$$(a^2 - 1)\,x^4 - (a^4 - 2a^2 + 2)\,x^3 + (a^4 - 2a^2 + 2)\,x - (a^2 - 1) = 0$$

prin gruparea termenilor atît în cazul cînd $a^2 = 2$ cît și în cazul general.

b) Să se efectueze $\sqrt{3\,(x-3)^2}$ și să se înlocuiască în enunț și în rezultat $x = 1$.

(« Olimpiada Matematică », București 4 aprilie 1954)

1341. Se dă ecuația:

$$x^2 - px + 7{,}2 = 0$$

și se cere:

a) Să se determine p dacă între rădăcini avem relația:

$$\frac{\sqrt{1-x_1} - \sqrt{1-x_2}}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}} - \frac{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}}{\sqrt{1-x_1} - \sqrt{1-x_2}} = \frac{4 - \sqrt{0{,}6}}{1{,}1}$$

b) Dacă $x_1 > x_2$ sînt respectiv una din catetele unui triunghi dreptunghic și proiecția pe ipotenuză a celeilalte catete, să se afle mărimea celorlalte elemente ale triunghiului dreptunghic. (Se ia pentru p valoarea pozitivă și unitatea de lungime este de 1 cm.)

(« Olimpiada Matematică », Timișoara 4 aprilie 1954)

1342. Perimetrul unui triunghi cu laturile în progresie aritmetică este de 42 cm. Mărind laturile acestui triunghi, luate în ordinea lor de mărime crescătoare, respectiv cu 3 cm, 6 cm și 10 cm, se obține un al doilea triunghi cu laturile în progresie geometrică. Se cere:

a) Să se determine laturile primului triunghi arătînd că problema admite o singură soluție.

b) Să se afle aria aceluiași triunghi și cele trei înălțimi ale sale.

(« Olimpiada Matematică », Timișoara 4 aprilie 1954)

1343. Se dă un triunghi oarecare ABC cu baza $BC = a$ și înălțimea corespunzătoare laturii BC egală cu h. Să se înscrie în acest triunghi un triunghi dreptunghic cu vîrful drept pe BC și ipotenuza paralelă cu BC, avînd înălțimea egală cu i. Ce relație trebuie să existe între a, h și i pentru ca problema să fie posibilă? (Se va folosi relația între ipotenuză și mediana corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic). Care este valoarea maximă ce o poate lua i? Să se construiască triunghiul în acest caz.

(« Olimpiada Matematică », Iași 4 aprilie 1954)

1344. Să considerăm polinomul de gradul III:

$$P_3(x) = (x + a - 1)(x + a)(x + a + 1) - C_3^1(a - 2)(x + a)(x + a + 1) +$$
$$+ C_3^2(a - 1)(a - 2)(x + a + 1) - C_3^3 a(a - 1)(a - 2).$$

şi se cere:

a) Să se arate că $P_3(x)$ se anulează pentru $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$.

b) Să se deducă identitatea $P_3(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

c) Să se demonstreze din nou identitatea precedentă fără a folosi proprietatea dela primul punct, întrebuinţînd pentru aceasta, grupări convenabile de termeni în expresia $P_3(x)$.

d) Să se generalizeze problema.

(« Olimpiada Matematică », Cluj 4 aprilie 1954)

1345. Se dă un con circular drept cu vîrful în V, centrul bazei fiind C. Se cere:

a) Să se calculeze raza unei sfere S cu centrul pe CV care trece prin V şi detaşează din con un volum egal cu $\frac{3a^3}{\pi}$, a fiind dat. Calculul razei r a sferei S se va da cu ajutorul razei R a bazei conului şi al înălţimii H.

b) Să se arate că r' fiind raza cercului S tangentă la sfera S şi la suprafaţa laterală conului, avem relaţia $\frac{r'}{r} = \frac{2R}{G + R}$ unde G este generatoarea conului.

(« Olimpiada Matematică », Cluj 4 aprilie 1954)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE ŞAPTE ANI *)

E: 522. In trei fabrici lucrează 4500 muncitori. In fabrica a doua sînt cu 20 % mai mulţi decît în prima, iar în a treia de 1,5 ori mai puţini decît în a doua. Anul trecut numărul muncitorilor era în total $71\frac{1}{9}$ % din numărul muncitorilor de anul acesta, iar în fabrica a doua erau 50 muncitori mai puţin decît în prima, iar în a treia cu 450 muncitori mai puţin decît în a doua. Cu cît la sută s-a mărit numărul muncitorilor în fiecare fabrică?

« Olimpiada Matematică » Bucureşti, martie 1954

E. 523: Un paralelipiped dreptunghi are o dimensiune de $24\frac{4}{5}$ dm, a doua 75 % din prima şi a treia dimensiune egală cu suma primelor două. Să se afle suprafeţele totale şi volumul paralelipipedului. Care este suprafaţa unui cerc cu lungimea cît suma dimensiunilor paralelipipedului?

Hr. Dăscălescu

---

*) Repartizarea problemelor pe clase este astfel: Clasa V-a (527, 528, 532); Clasa VI-a (522, 523, 524, 526, 531); Clasa VII-a (528, 527, 529, 533).

E: 524. Două vase A și B de aceeași greutate, conțin cantități de apă diferite. Greutatea vasului A cu apă, formează $\frac{4}{5}$ din greutatea vasului B cu apă. Dacă turnăm toată apa din B în A, greutatea vasului A devine de 8 ori mai mare decît greutatea vasului B. Știind că în B a fost cu 50 grame mai multă apă decît în A, să se afle greutatea vaselor și greutatea apei în fiecare vas.

« Olimpiada Matematică » București, martie 1954

E: 525. Un bec electric de 125 watt. este conectat la o rețea de 220 volți. Știind că durata lui de funcționare este de 1000 ore, să se determine: *a)* Lucrul mecanic corespunzător duratei lui de funcționare; *b)* Rezistența electrică a filamentului; *c)* Cantitatea de căldură degajată de acest bec pe tot timpul duratei lui de funcționare.

Stoian I. Gheorghe, elev, Tîrgoviște.

E: 526. Să se arate că

$$a^2 + b^2 + c^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2) + x\,(x - 2a) +$$
$$+ y\,(y - 2b) + z\,(z - 2c) = x^2 + y^2 + z^2 - 2a\,(x - a) - 2b\,(y - b) - 2c\,(z - c)$$

C. I. Ț.

E: 527. Să se arate că:

$$\frac{1 + 2a + 2a^2 + 2a^3 + a^4}{1 - 2a + 2a^2 - 2a^3 + a^4} = \frac{1 + 2a - 2a^2 - a^4}{1 - 2a + 2a^3 - a^4} = \frac{(a + 1)^2}{(a - 1)^2}$$

C. I. Ț.

E: 528. Un grup de pionieri fiind în excursie trebuie să facă un drum de 20 km. Făcînd în medie pe oră cu un km mai mult decît era prevăzut, ei ajung la destinație cu o oră mai devreme. Cu ce viteză urmau să meargă pionierii?

« Olimpiada Matematică », București, martie 1954

E: 529. Zahărul repartizat la cantinele a 3 școli medii pentru luna februarie, a fost de 360 kg. Pînă la data de 20 februarie consumul la prima cantină a fost de 90 kg, la a doua de 75 kg, iar la a treia de 65 kg. Știind că la prima cantină cantitatea rămasă este cu 15 kg mai mare decît la a doua, iar cantitatea rămasă la a treia cu 20 kg mai mică decît la a doua, știind că rația lunară a unui elev este de 750 grame zahăr, se cere:

a) cantitatea de zahăr repartizată fiecărei cantine pentru luna februarie.

b) numărul elevilor dela fiecare din cele 3 școli.

« Olimpiada Matematică », Timișoara, martie 1954

E: 530. Fie expresiile

$$E_1 = ab\,(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + bc\,(b + c)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + ca\,(c + a)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$$

$$E_2 = ab\,(a - b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + bc\,(b - c)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + ca\,(c - a)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)$$

Să se arate că:

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

* * *

E: 531. Să se arate că:

$$(1 - ab - ac - bc)^2 + (a + b + c - abc)^2 = (1 - c^2)\left[(1 - ab)^2 + (a + b)^2\right]$$

Willy Paraschiv, student, Bucureşti

E: 532. Din oraşul A, situat la 1060 km de B, porneşte la ora 8 dimineaţa, un tren care face cu 15 km pe oră mai puţin decît un alt tren pornit din B către A la ora 6 dimineaţa. Cu ce viteză medie pe oră mergeau cele două trenuri dacă ele s-au întîlnit la ora 6 seara.

[« **Olimpiada Matematică** » Bucureşti, martie 1954

E: 533. O barcă cu motor a mers de-a lungul litoralului Mării Negre aparţinînd R.P.R. în 3 etape, mergînd în felul următor: în primele 3 ore a străbătut $\frac{3}{7}$ din drum. In următoarele $2^1/_2$ ore a străbătut $\frac{7}{8}$ din drumul parcurs în primele trei ore. Restul drumului, de 44 km, i-a străbătut din cauza unui defect de motor, cu o viteză medie de $7^1/_2$ km pe oră. Se cere: *a)* lungimea litoralului românesc al Mării Negre; *b)* timpul în care a străbătut ultima etapă; *c)* vitezele cu care a străbătut primele două etape şi distanţele corespunzătoare; *d)* consumul de benzină ştiind că la fiecare 100 km consumă 25 litri benzină.

« **Olimpiada Matematică** » Timişoara, aprilie 1954

POŞTA REDACŢIEI

Răspunsuri la corespondenţa primită pînă la 10 iulie 1954.

Miu Gh. Filipoiu. Curtea de Argeş. Cărţile ce vi s-au acordat ca premiu de către « Revista Matematică şi Fizică » v-au fost expediate prin poştă.

Directorul şcolii elementare din Ţuglui, reg. Craiova. Reclamaţiile de neprimirea unor exemplare din G.M.F., seria B, trebuie făcută Centrului de difuzare a presei din Str. Const. Mille 14, Bucureşti. Aveţi grijă să arătaţi în reclamaţiie şi numărul chitanţei de plata abonamentului.

Mai multor colaboratori. Cererile pentru trimiterea unui număr mai mare de exemplare din G.M.F. seria B în localitatea dv. vor fi adresate către Centrul de difuzare a presei din Bucureşti.

Pieleanu Dumitru, (Giurgiu); Ariton Vasile, (Galaţi) şi Farcaş Alexandru, (Zalău). Am primit bucuroşi angajamentele dv. privind intensificarea colaborării la G.M.F. seria B.

Bărbuică Nicolaie, Craiova. Problema propusă şi soluţiile date de dv. sînt cunoscute.

Stoleru Gheorghe, Bucureşti. Vom publica probleme ce se vor propune la examenul de admitere în institute şi facultăţi în august 1954. Pentru înţelegerea chestiunilor de mecanică cuantică, trebuie să pregătiţi şi chestiuni de matematici superioare.

Murguleţ Alexandrina şi alţi colaboratori. G.M.F., seria B, anunţă la rubrica rezolvitorilor numele corepondenţilor care au trimis cel puţin zece probleme bine rezolvate. Redacţia păstrează soluţiile primite în număr mai mic decît zece şi anunţă numele rezolvitorilor numai după completarea sau depăşirea numărului minim de zece soluţii bune.

Colibaba Tiberiu, Galaţi şi Cristian Gheorghe, Panciu. La premierea colaboratorilor revistei G.M.F. seria B pe anul 1954 se va ţine seama de evidenţierile făcute şi activitatea desfăşurată în tot cursul anului 1954 şi anunţată la rubrica rezolvitorilor.

Petrovici Radu, Focşani. Redacţia a primit darea de seamă asupra activităţii cercului de matematici dela şcoala medie pe care o frecventati. In viitor e bine să ne mai trimiteţi şi alte dări de seamă care să cuprindă modul de organizare şi discuţiile care au avut loc pe marginea activităţii desfăşurate.

Vlăsceanu Ana, Giurgiu. Pentru a obţine informaţiile pe care le doriţi vă puteţi adresa Facultăţii de Arhitectură din Bucureşti, str. Biserica Enei Nr. 1.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare)

FOCŞANI. Liceul de băieţi, clasa IX-a. Pascu Corneliu (1093, 152, E: 363, 364, 365, 369, 370, 378, 387, 389), Ţîru Emil (1152, E: 378, 387, 427, 447), Ciobotaru I. Vasile (1068, 165, 183, E: 358, 365, 412, 415, 418, 445); clasa X-a. Pandrea Nicolae (1061, 63, 64, 65, 67, 80, 83, 112, 118, 122, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 140 146, 148, 149, 150, 152, 163, 165, 166, 167, 169, 175, 179, 181, 183, 185, 186, 190), Damian Alexandru (1070, 127, 128, 139, 149, 152, 165, 179, 183, 185, E: 391, 402, 411, 412, 415, 418, 434, 3445), Dogaru Ştefan (1038, 42, 53, 64, 76, 80, 92, 93, 106, 110, 123, 127, 128, 130, 139, 148, 149, 152, 159, 163, 165, 166, 179, 183, 185, E: 355, 378, 381, 394, 399, 402, 404, 411, 413, 415, 416, 418 424, 436, 440, 441, 442, 443, P:), Donescu St. Dragomir (1009, 29, 30, 35, 47, 50, 53, 54, 55, 56, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 103, 104, 106, 111, 112, 113, P), Dumitru Constantin (1029, 41, 42, 47, 64, 68, 69, 76, 84, 87, 98, 118, 125, 127, 128, 130, 137, 138, 139 140, 149, 152, 164, 165, 167, 179, 180, 183, 185, 191, P), Buruiană Gh. (1063, 64, 76, 92, 93, 99, 118, 121, 125, 126, 127, 130, 139, 140, 149, 152, 162, 165, 167, 179, 183, 185, E: 354, 357, 362, 387, 389, 391, 395, 399, 400, 402, 404, 406, 409, 411, 412, 413, 415, 417, 418, 424), Mărăşescu Săndel (1075, 126, 139, 149, 152, 165, 179, 183, 193, E: 306, 320, 335, 354, 357, 358, 362, 364, 365, 369, 370, 387, 389, 402), Stănciuc Octavian (1081, 98, 118, 121, 126, 127, 128, 129, 130, 139, 148, 149, 152, 165, 183), Hainăroşie V. Costel (1069, 96, 137, E: 353, 354, 365, 400, 401, 411, 412, 418,) Zaharia Gheorghe (1064, 68, 69, 79, 84, 118, 126, 127, 128, 130, 137, 139, 154, 165, 183), Ianuc I. Corneliu (1058, 60, 61, 70, 74, 76, 83, 99, 102, 109, 115, 119, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 129, 140, 148, 149, 150, 151, 154, 159, 165, 166, 167, 173, 183, E: 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 409, 410, 411), Hulea Ionel (1076, 149, 165, E: 363, 364, 371, 382, 284, 389, 391, 412, 413, 425, 426, 427, 428, 434, 435, 442), Spătaru Ghe. Tiberiu (1076, 87, 126, 127, 128, 139, 148, 149, 152, 162, 165, 179, 183, 185, E: 390, 392, 394, 395 402, 404, 406, 429, 428), Robănescu N. Adrian (1009, 19, 20, 29, 33, 38, 40, 41, 64, 69, 76, 78, 79, 81, 83, 98, 99, 118, 119, 123, 125, 127, 128, 130, 139, 148, 149, 152, 165, 183), Mircea Viorel (1040, 65, 93, 125, 127, 149, E: 327, 341, 356, 358, 364, 370, 428, 429, 434, 435, 436, 440), Manolache V. Dumitru (1038, 41, 84, 149, E: 353, 357, 362, 370, 385, 390, 411, 412), Rosenfeld Paul (1038, 80, 84, 98, 121, 125, E: 353, 370, 373, 378, 381, 387, 391), Porumb Gică (1152, 165, 183, 185, E: 401, 402, 411, 413, 418, 121, 434, 441, 442, 443), Salanţi Anton (1065, 69, 76, 78, 79, 84, 106, 138, 139, Baieră B. Bogdan (1003, 6, 9, 11, 16, 19, 25, 33, 35, 38, 47, 62, 78, 90, 92, 98, 119, 125, 126, 127, 130, 137, E: 337, 364, 372, 404, 405, 406, 409, 425, 426, 427, 429, 431, 436, P); Liceul 1 fete, clasa VI-a, Vasiliu Veturia (E: 403, 406, 408,

409, 411, 412, 413, 415, 416, 418, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 433, 434, 435, 436, 437, 439, 440, 441); Şcoala profesională Industria lemnului, Gugeşti — anul II. Munteanu C. Nicolae (E: 425, 431, 433, 441—446); clasa VI-a. Şcoala medie «Unirea» — Mărgărit Doru (434—441); clasa VII-a fete. Vasilescu Ana (442—446).

ORADEA. *Liceul de băieţi.* Clasa VIII-a. Buzuloiu Florin (E: 351, 361, 396, 405, 407, 421, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 433, 434, 435, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 443); clasa IX-a. Rus A. Ioan (1121, 35, 51, 54, 57, 58, 60, 61, 62, 71, 75, 79, 81, 82, 88, 90, 118, 123, 126, 128, 139, 140, P), Şincai Radu (1140, E: 402, 404, 406, 409, 411, 412, 415, 418, 424, 428, 435, 436, 444, P), Boţan Iulian (1167, E: 387, 389, 391, 394, 396, 399, 402, 409, 411, 412), Beleneş Alexandru (E: 375, 376, 383, 391, 400, 425, 426, 427, 428, 429, 435, 436), Chebeleu Traian (1069, 70, E: 344, 349, 350, 353, 354, 358, 362, 375, 376), Pavel Gh. Adrian (1127, 140, 152, 159, 167, 169, E: 402, 403, 411), Vicaş T. Corneliu (1054, 65, 69, 91, 98, 99, 102, 129, E: 356, 377, 405, 409, 412, 414, 421, 426, 434); clasa X-a. Bocu Mircea (1112, 113, 114, 118, 120, 121, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 131, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 145, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 159, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 176, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, Buzuloiu Vasile (1033, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 57, 58, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 78, 79, P), tehnician Mustea Ionel (987, 1005, 18, 19, E: 400).

ORAŞUL STALIN. Clasa V-a. Buzea Cătălin (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433); clasa VIII-a. Minea Florin (1038, 39, 43, 65, 98, 100, 118, E: 401, 402, 404, 405, 406, 407, 409, 410), Ciobanu Ioan (E: 358, 362, 364, 371, 380, 409, 411); clasa X-a. Butencu Igor (1037, 38, 53, 58, 63, 65, 69, 72, 79, 84, 87, 88, 91, 93, 95, 98, 102, 121, 126, 139, 140, 149, 152, 159, 162, 165, 166, 174, 175, 183, E: 344, 358, 360, 361, 362, 364, 373, 381, 402, 403, 411, 418).

PIATRA-NEAMŢ. Clasa IX-a. Chertic Elena (1038, 80, E: 362, 378, 402, 404), Stăcescu Angela (E: 418, 428, 429, 434, 441, 447); clasa X-a Minuţ N. Petru (981, 983, 991, 1006, 17, 26, 29, 33, 38, 58, 62, 63, 80, 87, 88, 96, 98, 121, 128, 129, 151, 152, 159, 163, E: 325, 326, 328, 331), Vasilescu Florica (1069, 87, 148, 152, E: 402, 404, 407); clasa XI-a. Calianu Narciza (1022, 23, 69, 121, 124, 127, 152, E: 441, 4182; *Şcoala elementară Viişoara.* Clasa V-a. Afloare Maria (E: 354, 371, 382, 384, 389, 391), Albu Ion (E: 354, 371, 382, 382, 389), Ciobanu Elena (E: 354, 371, 382, 384, 389, 391, 400, 408), Cojocaru Constantin (E: 354, 357, 371, 382, 384, 389, 391, 400, 408), Crusitu Elena (E: 354, 371, 382, 384, 389), Florea Ana (E: 357, 371, 382, 384, 389, 391, 400), Hodor Constantin (E: 370, 379, 384, 389, 391, 392, 398), Horea Aurel (E: 354, 371, 382, 384, 389, 391), Enaru Elena (E: 354, 382, 384, 391, 400), Mucenicu Clara (E: 354, 382, 384, 389, 391, 400), Popa Constantin (E: 354, 382, 384, 400, 408), Ştefan Lucia (E: 354, 357, 371, 382, 384, 389, 391, 400), Sava Ion (E: 354, 371, 384, 389, 391), Ţuţuianu Constantin (E: 354, 371, 382, 384, 389, 391, 400, 408), Ţăranu Iosif (E: 354, 371, 382, 384, 389, 391, 400).

PITEŞTI. Clasa VII-a. Lintescu Victoria (E: 425, 426, 428, 429, 431), Deduleşti B. Paraschiv (E: 425, 426, 428, 429, 431), Andreescu D. Gherghina (E: 425, 426, 428, 429, 431); clasa VII-a. Ripeanu N. Marin (1084, E: 370, 382, 389, 411, 412, 415, 418, 419, 424), Zgardan Adrian (E: 341, 342, 344, 349, 358, 370, 373), Marin Ion (1084, 98, E: 381, 386, 389, 390, 391, 396, 398, 399, 401, 402, 403, 303, 306); clasa IX-a. Bogaciu P. Valeriu (1084, 86, 88, 96, 106, 117, 118, 122, 124, 125, 126, 127, 129), Serb G. Adrian (1111, 113, 118, 121, 122, 124, 126, 128, 129, 132, 140, 142, 144, 148, 151, 153, 154, 159, 161, 162, 164, 165, 171, 172, 175, 179, 180, 183, 185, 186, P), Udrescu St. Emil (1068, 98, E: 373, 378, 380, 402, 404, 409, 411, 412, 415, 418); clasa X-a. Chiriţă Nicolae (1028, 33, 127, 129, 148), Saraci M. Dumitru (943, 957, 962, 1012, 18, 33, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 58, 63, 68, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 98, 102, 104, 106); clasa XI-a. Ionescu V. Savin (1007,

9, 22, 25, 29, 33, 38, 40, 42, 43, 44, 62, 68, 69, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 89, 90, 95, 96, 97, 98, 102, 104, 106, 110, 121, 124, 125, 126, 128, P), Iosifescu V. Marius (901—945, 1053—1059, 1062, 1064—77, 1091—94, 1096—99, 1101—1115, P; 90 probleme). *Şcoala medie tehnică mecanică*, anul II. Georgescu I. Dumitru (1042, E: 335, 358, 367, 369, 370, 375, 382, 402).

PLOIEŞTI. Clasa V-a. Cîmpeanu P. Mircea (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 433); clasa VIII-a. Cojocaru I. Gheroghe (E: 357, 358, 361, 362, 364, 369, 370, 371, 382, 389, 391, 405, 412), Georgescu Sorin (E: 358, 370, 380, 402, 404, 411, 412); clasa IX-a. David Vasile (1029, 38, 42, 53, 61, 63, 66, 69, 78, 93, 98, 118, 128, 152), Ionescu Dan (1059, 57, E: 406, 409, 411, 424), Nedelcu Mihai (1033, 38, 66, 68, 69, 70, 78, 79, 81, 84, 98, 165, 183, E: 350, 353, 355, 356, 357, 358, 359, 361, 363, 364, 365, 370, 372, 373, 378, 381, 382, 383, 411, 412, 415, 418); clasa X-a. Biclineru Vasile (1038, 42, 56, 62, 63, 66, 68, 69, 78, 79, 80, 82, 87, 88, 90, 128), Jipa G. Vasile (1054, 61, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 73, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 87, 88, 89, 93, 95, 98, 106, 118, 122, 124, 126, 127, 128, 130, 137, 140, 152, 159, 165, 175, 183, 191), Negrea Sorin (1148, 149, 151, 152, 154, 157, 159, 161, 165, 166, 167, 175, 179, 181, 183, 185), Parepa C. Grigore (1062, 63, 68, 79, 80, 81, 82, 87, 90, 128); clasa XI-a. Marinescu A. Aida (1113, 118, 124, 126, 127, 128, 152, 165, 174, 175, 183), Nicolescu Cornel (999, 1000, 25, 65, 68, 69, 78, 81, 84, 98, 118, 124, 126, 127, 128, 152, E: 353, 358), Puşcaşu Alexandru (1118, 124, 126, 127, 128, 152, 161, 165, 171, 173, 175, 179, 183, 185, P), Silion Dinu (1033, 44, 48, 53, 58, 89, 91, 93, 96, 97, 98, 104, 106, 107, 118, 121, 122, 124, 126, 127, 128, 139, 140, 142, 148, 151, 152, 157, 159, 161, 165, 173, 175, 179, 181, 185, 191, P). *Şcoala medie tehnică de petrol.* Anul III. Vlăsceanu N. Dumitru (1068, 69, 73, 81, E: 353, 358, 362, 364, 365), *Şcoala Scăeni.* Clasa VII-a. Simian I. Teodora (E: 371, 389, 391, 392, 396, 398, 400, 408, 409); *Şcoala Şaringa*, clasa VII-a. Lupu Victoria (E: 396, 398, 442, 443, 445).

PREDEAL. Clasa VIII-a. Ciocănaru Mari (1033, E: 407, 411, 412, 413, 415, 418, 426, (429, 434), Duţu Gheorghe (1042, 65, 76, 81, 149, E: 361, 362, 371, 402), Bîngă Dumitru (E: 412, 415, 418, 425, 426, 428, 429, 431), Cletea Aurel (E: 411, 412, 413, 415, 418, 424, 425, 426, 428, 431); clasa X-a. Schuler O. (1165, 167, 191, E: 411, 412, 416, 427, 428, 429); clasa XI-a. Alexa I. Ioan (1033, 35, 38, 40, 42, 43, 58, 62, 65, 66, 68, 69, 72, 76, 78, 79, 80, 81, 82, P), Almasy Gheorghe (1036, 65, 149, 150, E: 354, 358, 361, 365, 371, 379, 382, 402, 406, 409, 411, 412, 418, 424, 425, 435, 442, 443), Grabcev Boris (1035, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 55, 62, 65, 70, 76, 79, 80, 81, P), Pupăzan V. Nicolae (1045, 55, 90, 94, 97, 110, 112, 113, 121, 122, 124, 126, 127, 128, 129, 139, 140, 148, 152, 157, 159, 162, 165, 171, 174, 175, 179, 183, 190, P), Săsărman Ioan (1035, 38, 40, 42, 43, P).

PUCIOASA. Clasa VIII-a. *Brăneşti.* Fejer Gabriela (E: 362, 365, 370, 384, 387, 392, 395, 398).

RÂMNICU SĂRAT. Clasa V-a. Angelescu Elisabeta (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433).

RÂMNICU VÂLCEA. Clasa XI-a. Fridman Zitta (1149, 151, 152, E: 401, 402, 403, 404, 407, 409), Liţă I. Constantin (1078, 79, 81, 84, 88, 110, 152, 165, 169, 175, 204, 208), Roşianu C. Dragomir (1004, 37, 40, 41, 66, 69, 70, 79, 81, 104, E: 378, 380, 371, 398, 409, 412, 418, 436, 441), Zigulescu D. Marin (1055, 63, 81, 90, 91, 99, 104, 121, 124, 126, 130, 140, 142, 143, 146, 148, 151, 152, 154, 157, 159, 162, 164, 165, 167, 169, 171, 175, 179, 181, 183, 184, 185, 190, 195, 1204, 207, 208, 212, P).

REŞIŢA. *Liceul seral muncitoresc.* Clasa IX-a. Colojoară Ion (1078, 84, 85, 98, 127, 128).

ROMAN. Clasa VII-a. Zaharia Mihai (E: 402, 404, 405, 406, 411), clasa VIII-a. Damaschin Radu (1149, 1152, 157, 159, 165, E: 384, 389, 391, 394, 395, 386, 387, 396, 397, 398, 399, 400, 411, 412, 415, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 433, 434, 436, 437, 439); clasa IX-a. Gavriluţ Mihai 954, 971, 972, 985, 986, 988, 992, 993, 994, 999, 1000, 18,

55, 61, 62, 68, 79, 80, 84, 88, 140, 152, E: 354, 355, 358, 361, 362, 364, 365, 366, 370, 371, 381, 382), Stoica C. Constantin (1025, 68, E: 425, 426, 434).

SATU MARE. Clasa VIII-a. Benea A. Cornel (1118, E: 411, 412, 417, 418, 419, 424); clasa IX-a. Sălăgean Octavian (1152, 159, E: 401, 402, 404, 410).

SFÎNTU GHEORGHE. Clasa X-a. Zaharia Ştefan (1084, 85, 88, 97, 98, 104, 106, E: 362, 365, 366, 368, 370, 372, 373, 376, 378); clasa VII-a. Receanu Victoria (E: 364, 389, 411, 418, 426, 427, 428, 434, 437). *Şcoala medie tehnică de textile.* Anul I. Creţeanu Gheorghe (E: 353, 362, 366, 368, 370, 382, 387, 389, 391, 392, 396, 426, 429, 434), Brănescu Gheorghe (1084, E: 364, 381, 387, 392, 396, 408, 411, 423, 425, 426, 428, 431); anul II. Becheru Elena (1084, E: 365, 381, 392, 394, 397), Jurebiţă Florenţa (1064, E: 365, 366, 382, 411, 418), Milu Maria (1107, 183, E: 363, 365, 427, 428, 429), Ureche Gheorghe (E: 365, 383, 387, 397, 411, 428), Zaharia Gheorghe (1084, E: 411, 418, 426, 428, 429, 434); anul III. Mocanu Ion (1084, 107, E: 358, 361, 365, 366, 370, 382, 384, 389, 391, 394, 398, 425, 429), Olteanu Elena (E: 352, 392, 398, 426, 427, 429), Stănescu Monica (1069, 84, 183, E: 366, 397, 423, 425, 427, 429). Dela S.M.T. Textile s-au mai primit şi dela alţi elevi soluţii identice. Fiecare rezolvitor trebue să-şi redacteze singur soluţia problemei.

SIBIU. Clasa V-a. Pătru Mircea (E: 387, 389, 400, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 432, 433); clasa XI-a. Irimie Iosif (1000, 2, 38, 40, 42, 68, 69, 78, 81, 140, 148, 152, 183), funcţionar Zimmerman Nicolae (E: 401, 402, 405, 407, 409, 410); *Şcoala de măsurători terestre*, anul III. Samoilă Mircea (1140, 141, 152, 154, 157).

SIGHIŞOARA. Clasa XI-a. Cabesius Ingrid (1076, 149, E: 411, 412, 418, 426, 428, 434, 435, 446).

SLĂNIC (Ploeşti). Clasa VIII-a. Ionescu Ion (E: 402, 408, 411, 412, 415, 426, 427, 429, 431, 434, 435, 443).

SLATINA. Clasa VIII-a. Bărbulescu Marcel (E: 369, 370, 373, 378, 392), Bratu G. Sever (E: 369, 370, 373, 378, 392, 396), Oanţă L. Maria (E: 369, 370, 376, 378, 380, 382, 384, 386, 387, 391, 394, 395, 401, 402, 403, 404, 411, 412, 414, 416), Nicolae Aurel (E: 365, 389, 392, 401, 404), Popescu P. Aurelian (1149, 183, 184, E: 358, 362, 364, 365, 369, 370, 402, P); clasa VIII-a particular Croitoru A. Radu (E: 370, 376, 382, 401, 402, 403, 404, 411, 412); clasa IX-a. Cîrstea I. Alexandru (1084, E: 370, 405, 412, 418, 447), Ciobanu Liviu (1149, 159, E: 358, 362, 370, 382, 402, 404, 406, 407, 408), Dumitraşcu Ilie (1127, 148, 159, E: 387, 389, 391, 392, 398, 402, 407), Duţă Constantin (1098, 127, 128, E: 378, 381, 389), Jaică I. Florea (1127, 128, 159, 165, 183, E: 373, 378, 389, 402, 404, 411, 418), Drăganciu Gheorghe (1159, E: 369, 371, 381, 387, 389, 409, 411, 412, 414, 415, 418,), Luţu I. Marian (1157, 189, E: 404, 405, 418, 421, 445, P); clasa X-a. Petrulian I. Ştefan (1038, 43, 68, 78, 81, 88, 98, 113, 127, 152, 165, E: 362, 370, 373, 378, 402, 411, 412, 426, 428, P). Popescu Sergiu (1035, 42, 49, 63, 65, 80, 85, 90, 100, 102, 107, 110, 111, 114, 118, 121, 124, 126, 127, 128, 131, 139, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 156, 159, 164, 165, 170, 173, 174, 175, 183, 188, P); clasa XI-a. Graure I. Ştefan (1029, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 58, 61, 62, 65, 68, 69, 97, 98, 100, 106, 125, 126, 127, 128, 129, 148, 152, 165, 173, 174, 179, 183, 185, E: 351, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 360, 361, 362, 365, 368, 369, 370, 373).

SLOBOZIA (Bucureşti). *Şcoala Traianu* Clasa VII-a. Paraschiv Vasile (E: 442, 443, 444, 445, 446), Stănescu S. Aurora (E: 442, 443, 444, 445, 446), Zăinescu V. Biţa (442, 443, 444, 445, 446).

SOMEŞ-JIBOU (Cluj). Mîndru Gheorghe (E: 304, 305, 306, 309, 311, 318, 335, 391, 397, 399).

SUCEAVA. Clasa V-a. Rotaru Nicolae (E: 352—365, 368—374, 379—383, 447, 449, 451); clasa IX-a Rotaru Constantin (952, 959, 975, 976, 993, 994, 1082, 123, 124, 125, 127, 145, 149, 165, 179, 183, 185, E: 386, 390, 392, 395, 398, 399, 410, 411, 412, 413 414,

415, 416, 418, 422, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 435, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 449, 451, P), Mandicescu C. Gheorghe (E: 384, 387, 388, 389, 393, 394, 396); clasa X-a. Budai Teodor (1029, 53, 65, 66, 70, 82, 85, 87, 88, 93, 118, 124, 125, 126, 127, 128, 137, 145, 152, 159, E: 352, 354, 359, 366, 378, 384, 387, 388, 389, 392, 393, 394, 396, 397, P).

TIRGOVIŞTE. Clasa VIII-a. Bucur I. Gheorghe (1152, E: 402, 412, 418, 447), Guran Gheorghe (1152, E: 402, 412, 418, 447), Pop V. Eugen (1191, E: 411, 412, 447, 454), Ispas Bucura (1152, 154, 166, E: 412, 420, 423); clasa IX-a. Brebente P. Cornel (977, 989, 991, 1018, 19, 23, 25, 29, 33, 37, 38, 40, 43, 48), Călinescu V. Leonard (1065, 69, 78, 79, 80, 113, 121, 124, 126, 165, E: 358, 368, 407), Onea M. Gheorghe (1165, 183, E: 411, 412, 413, 418, 424), Nedelecu C. Stelian (1084, 165, 179, 183, E: 370, 373, 378, 411, 412, 415, 418, 424). Păcureţu Vasile (1165, 183, E: 370, 408, 411, 412, 413, 418), Stoian I. Gheorghe (1031, 46, 64, 66, 72, 86, 96, 98, 99), Tîrlea Alexandru (1093, 98, 1183, E: 412, 418), Oprea Aurelian (1043, 53, 54, 58, 64, 92, 93, 119, 123, 127); clasa XI-a. Ionescu I. Ion (1007, 11, 24, 34, 53, 54, 55, 57, 73, 76, 80, 83, 88, 89, 92, 93, 95, 98, 102, 118, 119, 121, 123, 124, 125, 128, 129, 137, 138, 139, 140, 143, 144, 148, 149, 152, 154, 156, 165, 166, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 179, 183, 185, 187, 189, 190, 191, P).

TIRGU MUREŞ. Clasa VIII-a. Matei Aurel (E: 350, 371, 373, 402, 403, 404, 406, 407, 409), Hegedus Attila (69, 78, E: 411, 412, 413, 415, 418, 425, 426, 427, 428, 429, 434, 435, 441, 442, 443); clasa XI-a Matei Nicolae (1035, 36, 37, 41, 43, 54, 58, 59, 62, 63, 64, 65, 67, 69, 73, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 89, 90, 98, 102, 104, 106, 112, 124, 125, 126, 127, 128, 129, E: 369, 370, 371, 373, 373, 374, 377, 378, 379, 380, 381, 382), Bunica N. Octaivan (1029, 33, 38, 40, 42, 43, 46, 54, 55, 63, 65, 66, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 82, E: 350, 351, 353, 354, 355, 358, 361, 362, 363, 364, 365, 368, 425, 427, 428, 429, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446), Pupăză N. Nicolae (978, 980, 982, 986, 988, 1033, 35, 39, 40, 42, 43, 52, 62, 68, 69, 76, 78, 81, 84, 86, 87, 88, 97, 98, 113, 117, 127, 128).

TIRGU JIU. Clasa X-a. Catighera Virgil (1118, 127, 128, 149, 152, 183); clasa V-a Velicescu Mircea (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433); clasa XI-a Tivig G. Constantin (1033, 35, 38, 40, 42, 65, 68, 70, 78, 79, 81, 97, 98, 121, 124, 127, 129, 152).

TECUCI. Clasa IX-a. Marin Ştefan (1159, 165, 183, E: 407, 409, 411, 412, 413, 418, 419); clasa X-a. Buşilă Adrian (1053, 70, 78, 80, 98, E: 371, 375, 382), Mandel Teodor (1078, 81, 84, 98, 126, 127, 165, 183, E: 452); Clasa XI-a. Turcanu D. Ioan (1042, 43, 46, 52, 109, 118).

TIMIŞOARA. *Liceul* 1 *băieţi*, clasa VII-a. Mihăileanu N. Constantin (E: 328 331, 335, 393, 403, 406, 411, 412, 415, 418, 419); clasa VIII-a Arsenovici Tiberiu (1084, 106, E: 374, 375, 377, 380, 398, 425-446); *liceul* 2 *băieţi* — clasa X-a. Braşovan Ioan (1154, 169, 175, 203, 207); *şcoala medie de energie electrică*, anul III. Flinker R. (1118, 121, 126, 138, 139, 140, 144, 149, 152, 167, 171, 183, 191, P); Facultatea Muncitorească — Scutaru Gheorghe (1152, 154, 162, 183, E: 410).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. Popescu G. Gheorghe (1058, 62, 69, 98, 126, 127, 128, 152,) Surdulescu Radu (1084, 87, 88, 98, 113, 126, 127, 128, 140, 152, 154, 159, E: 369, 370, 371, 372, 373, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 389, 391, 392, 396, 398, 401, 402, 403, 404, 405, 407, 408, 409, P); clasa X-a. Istrătescu Vasile (1020, 43, 73, 118, 124, 125, 126, 128, 142, 14·, 149, 154, 157, 159, E : 356, 365, 397).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Moldoveanu R. Florea (1191, E: 401, 404, 405, 407, 409, 411, 414, 418), Zătreanu P. Corneliu (1038, 78, 81, 128), 183, E: 404).

TULCEA. Clasa X-a. Leonid Slavov (1055, 68, 69, 78, 79, 81, 84, 140, 152, 159, E: 352, 354, 355, 356, 357, 358, 362, 364, 365); clasa XI-a. Batcu Maria (1054, 58, 62, 68, 126, 127, 128, 165, 183, 185).

ZALĂU. Clasa VIII-a Farcaş Benjamin (E: 362, 365, 370, 379, 382, 387, 389, 415, 447), Sîntîmarian Teodor (E: 412, 428, 429, 434, 442, 447, 458, 471, 497,); clasa X-a. Mîndru Victor (1081, 84, 118, 162, E: 359, 360, 361, 362); clasa XI-a. Hodiş Gh. (1029, 38, 42, 48, 148, 149, 151, 169, 183, 185, P); *Şcoala elementară din Romînaş.* Clasa VII-a Marati Cornel (E: 442, 443, 444, 445, 446); clasa VIII-a *Liceul mixt.* Ciaşcaiu Mircea (E: 354, 358, 370, 379, 382, 395, 397, 398, 400, 426, 428, 434).

* * *

Pînă la 10 iulie 1954 s-au primit cel puţin zece soluţii bune dela următorii rezolvitori; după cum se arată în paranteză, probleme propuse (P), note (N) şi articole (A):

AGNITA (reg. Stalin) Schauermann Nicolae (E: 369, 370, 371, 373, 376, 379—384, 387—400, 425—442, 446).

AIUD *Liceul mixt.* Clasa IX-a. Vrăjitoru Dan (1068, 69, 70, 78—89, 91, 93, 98, 102, 104, 118, 121, 124, 126—129, 148, 152, 159).

ALBA IULIA. Clasa XI-a. Aron Mendel (1126, 128, 130, 137, E: 385, 386, 389, 393, 394, 399). Ion Mihael (1078, 79, 80, 81, 84—89, 96, 98, 106, 107, 113, P) Torsan Ilie (1121, 149, 152, 138, 207, E: 402, 406, 411, 412, 413, 415, 418, 423, 424, 447, 451, 454).

ANINA. *Şcoala Elementară.* Clasa VI-a; Iavernoriu Gheorghe (E: 427, 428, 429, 431, 432, 447, 448, 452, 454, 461, 467).

ARAD. Clasa XI-a. Ponta Titu (1165, 179, 181, 183, 185, E: 411, 412, 413, 414, 415 416, 417, 418), Vlaga Marius (1118, 122, 124—129, 140, 142, 148, 149, 150, 152, 159), Anul III SMMA. Căpitanu I. Gheorghe (E: 411, 412, 413, 418, 421, 425, 427, 428, 429, 434, 447, 454) Anul III Şc. Pedagogică, Grama Dumitru (1152, E: 427, 428, 429, 431, 432, 447, 448, 452, 454, 461, 467).

BACĂU. Clasa VIII-a. Lupaşcu Ştefan (E: 398, 402, 405, 406, 411, 412, 415, 424, 447, 448, 454), Clasa IX-a. Merticaru Vasile (1094, 126, 128, 169, 179, 185, 204, 221, 240, 241, 243, 245, 246, 247, E: 373, 378, 396, 404, 411, 418, 452), Palaghiţă I. Ştefan (1183, 152, 194, 201, 216, 221, 224, 240, 243, 246, 247, E: 457, 458, 459, 460, 470), Pavel Savel (1240, 241, 243, 245, 247, E: 404, 411, 415, 457, 454, 459), Tofan V. Vasile 1118, 184, 204, E: 398, 405, 411, 412, 415, 428, 429, 435, 447, 448, 464), Tigaeru Gheorghe (E: 389, 390, 391, 397, 398, 402, 411, 414, 515, 417).

BAIA MARE. Clasa X-a Mureşan T. Dumitru (1076, 124, 221, 229, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, P).

BIRLAD. Clasa VI-a Răcoasa (Panciu) Porumb Mircea (E: 370, 379, 382, 396, 401, 405, 414, 416, 418, 454, 455).

BOTOŞANI. *Şcoala 2 mixtă.* Clasa V-a Mălai Aurel (E: 415, 425, 433), Anul IV. S. m. textilă. Turcman Maria (118, 121, 139, 152, E: 370, 375, 384, 387, 388, 389, 391, 394, 396, 397, 398, 400, 407, 409, 449, 450, 451, P).

BRĂNEŞTI. (Ploeşti) Clasa VIII-a. Bucur D. Gheorghe (1167, 218, 241, 243, 245, E: 409, 410, 413, 418, 457, 464, 465, 469, 470).

BUCUREŞTI. *Liceul* 1 *fete.* Clasa X-a. Cruceanu Viorica (1167, 170, 181, 195, 204, 207, 230, 239—247), *Liceul* 5—7—8 *fete* Clasa X-a. Constantinescu Ioana (1063, 94, 97, 98, 102, 126, 134, 136, 245, 246, 247). *Liceul* 12 *fete.* Clasa VIII-a Clondescu Ioana (E: 411, 413, 415, 418, 426, 427, 429, 442, 443, 457), *Liceul* 1 *băieţi.* Clasa X-a. Dumitru Dan (1124, 126, 128, 140, 143, 165, 171, 183, 239, 241, 242, 245, 246, 247), Georgescu Dorin (1098, 102, 124, 128, 148, 149, 152, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 246, 247), Clasa XI-a. Istinie Crăciunel (1062, 179, 186, 195, 204, E: 414, 442, 443, 447, 454), *Liceul* 2 *băieţi* Clasa V-a. Bocancea Mihai (E: 425—433, 442), Clasa X-a. Waismann Emanuel (1084, 85, 86, 87, 88, 90. 95, 97, 98, 99, 100, 102, 104, 106, 113, 183, 184), Clasa VIII-a. Duduia Radu C. (1222, 239, 240, 242, 244, 245, 246, E: 390, 391, 398, 411). *Liceul* 5 *băieţi* Clasa X-a. Petrescu St. Viorel (1127, 128, 139, 152, 207, E: 387, 389, 402, 447, 369, P) Clasa XI-a. Manea M. Marin (1079,

85, 87, 88, 124, 183, E: 412, 415, 416, 442, 445, 447, 449, 450, 451). *Liceul 6 băieți* Clasa IX-a. Popovici I. Radu (1046, 85, 118, 185, 217, 219, 235, 242, 245, E: 401, 403, 405, 407, 416, 436, 439, 440, 452, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 463, 465, 467, 469, 470). *Liceul 7 băieți.* Clasa X-a. Mazilu T. Alexandru (1036, 38, 40, 42, 43, 53, 54, 55, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 93, 94, 95, 98, 101, 102, 106, E: 350, 351, 353, 354, 355, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 364, 365, 366, 367, 368), Stoleru George (1088, 107, 138, 139, 149, 152, 159, 165, 167, 168, 183, 187, 197, 199, 201, 207, 210, 243, 245, 247, E: 402, 432, 433, 441, 451, 452), Clasa VI-a Cosmin Dan (1079, 80, 81, 82, 84, 98, 102, 104, 106, 121, 127, 129, 165, 167, 168, 170, 175, 183, 187). *Liceul 9 băieți.* Clasa X-a. Răzuș Alexandru (1084—90, 95—100, 106, 111, 113). *Liceul de băieți* 10. Clasa VIII-a. Petre Tudor (E: 398, 411, 419, 402, 411, 412, 415, 418, 419, 421, 447), Pătrașcu Sorin (E: 411, 412, 426, 427, 428, 429, 434, 435, 442, 443), Clasa IX-a. Bonghez Valeriu (1165, E: 396, 413, 425, 426, 428, 429, 441, 443, 445, 447), Clasa X-a, Cîmpu Eugen (1126, 143, 148, 157, 165, 173, 183, 189, 201, 221, 239, 240), Teodorescu Mihai (1082, 118, 124, 126, 143, 148, 149, 152, 159, 165, 183, 221, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P). Școala elementară Grădiștea (Vidra), Clasa VI-a Marin Aneta (E: 378, 380, 387, 389, 391, 398, 400, 416, 418, 434, 435, 436, 438, 439, 440, 441, 458, 461, 471). Școala Medie Mecanică nr. 1 Anul I. Gringașu Gh. (E: 411, 412, 414, 416, 418, 425, 426, 428, 429, 431, 433, 436, 439, 440, 441, 443, 445, 446, 454), Leibovici Rudi (E: 373, 378, 379, 382, 383, 425, 426, 427, 429, 432, 434, 437, 438, 441). Marcu Stan (E: 372, 375, 379, 441, 415, 416, 418, 425, 426, 429, 439, 440, 441, 443, 445), Gros David (E: 370, 372, 373, 379, 380, 382, 411, 412, 414, 415, 416, 418, 425, 426, 433, 439, 440, 441, 445, 446), Oancea Emanoil (E: 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446), Oancea Ion (E: 411, 412, 415, 416, 418, 426, 429, 432, 433, 440, 445), Păun A. Traian (E: 370, 372, 373, 379, 411, 412, 413, 414, 418, 426, 429, 439, 441, 442), Tănase Ion (E: 416, 425, 426, 428, 435, 437, 436, 439, 440, 446). *Școala medie mecanică nr.* 2. Anul, I. Avram Vasile (1084, 159, E: 370, 372, 382, 402, 408, 425, 426, 428, 459), Dinescu Mircea (1118, 152, 165, 241, 242, 245, E: 403, 411, 412, 425), Pascaru Nicolae (1118 121, 152, 154, 157, 159, E: 390, 396, 400, 406, 418), Ilinca P. Gheorghe (1118, 121 159, 190, 242, E: 389, 411, 412, 418, 425), Butnaru Iacob (1118, 121, 157, 165, E: 387, 389, 396, 400, 403, 457), Dobrogeanu Constanța (1078, 84, 93, 152, 159, 165, 141, 1142, 245, E: 389, 396, 400, 418, 446, 457), Chican Gheorghe (1118, 121, 152, 157, 159, E: 389, 396, 400, 411, 418), Dumitrescu Ion (1118, 121, 154, 157, 165, E: 387, 396, 400, 403, 457), Dumitrescu N. Dumitru (1118, 152, 157, 159, E: 387, 396, 400, 418, 457), Dan Marioara (1081, 84, 93, 98, 118, 121, 152, 154, 157, E: 397, 402, 403, 407, 409, 412, 425, 457), Popa Leon (1081. 84, 93, 121, 152, 157, 165, E: 397, 400, 402, 407, 409, 411, 412, 418, 425, 426, 457). Anul II. Drăgănescu Petre (1078, 81, 84, 93, 118, 121, 124, 143, 152, 157, 159, 165, 183, 221, 241, 243, E: 418, 427, 441, 447, 450), Bădescu Nicolae (1118, 121, 124, 127, 143, 152, 153, 157, 159, 165, 183, 221, 241, 244, E: 386, 406, 459, 466), Cristea Gh. (1078, 80, 81, 84, 93, 98, 118, 152, 165, E: 425, 427). Dăscălița M. Teodor (1121, 124, 126, 143, 154, 157, 159, 183, 241, 245, 247, E: 397, 415, 418, 457, 458, 560, 466), Grigoraș Aurel (1078, 79, 80, 81, 84, 152, 165, E: 372, 411, 412, 419, 425, 440, 441, 443, 446, 458), Grigoriu Maria (1178, 124, 126, 143, 152, 157, 165, 183, 241, 243, 245, E: 400, 407, 418, 426). Munteanu Aurel (1078, 84, 93, 121, 124, 157, 159, 221, 224, 240, 242, 244, E: 389, 407, 425, 447, 469), Radu C. Constantin (1078, 84, 93, 118, 152, E: 441, 412, 418, 427, 441), Vasile Sergiu (1084, 93, 118, 152, 156, 165, E: 411, 412, 415, 425, 426, 447), Zilișteanu Alexandru (1118, 121, 124, 143, 152, 157, 167, 183, 241, 242, 245, E: 407, 412, 419, 454, 466), Segal Armand (1121, 124, 157, 159, 183, 221, 241, 242, 245, 247, E: 397, 441, 447, 457, 460), Sandu M. Marin (1118, 124, 157, 159, 183, 221, 241, 242, E: 407, 412, 428, 447, 448, 457, 466), Stănică Ghela (1121, 1126, 157, 165, 183, 221, 226, 241, 242, 245, E: 407, 418, 457, 460). Anul III. Neguț Gh. Nicolae (1054, 55, 59, 63, 65, 73, 74, 80, 82, 83, 85, 87, 88, 89, 93, 94, 98, 104, 114, 115, 118, 126, 128, 139, 141, 148, 156, 159, 162, 163, 164, 170, 171, 175, 183, 187, 190, 191, 199, 205, 212, 214, 216, 217, 131, 232, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 247, P). (va urma)

*

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie; iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică pe adresa Redacției G.M.F. *seria B.*

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele patru numere apărute. Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1954, se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1954.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme deja propuse, mai există publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *In redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțiile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori, aceste reguli îndeplinite, conduc la soluția problemei. Adesea, dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat. *Corespondentul nostru* care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă scoasă dintr-o observare făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele și în fine, cei mai avansați pot să ne trimită și cîte un articol cu o chestiune generală sau cu o apropiere originală între chestiuni cunoscute. Aceste note sau articole este bine să fie refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise, pentru a evita ca în expunerea făcută să fie scrise vorbe fără rost, iar ideile, să deștepte interes pentru cititor. Ordinea și îngrijirea în prezentarea unei idei pot fi îndeplinite dacă harnicul nostru corespondent a făcut mai multe rezolvări, dacă a citit și a înțeles deplin, multe din soluțiile și articolele publicate și dacă a studiat îndeajuns, chestiunea de care se ocupă.

— *Tovarășii colaboratori elevi* sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra activității cercurilor de matematică sau de fizică la care iau parte și asupra modului de desfășurare ale « Olimpiadei matematice », pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceia, reclamații, sau comenzi de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu tirajul sau întîrzierea revistei, se pot face la Oficiul poștal local sau la Centrul de difuzare a presei din București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* mai este rugat a face cunoscută revista și altor cunoscuți și a ne trimite propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— *După apariția numărului 10* al G.M F. seria B, corespondenții evidențiați în cursul anului 1954 sînt rugați să-și întocmească cîte o fișă cuprinzînd numele, adresa lor actuală și tabelul cu toate problemele ce au rezolvat, *așezate în ordinea lor numerică* și care au fost anunțate la rubrica rezolvitorilor în numerele 1—10, apoi să o trimită redacției, în vederea *clasificării și premierii pe anul* 1954.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Marcuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ SERIA B PE ANUL 1954

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 10 (12 numere)

C. 864. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul **Lei 1** exemplarul

E 1426

KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARA PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

Institut. de Documentare ... BUCUREŞTI
OBMEH - ... E
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - ОБМЕНА

Anul V — septembrie 1954

9

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul V, Nr. 9 – septembrie 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Spectroscopia şi aplicaţiile ei de Virgil Atanasiu*	313
2.	*Despre sistemele de numeraţie de S. Fissgus*	321
3.	*Despre isogonale de Florin Constantinescu*	325
4.	*Din experienţa cercurilor de matematici ale elevilor claselor V–VII din şcoala sovietică de prof. I. Vais*	329
5.	*Plutitorul Descartes de prof. N. Rădulescu*.....	336
6.	*Probleme rezolvate (943, 1003, 1036, 1055, 1059, 1058, 1068, 1069, 1071, 1076, 1077, 1093, E: 470, 1099, 1103, 1104, 1108, 1154, 1163, 1178*.....	337
7.	*Probleme propuse (1346–1371)*.....	408
8.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 534–E: 550)*	411
9.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	414

ANUL V 9 SEPT. 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Spiru Haret, 12 – Tel. 4.46.53 – Bucureşti XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi de fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL V * Nr. 9 septembrie 1954

SPECTROSCOPIA ŞI APLICAŢIILE EI

VIRGIL ATANASIU

I. Introducere.

SPECTROSCOPIA este o parte a opticii care se ocupă cu studiul spectrelor. Ce sînt spectrele, cum se produc ele, de cîte feluri sînt şi care este importanţa cunoaşterii lor pentru ştiinţă, pentru practică, vom vedea în cele ce urmează.

Spectrul cunoscut din timpuri imemorabile, este fără îndoială spectrul solar, sau cum i se spune în vorbirea obişnuită, *curcubeul*. El este un fenomen datorit descompunerii spectrale adică dispersiunii luminii solare în condiţii naturale.

Descartes (1637) a fost primul care a elaborat o teorie elementară referitoare la explicarea curcubeului. Teoria lui Descartes era bazată în fond, pe ipoteza variaţiei indicelui de refracţie cu lungimea de undă, dar — după cum arată *Newton* în lucrarea sa « Optica » pentru Descartes a rămas neclară originea culorilor.

Faptul că lumina de diferite culori se refractă deosebit a permis descompunerea luminii albe care este o lumină compusă în componentele ei monocromatice. O astfel de experienţă a fost făcută prima oară în 1672 de către Newton.

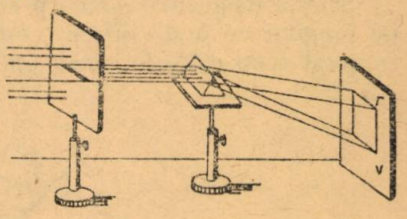


Fig. 1. Descompunerea luminii.

Newton, folosind metoda refracţiei prin prismă, a făcut să cadă pe aceasta un fascicul de lumină albă care provenea de la o sursă liniară (o fantă) paralelă cu muchia prismei (fig. 1). Imaginea fantei proiectată pe un ecran se prezenta nu numai deplasată (datorită refracţiei produsă de prismă), ci era şi întinsă într-o bandă colorată formînd ceea ce numim un *spectru* (v. R.M.F. Nr. 3 din 1952).

Urmînd raţionamentul lui Descartes, Newton demonstrează că pentru fiecare mediu dat, indicele de refracţie n este o funcţie de lungime de undă λ, adică:

$$n = f(\lambda)$$

O metodă foarte sugestivă pentru caracterizarea facultăţii dispersive a substanţei prismei a fost metoda prismelor încrucişate (fig. 2). Newton a făcut ca lumina dispersată de prima prismă să cadă pe o a doua prismă a cărei muche era perpendiculară pe muchea celei dintîi.

El a constatat astfel că spectrul dat de prima prismă este deviat de a doua, astfel că poziţia finală a spectrului era determinată prin mărimea dispersiei ambelor prisme.

Cercetările ulterioare au determinat că în afara spectrului vizibil care se întinde pe lungimile de undă cuprinse între 3900 Å (pentru violet) şi 7800 Å (pentru roşu), există domenii de radiaţii invizibile cu lungimi de undă mai mari decît radiaţiile roşii (spectrul infraroşu se întinde între 342 μ şi 7800 Å) şi mai mici decît a radiaţiilor violete (spectrul ultraviolet se întinde între 3900 Å şi 3 Å) şi spectrul razelor γ de la 0, 1 Å în jos, precum şi dincolo de infraroşu prin domeniul undelor herţiene care se întind de la lungimi de undă de ordinul micronului (82 μ) pînă la cîţiva kilometri.

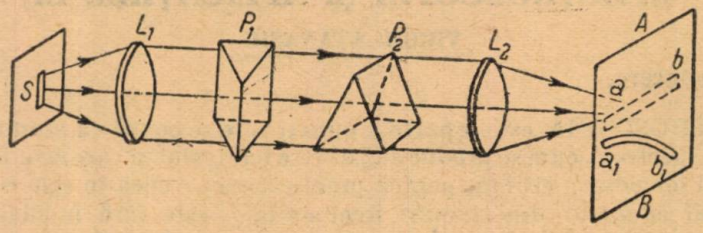


Fig. 2. Metoda prismelor încrucişate.

Domeniile acestor spectre se interpătrund de o parte şi de alta a lungimilor de undă iar în ce priveşte natura lor, s-a dovedit că toate sînt unde electromagnetice (v. G.M.F$_{(B)}$. nr. 6/954).

Se obişnuieşte să se numească *domeniu optic* ansamblul radiaţiilor electromagnetice format din infraroşu, vizibil şi ultraviolet. Metodele de cercetare sînt în bună parte comune în acest domeniu optic, de care ne vom ocupa.

II. Tehnica spectroscopiei.

Scopul dispozitivelor de producere a spectrelor fiind separarea radiaţiilor de lungimi de undă diferite, adică « dispersia luminii » se poate întrebuinţa în acest scop orice fenomen optic care conduce la acest rezultat.

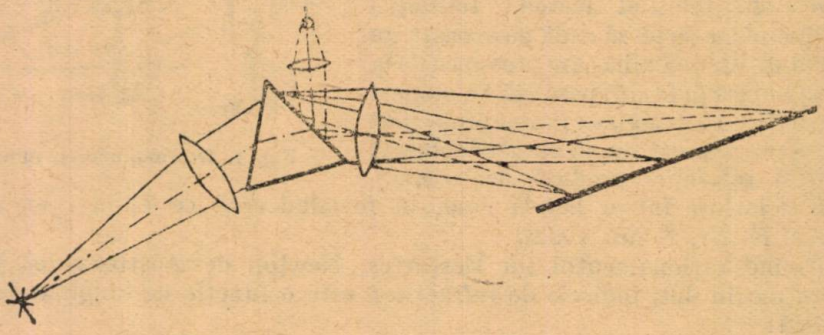


Fig. 3. Schema spectroscopului

Primele experienţe de spectroscopie au fost făcute după cum am văzut, cu ajutorul prismelor folosindu-se pentru dispersia luminii fenomenul de refracţie. Mult mai tîrziu a fost introdus în practica spectroscopică fenomenul de interferenţă sau de difracţie, sub forma reţelelor de difracţie plane sau concave.

Aparate spectrale cu prismă.

In toate aparatele spectroscopice (fig. 3) se caută a se realiza ca fasciculul ce cade pe suprafaţa de intrare a prismei să fie format din raze paralele. Acest lucru se realizează cu ajutorul colimatorului. Lentila colimatorului transformă fasciculul venit de la fantă în focarul ei, într-un fascicul de raze paralele

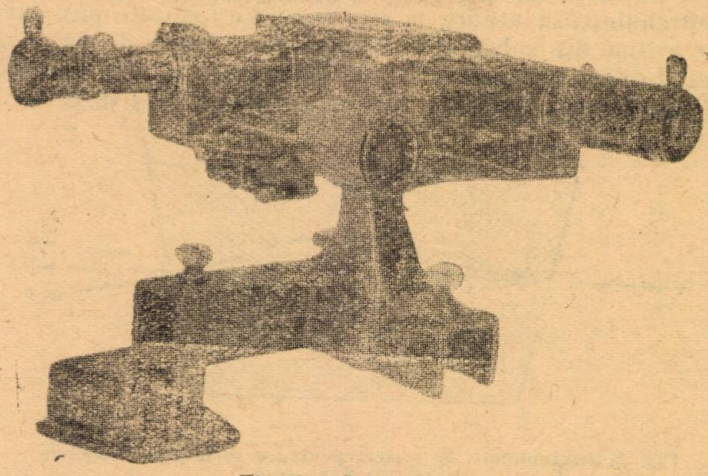


Fig. 4 a. Spectroscop.

care străbate prisma şi este descompus într-o serie de fascicule paralele de radiaţii de diferite lungimi de undă, radiaţii ce erau conţinute în lumina de studiat. O lentilă primeşte acest fascicul şi în planul ei focal dă o serie de *imagini lineare ale fantei*, fiecare imagine corespunzînd unei radiaţii de lungime de undă bine determinată.

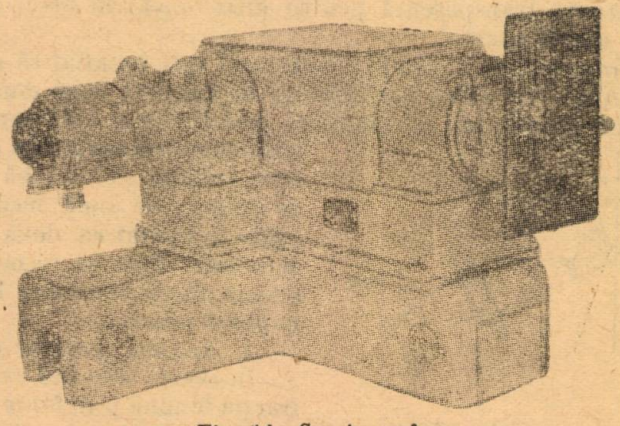


Fig. 4 b. Spectrograf.

Ansamblul acestor imagini care poate fi continuu sau discontinuu constituie «*spectrul*» radiaţiei luminoase incidente. Spectrul acesta poate fi observat (evident spectrul vizibil) sau cu o lupă care împreună cu lentila obiectiv formează luneta aparatului şi avem astfel, un *spectroscop* (fig. 4 a), sau poate fi înregistrat pe o placă fotografică şi aparatul se numeşte atunci, *spectrograf* (fig. 4 b).

In infraroşu, unde nici ochiul nici placa fotografică nu sînt sensibile, se întrebuinţează alte receptoare bazate pe proprietăţile calorice ale radiaţiilor infraroşii.

Aceste spectroscoape sau spectrografe care au fost descrise mai sus, sînt numite, *cu deviaţie*. In multe cazuri este necesar să se suprime această deviaţie şi se întrebuinţează atunci, prisme compuse realizate prin juxtapunerea mai multor prisme din substanţe cu indici de refracţie diferiţi (fig. 5), obţinîndu-se astfel dispersia luminii fără deviaţie, adică *cu viziune directă*; aceste aparate se întrebuinţează uneori pentru obţinerea unei dispersii mai mari.

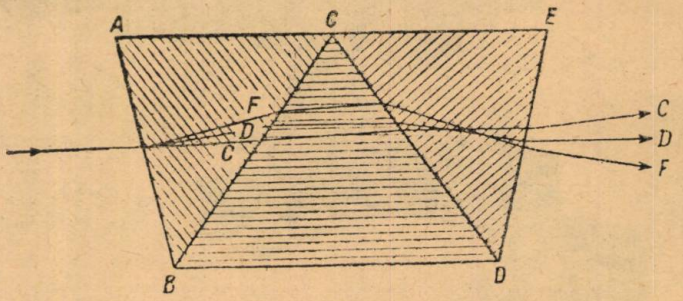


Fig. 5. Juxtapunere de prisme pentru a se obţine dispersia luminii fără deviaţie.

Mai sînt apoi, aparate spectrale cu prisme de deviaţie constantă întrebuinţate pentru infraroşu, unde receptorul nu poate fi deplasat.

Pentru studiul spectrelor din partea vizibilă şi apropiată de zona infraroşie lentilele şi prismele aparatelor spectrale se fac din sticlă. Pentru studiul spectrelor din regiunea ultravioletă materialul pentru lentile şi prisme trebuie să fie o substanţă transparentă pentru ultraviolet; în acest scop se întrebuinţează de obicei cuarţul.

Pentru caracteristica unui aparat spectral este esenţial să ştim care este *puterea rezolutivă* a lui, adică posibilitatea de a separa două domenii spectrale vecine. Această proprietate este definită prin raportul $\lambda/d\lambda$ care dă diferenţa minimă dintre lungimile de undă $d\lambda$ pe care trebuie să le aibă două radiaţii de lungime de undă medie λ pentru a apare în aparat ca două linii spectrale deosebite. Puterea rezolutivă este determinată de lungimea bazei şi nu de unghiul prismei.

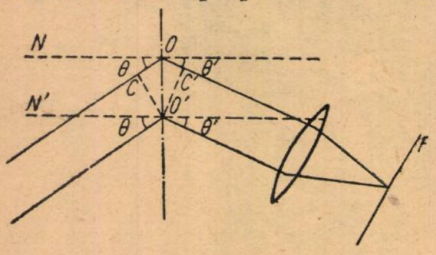


Fig. 6. Interferenţă prin difracţia în reţea.

2. *Aparate spectrale cu reţea.*

In aceste aparate se utilizează difracţia luminii prin fante foarte strîmte. O reţea optică este un sistem optic compus dintr-un mare număr de asemenea fante paralele şi echidistante. Dacă ele sînt pe acelaşi plan reţeaua se numeşte plană, iar dacă sînt pe o suprafaţă cilindrică, reţeaua se numeşte concavă. O reţea se obţine făcînd cu diamantul trăsături fine pe sticlă.

Să considerăm o reţea plană (fig. 6). Fie *a* distanţa între două sgîrieturi şi *b* lărgimea constantă a sgîrieturii; $a+b$ este *perioada* reţelei, adică distanţa

după care structura rețelei se repetă. O rețea este caracterizată de obicei, prin inversul perioadei $n = \frac{1}{a+b}$ de trăsături pe unitate de lungime. Rețelele moderne au pînă la 1200 trăsături pe milimetru, iar numărul total de trăsături ajunge pentru o rețea, pînă la 200 000.

Să presupunem că de la un izvor monocromatic constituit dintr-o fantă paralelă cu trăsăturile rețelei, și așezată în focarul unei lentile se trimite pe rețea un fascicol de lumină format din raze paralele. Lumina difractată de rețea o trimitem pe o a doua lentilă, care dă o imagine în planul ei focal.

Vom studia fenomenul produs de un singur punct al fantei (izvorul de lumină), într-un plan perpendicular pe planul rețelei. Fie O și O' centrele a două spații transparente vecine, pe rețea, și ON și $O'N'$ normalele pe la planul rețelei în O și O', iar θ unghiul format de razele paralele ce cad pe rețea, cu normala. Lumina incidentă traversează în parte, rețeaua fără să fie deviată, în parte este difractată datorită faptului că cele două centre considerate O și O' devin surse de noi unde sferice care se propagă în toate direcțiile. Lentila a doua va da o imagine a fantei izvor obținută cu razele directe și o serie de imagini datorită razelor difractate. Razele difractate obținute din cele două puncte vecine O și O' vor interfera.

Pentru lumina difractată într-o direcție oarecare ce face un unghi θ' cu normala, diferența de drum a acestor două raze este $\delta = OC + OC' = (a+b)(\sin\theta + \sin\theta')$. Teoria interferenței undelor, aplicată luminii ne arată că se va produce intensitatemaximă pentru acele direcții θ' pentru care $\delta = \theta'\lambda$, figura de difracție fiind compusă dintr-un număr mare de linii luminoase, separate prin spații întunecate.

Dacă în loc să emită lumină monocromatică izvorul emite lumină albă se va obține astfel dispersia acelei lumini adică se va obține un spectru. Pentru $k = 0$ radiațiile de diferite lungimi de undă sînt suprapuse, imaginea nedifractată este deci albă. Spectrele datorite difracției pentru care $k = 1, 2, \ldots$ se numesc spectre de ordinul I, II, ... și ele însoțesc simetric imaginea nedifractată a fantei. Cu cît ordinul unui spectru este mai ridicat, radiațiile sînt mai dispersate și se suprapun; în spectroscopie se folosesc spectrele de ordinul I, II și III.

In cazul special al rețelelor plane *de trasmisie* în care lumina cade perpendicular pe planul rețelei, unghiul θ devine egal cu zero și relația de difracție se scrie: $\sin\theta = \frac{1}{a+b} k\lambda$.

Puterea rezolutivă a unei rețele este egală cu produsul dintre ordinul spectrului prin numărul total de trăsături al rețelei. Cu cît se întrebuințează un spectru de ordin mai ridicat numărul de trăsături poate fi mai mic.

Rețelele de difracție au fost aplicate prima dată pentru studiul spectrelor, în anul 1821, de către Frauenhofer. Primele rețele fabricate de el erau formate dintr-un număr mare de sîrme subțiri întinse paralel unele față de altele. Spațiile dintre sîrme aveau rol de fante, al căror număr ajungea pînă la 136 pe cm. Mai tîrziu Frauenhofer a confecționat rețele prin sgîrierea cu diamantul a unor trăsături pe o placă de sticlă.

Pe lîngă rețeaua plană practica spectroscopică folosește și *rețeaua concavă*. In cadrul acestui articol nu ne putem ocupa și de această rețea care se deosebește mult de rețeaua plană atît în ce privește teoria cît și metoda experimentală.

In afară de rețelele prin transmisie se utilizează în prezent pe scară mare, *rețelele de reflexie*, care se obțin prin sgîrierea cu diamantul a unor trăsături pe o oglindă metalică. Proprietățile acestor rețele depind în mare măsură de forma și adîncimea trăsăturii făcută de diamant.

Spre deosebire de aparatele spectrale cu prismă care de cele mai multe ori constituie un tot, rețelele se întrebuințează de obicei sub formă de montaje compuse din piese izolate unele de celelalte, deci, există montaje spectroscopice cu rețele, nu spectroscoape sau spectrografe cu rețea.

III. Clasificarea spectrelor.

Studiul spectroscopic al luminii emise de către corpuri a permis clasificarea *spectrelor optice* în trei categorii: *spectre continue, spectre de linii și spectre de bande.*

Gazele și vaporii excitați (de obicei prin metode electrice) emit *spectre discontinue* compuse din *linii* dacă emițătorul este un atom sau din *bande* dacă emițătorul este o moleculă.

Dacă în calea razelor luminoase emise de un izvor ce dă un spectru continuu se interpune un strat de vapori ai unui metal, unele porțiuni din spectrul continuu nu apar cînd se face analiza spectroscopică. Spectrograma spectrului continuu a izvorului prezintă una sau mai multe linii întunecate care corespund exact lungimilor de undă pe care vaporii acestui metal sînt capabili să le emită. Acest fenomen denumit *inversiunea liniilor spectrale* a fost descoperit de Kirchhoff. Trebuie remarcat că numărul liniilor de absorbție care apar, este foarte mic față de numeroasele linii ce caracterizează spectrul de emisie al vaporilor. Spectrul de felul celui descris mai sus, adică spectrul continuu brăzdat de linii întunecate de absorbție, se numește *spectru de absorbție.* El a fost observat întîi de Wollaston (1802) și apoi de Frauenhofer (1817) în spectrul solar, ale cărui numeroase linii negre au căpătat numele de *liniile lui Frauenhofer.* După Kirchhoff și Bunsen (1861) aceste linii ale lui Frauenhofer se explică prin absorbția în atmosfera solară care se compune din vapori și gaze.

1. *Spectre continue.*

Cînd temperatura unui corp crește și ajunge la aproape 500°C corpul devine luminos. Energia calorică pe care o primește corpul se transformă în energie luminoasă. Cu cît temperatura corpului crește cu atît lumina emisă se apropie mai mult de alb. Analiza spectroscopică a luminii emise de către corpurile incandescente, arată că spectrul corespunzător este un spectru continuu, în care se găsește lumină cu lungimi de undă din ce în ce mai scurtă cu cît temperatura emițătorului este mai ridicată.

Prevost a stabilit că legătura între puterea unui corp de a absorbi și de a radia căldura are un caracter calitativ. Jumătate de secol mai tîrziu (1859) Kirchhoff a dat acestei legături forma unei legi strict cantitative.

Prin *putere de emisie* se înțelege *fluxul* emis de unitatea de suprafață a corpului radiant în toate direcțiile, într-o secundă.

Pe de altă parte, dacă pe unitatea de suprafață a corpului cade fluxul luminos, atunci o parte din acest flux va fi absorbit de corp. Numim *putere de absorbție* a corpului, raportul dintre fluxul absorbit și cel incident. Experiența arată că atît puterea de emisie cît și puterea de absorbție depind de frecvența radiației și de temperatura corpului respectiv.

Această putere de absorbție nu trebuie confundată cu *coeficientul de absorbție* a corpului care măsoară atenuarea relativă a fasciculului paralel de raze pe unitatea de lungime. Corpul poate avea un coeficient de absorbție mic însă o putere de absorbție mare dacă lungimea lui este mare.

Kirchhoff a denumit corpurile la care puterea de absorbție este egală cu unitatea pentru toate frecvențele și temperaturile, corpuri *absolut negre*. Negrul de fum și negrul de platină se apropie prin proprietățile lor de corpul absolut negru.

Legea stabilită de Kirchhoff referitoare la raportul dintre puterea de emisie și puterea de absorbție, se enunță astfel: Raportul dintre puterea de emisie și cea de absorbție a unui corp nu depinde de natura sa, acest raport fiind pentru toate corpurile o funcție universală de frecvență și de temperatură în timp ce atît puterea de emisie cît și puterea de absorbție luate separat, variază puternic dela un corp la altul.

Potrivit legii lui Kirchhoff un corp care absoarbe mai puternic, trebuie să și emită mai mult cu condiția ca orice comparație să se facă la aceiași temperatură.

De subliniat că legea lui Kirchhoff se referă numai la radiația termică și nu este valabilă cînd emisia de lumină este condiționată de alte cauze.

Referitor la radiația corpului negru mai trebuie amintite *legea Ştefan-Boltzmann* și *legea deplasării* a lui Wien.

Legea care dă relația dintre energia totală W emisă de un corp negru sub formă de radiații și temperatura absolută a corpului a fost dedusă experimental de J. Stefan (1879) și apoi demonstrată teoretic de Boltzmann (1884), pe baze termodinamice. Această lege arată că energia totală emisă în timp de o secundă de către un cm^2 a unui corp *absolut negru* este proporțională cu puterea a patra a temperaturii absolute a corpului radiant, $W = \sigma T^4$ (σ e o constantă).

Legea Stefan-Boltzmann capătă o întrebuințare practică la determinarea temperaturii cuptoarelor industriale precum și la determinarea temperaturii soarelui. Această lege nu ne spune însă, nimic relativ la repartiția spectrală a energiei. In anul 1893, W. Wien a stabilit teoretic *legea deplasări* conform căreia la creșterea temperaturii maximum de energie radiată se deplasează spre lungimile de undă mici, adică spre frecvențe mari. Cantitativ această lege se exprimă prin formula:

$$\lambda_m T = \text{Const.}$$

(λ_m este lungimea de undă corespunzătoare energiei maxime).

Legile Stefan-Boltzmann și Wien sînt doar legi parțiale referitoare la problema radiației corpului negru: rezolvarea generală a acestei probleme a fost realizată de către Planck pornind de la considerarea că emisia de energie radiantă se face în porțiuni (cuante) $h\nu$ sau multipli întregi de $h\nu$, unde $h = 6{,}55.10^{-27}$ erg.s. este constanta lui Planck, iar ν frecvența radiației. Formula obținută de Planck pentru puterea de emisie a corpului negru cuprinde atît legea lui Stefan-Boltzmann cît și legea lui Wien (v.R.M.F. nr. 1/951).

2. *Spectre de linii.*

Să ne ocupăm acum, de spectrele de linii, adică de spectrele produse de atomii excitați.

Modul de producere al acestor spectre variază în mare măsură, după atomul studiat şi după domeniul spectral cercetat. Astfel, pentru un metal cu punct de topire prea coborît se întrebuinţează electrozi de cărbune găuriţi, în găuri fiind introduse părticele din metalul respectiv. Făcînd să se producă o descărcare electrică între electrozi se obţine aşa numitul spectru de scîntei. Spectrul acestei scîntei e caracteristic pentru metalul cercetat şi este de obicei diferit de spectrul produs de un arc electric ce trece între cei doi electrozi.

Alt mod constă în introducerea unei sări volatile cu ajutorul unui fir de platin, în flacăra unui bec Bunsen. Temperatura ridicată a flacării produce excitarea atomilor metalului din vaporii sării şi deci producerea spectrului acestuia. Dacă elementul se află în stare de gaz, atunci se produce o descărcare electrică în acel gaz sub presiune scăzută (în tub Geissler).

In fine, o altă metodă este aceea a ciocnirilor cu electroni. Intr-un tub în care se găseşte o sursă de electroni, (fig. 7), se mai introduc doi electrozi: o grilă şi o placă. In acest tub se introduce sub presiune scăzută, gazul de cercetat. Electronii produşi de filament şi accelerați cu ajutorul unei diferenţe de potenţal, capătă energie. In ciocnire cu atomii gazului, electronii cedează acestă energie pe care apoi atomii o emit sub formă de radiaţii luminoase, după un mecanism pe care-l vom vedea mai departe.

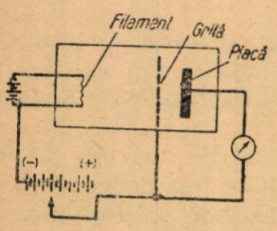


Fig. 7. Metoda ciocnirilor cu electroni realizată în tub cu trei electrozi.

Trebuie subliniat că intensităţile relative ale diferitelor linii pot varia foarte mult în funcţie de condiţiile de excitare. Mai mult, diferite linii pot lipsi cînd se folosesc anumite procedee de excitare, Uneori se poate excita chiar numai o singură linie din tot spectrul atomic. Deci, aspectul exterior al spectrului depinde în mod foarte pronunţat de condiţiile de excitare.

Primele cercetări asupra spectrelor de linii au fost făcute de către Bunsen şi Kirchhoff (1850).

Spectrele diferiţilor atomi se disting printr-o extraordinară diversitate; astfel în spectrul fierului apar cîteva mii de linii. Cu toate acestea putem deosebi fără dificultate aceste spectre atomice bogate în linii, de spectrele de bandă ale moleculelor, acestea din urmă caracterizîndu-se printr-o anumită grupare a numeroaselor linii. Trebuie menţionat că nici liniile spectrale atomice nu sînt îngrămădiri dezordonate, o anumită regularitate caracterizează dispoziţia acestor linii. Sensul fizic al acestor regularităţi şi explicaţia lor se găseşte în particularităţile structurii atomului.

(va urma)

PENTRU CERCURILE DE ARITMETICĂ

DESPRE SISTEMELE DE NUMERAŢIE

S. FISSGUS

Tehnician — Mina Lupeni

ASTĂZI nu se îndoieşte nimeni că:

$$129 \cdot 327 = 42183,$$

oricine poate verifica cu uşurinţă această înmulţire. Nu întotdeauna lucrurile se prezentau atît de simplu. Să ne gîndim numai, cît de grea este efectuarea acestei înmulţiri cînd cifrele din exemplul nostru sînt scrise cu aşa numitele semne romane, adică să calculăm:

$$\text{CXXIX} \cdot \text{CCCXXVII}$$

Numai simpla scriere a acestor semne prezintă oarecare dificultate. În trecut calculele aritmetice nu erau atît de uşoare ca cele de azi. Ne punem întrebarea, de ce lucrurile se prezintă astăzi atît de simplu şi de ce nu s-au prezentat şi în trecut, la fel. Răspunsul la această întrebare este uşor de dat: ne folosim astăzi de un sistem de numeraţie, din care rezultă un mod de scriere a cifrelor astfel, că fiecare cifră reprezintă o altă valoare cînd ocupă un alt loc, respectînd o anumită lege.

Fie n aşa zisa bază a sistemului de numeraţie, m un număr întreg oarecare, şi a o cifră oarecare, care intră în componenţa numărului m. Dacă cifra a ocupă locul cel mai din dreapta din numărul m, reprezintă valoarea $a \cdot n^0 = a$; dacă ocupă al doilea loc din dreapta, valoarea $a \cdot n^1$, al treilea loc la dreapta, valoarea $a \cdot n^2$ şi aşa mai departe. Dacă ocupă al p-elea loc din dreapta, reprezintă valoarea numerică $a \cdot n^{p-1}$.

Baza sistemului de numeraţie cu care lucrează azi toată lumea, este 10. Cu 10 cifre, adică cu 10 simboluri, putem exprima orice număr.

Aşa de exemplu:

$$42183 = 3 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$42183 = 3 + 8 \cdot 10 + 1 \cdot 100 + 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 10000$$

Expresia:

$$7 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3$$

reprezintă numărul 9277. Generalizat, în sistemul de numeraţie cu baza n avem:

$$a_p a_{p-1} \ldots a_2 a_2 a_1 a_0 = a_0 \cdot n^0 + a_1 \cdot n^1 + a_2 \cdot n^2 + \ldots + a_{p-1} n^{p-1} + a_p n^p$$

Sistemul de numeraţie cu baza 10 nu este singurul sistem folosit pînă în prezent. În cursul istoriei s-au folosit şi alte sisteme de numeraţie. Leibnitz a întrebuinţat în unele calcule sistemul cu baza 2.

Să ne alegem un sistem de numeraţie, care are ca bază un număr mai mic decît 10, de pildă 6. Dacă în sistemul zecimal ne servim de 10 cifre, 0, 1, 2, ... 9, atunci în sistemul cu baza 6 ne vom folosi de 6 cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Să notăm şi în acest sistem, baza, adică primul număr cu 2 cifre, cu

10, deoarece cu 5 cifre şi 0 nu îl vom putea exprima altfel. Vom avea atunci, următorul tablou:

Baza sistemului	Corespondenţa numerelor
10	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13...
6	1 2 3 4 5 10 11 12 13 14 15 20 21...

Numărul 10345 scris în sistemul de bază 6, este egal cu:

$$5 \cdot 6^0 + 4 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^4 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 36 +$$

$$+ 1 \cdot 1296 = 1433 \text{ (în baza 10)}$$

Numărul 10345 în sistemul cu baza 6, poate fi dezvoltat şi într-un şir al propriului sistem şi avem:

$$10345 = 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4$$

unde 10 reprezintă numărul 6 scris în baza 6.

Putem efectua operaţiile aritmetice şi în sistemul avînd baza 6. Astfel:

$$\begin{array}{r} 4325 + \\ 5041 \\ \hline 13410 \end{array}$$

doarece $5 + 1 = 10$ rămîne 1; $4 + 1 = 5$; $5 + 2 = 11$ rămîne 1; etc. Analog putem efectua şi o scădere:

$$\begin{array}{r} 5201 - \\ 3544 \\ \hline 1213 \end{array}$$

Pentru a putea trece la înmulţire şi împărţire, să formăm mai întîi, tabla înmulţirii în baza 6. Avem

$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$	$5 \cdot 1 = 5$
$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 2 = 10$	$4 \cdot 2 = 12$	$5 \cdot 2 = 14$
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 3 = 10$	$3 \cdot 3 = 13$	$4 \cdot 3 = 20$	$5 \cdot 3 = 23$
$1 \cdot 4 = 4$	$2 \cdot 4 = 12$	$3 \cdot 4 = 20$	$4 \cdot 4 = 24$	$5 \cdot 4 = 32$
$1 \cdot 5 = 5$	$2 \cdot 5 = 14$	$3 \cdot 5 = 23$	$4 \cdot 5 = 32$	$5 \cdot 5 = 41$

Calculînd cu ajutorul acesteia, avem:

$$\begin{array}{r} 3425 \cdot 31 \\ \hline 15123 \\ 3425 \\ \hline 155055 \end{array}$$

Să facem verificarea trecînd la sistemul zecimal:

$$3425 \text{ (sist. bază 6)} = 5 \cdot 6^0 + 2 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^3 = 809 \text{ (sist. zecimal)}$$

În sistemul zecimal $809 \cdot 19 = 15371$.

Va trebui ca 15371 din sistemul zecimal să fie egal cu 155055 din sistemul cu baza 6. Într-adevăr,

$$1 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4 = 5 \cdot 6^0 + 5 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^4 + 1 \cdot 6^5$$

Analog în sistemul de numeraţie cu baza 6 putem efectua şi o împărţire. Aşa de exemplu:

$$\begin{array}{l} 2004013 : 425 = 2413 \\ 3100 \\ \quad 1041 \\ \quad\quad 2123 \\ \quad\quad\quad 000 \end{array}$$

Las pe seama cititorului de a verifica această împărţire, verificare care este foarte simplă făcînd transformarea în sistemul zecimal.

Cea mai mică bază posibilă pentru un sistem de numeraţie, este baza doi. Singurele cifre ale acestui sistem sînt 0 şi 1. Cu calculele din acest sistem se ocupă aritmetica binară. Să ne ocupăm puţin de acest sistem. Tabloul de corespondenţă a numerelor este următorul:

Baza sist.	Corespondenţa numerelor									
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
10	11		12		13		14		15	16
2	1011		1100		1101		1110		1111	10000

Avem, de exemplu:

$$1101 \text{ (sist. baza 2)} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 1 + 0 + 4 + 8 = 13 \text{ (baza 10)}.$$

Să efectuăm şi o înmulţire în acest sistem.

Tabla înmulţirii în acest caz, este cît se poate de simplă. Avem

$$1 \cdot 0 = 0 \quad \text{şi} \quad 1 \cdot 1 = 1$$

Să efectuăm produsul: $101101011 \cdot 110$.

Avem

$$\begin{array}{r} 101101011 \cdot 110 \\ \hline 101101011 \\ 101101011 \\ 000000000 \\ \hline 100010000010 \end{array}$$

deoarece la adunare $1 + 1 = 10$, rămîne 1, $10 + 1 = 11$, $11 + 1 = 100$ rămîne 10, etc.

Să facem şi în acest caz. proba, trecînd la sistemul zecimal. Pentru primul factor avem:

$$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 =$$
$$= 1 + 2 + 0 + 8 + 0 + 32 + 64 + 0 + 256 = 363 \text{ (baza 10)}$$

Pentru al doilea factor:

$$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 0 + 2 + 4 = 6$$

iar pentru produs:

$$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 +$$
$$+ 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{11} = 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 128 +$$
$$+ 0 + 0 + 0 + 2048 = 2178 \text{ (baza 10).}$$

Într-adevăr, $363 \cdot 6 = 2178$.

Analog putem face operaţiile aritmetice în orice sistem de numeraţie cu baza $n < 10$.

Să ne alegem acum, un sistem care are ca bază un număr mai mare decît 10, de exemplu 13.

În acest sistem ne vor trebui 13 cifre, 13 simboluri. Fie ele: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C. În acest caz, vom avea următorul tablou de corespondenţă a numerelor:

Baza sist.	Corespondenţa numerelor									
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
13	B	C	10	11	12	13	14	15	16	17
10	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
13	18	19	1A	1B	1C	26	21	22	23	24

Vom putea alcătui şi în acest sistem tabla înmulţirii. Las aceasta pe seama cititorului, amintind numai că, de exemplu, $5 \cdot 8 = 31$; $7 \cdot 7 = 3\,A\,A$; $B = 86$, etc.

Să facem şi în acest sistem o operaţie aritmetică, de exemplu, să înmulţim numărul $92\,B$ cu $A\,7$. Vom avea:

$$\begin{array}{r} 92B \cdot A7 \\ \hline 7126 \\ 4C6C \\ \hline 761CC \end{array}$$

unde am procedat în felul următor: $A \cdot B = 86$, rămîne 8; $A \cdot 2 = 17$, $17 + 8 = 22$, rămîne 2; $A \cdot 9 = 6\,C$, $6\,C + 2 = 71$, etc.

Să facem de data aceasta, proba în sistemul zecimal:

$$92\,B \text{ (baza 13)} = B\,13^\circ + 2 \cdot 13^1 + 9 \cdot 13^2 = 11 \cdot 1 + 2 \cdot 13 +$$

$$+ 9 \cdot 169 = 1558 \text{ (baza 10)}\ A\,7 \text{ (baza 13)} = 7 \cdot 13^\circ + A \cdot 13^1 =$$

$$= 7 \cdot 1 + 10 \cdot 13 = 137 \text{ (baza 10)}.$$

În sistemul zecimal, $1558 \cdot 137 = 213446$. Va trebui ca 213446 din sistemul zecimal, să fie egal cu $76\,1CC$ în sistemul cu baza 13, adică trebue ca:

$$C \cdot 13^\circ + C \cdot 13^1 + 1 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13^3 + 7 \cdot 13^4 = 213446$$

Într-adevăr,

$$C \cdot 13^\circ + C \cdot 13^1 + 1 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13^3 + 7 \cdot 13^4 = 12 \cdot 13^\circ +$$

$$+ 12 \cdot 13^1 + 1 \cdot 169 + 6 \cdot 2197 + 7 \cdot 22561 = 213446.$$

Din exemplele date, se vede că structura fiecărui sistem este aceeaşi: o bază şi atîtea simboluri (cifre), cîte unităţi conţine baza. Mai departe, observăm că oricare ar fi baza sistemului, operaţiile aritmetice se conduc după aceleaşi reguli.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICI

DREPTE ISOGONALE

DOUĂ drepte se zic isogonale cînd pornesc din vîrful unui unghi şi sînt simetrice faţă de bisectoarea acelui unghi

1 Fie D, D'; E, E' proiecţiile punctelor M şi M' (aparţinînd dreptelor isogonale AM, AM') respectiv pe AB şi AC. Dacă N este simetricul lui M faţă de bisectoarea unghiului A, iar G şi H proiecţiile lui pe laturi, avem:

$$\frac{NH}{NG} = \frac{M'E'}{M'D'} \quad ; \quad NH = MD,\ NG = ME$$

Deci;

$$\frac{MD}{ME} = \frac{M'E'}{M'D'}$$

Se observă imediat că şi reciproca este adevărată.

2. Picioarele celor patru perpendiculare coborîte din M şi M' pe laturile unghiului A sînt conciclice.

În adevăr, putem scrie:

$$\frac{AH}{AE'} = \frac{AG}{AD'} \quad \text{sau} \quad \frac{AD}{AE'} = \frac{AE}{AD'}$$

de unde rezultă că dreptele DE, $D'E'$ sînt antiparalele. Prin urmare, punctele D, E, E', D' sînt pe acelaşi cerc cu centrul în mijlocul segmentului MM'.

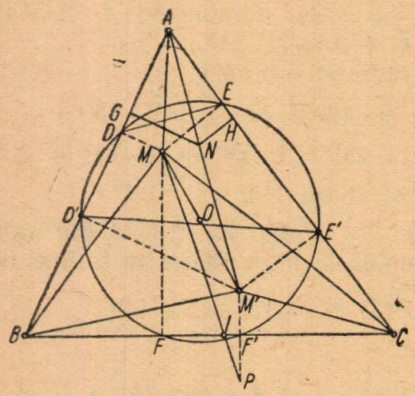


Fig. 1

3. *Dacă într-un triunghi trei ceviene sînt concurente şi isogonalele lor sînt concurente.*

Fie AM', BM' isogonalele dreptelor AM, BM Avem:

$$\frac{MD}{ME} = \frac{M'E'}{M'D'} \text{ şi } \frac{MD}{MF} = \frac{M'F'}{M'D'}.$$

Prin împărţirea acestor două relaţii obţinem: $\frac{MF}{ME} = \frac{M'E'}{M'F'}$ adică dreptele CM, CM' sînt şi ele isogonale.

Punctele M şi M' se numesc invers isogonale sau mai pe scurt, isogonale în raport cu triunghiul ABC.

4. *Proiecţiile a două puncte isogonale pe laturile triunghiului de referinţă sînt şase puncte conciclice.*

Punctele D, E, E', D' sînt pe acelaşi cerc cu centrul în O (mijlocul lui MM'). La fel punctele D, F', F, D' sînt pe un cerc cu centrul în O (F şi F' sînt proiecţiile punctelor M şi M' pe latura BC). Rezultă că punctele D, E, E', F', F, D' sînt pe acelaşi cerc cu centrul în O.

5. Din cele spuse mai sus rezultă următoarele:

a) Simedianele sînt concurente într-un punct (numit punctul lui *Lemoine*). Prin urmare, centrul de greutate şi punctul lui *Lemoine* sînt puncte isogonale.

b) Isogonalul centrului cercului înscris este el însuşi.

c) Înălţimea coborîtă dintr-un vîrf al triunghiului ABC pe latura opusă şi diametrul cercului circumscris ce trece prin acel vîrf sînt drepte isogonale.

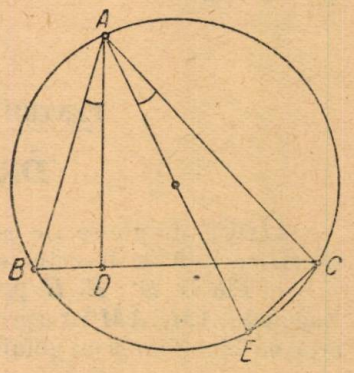


Fig. 2

În adevăr dacă D este piciorul înălţimii coborîtă din A pe BC iar E punctul diametral opus lui A în cercul circumscris, avem (fig. 2):

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC \quad \text{şi prin urmare} \quad \sphericalangle BAD = \sphericalangle CAE.$$

d) Isogonalul ortocentrului unui triunghi este centrul cercului circumscris triunghiului (rezultă din observarea precedentă).

e) Cînd M se confundă cu ortocentrul, M' se confundă cu centrul cercului circumscris iar cercul de la punctul 4, devine cercul lui *Euler*.

f) Se stabilesc uşor, următoarele propoziţii asupra poziţiei relative a două puncte isogonale:

— dacă M se găseşte în interiorul triunghiului de referinţă şi M' se găseşte în interiorul lui;

— dacă M se găseşte în exteriorul triunghiului de referinţă şi M' se găseşte în exteriorul triunghiului.

Unde se găseşte M' cînd M este la infinit?

Să determinăm pe M' ca intersecţia dreptelor AM', BM' isogonalele dreptelor paralele AM şi BM. Avem (fig. 3):

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM' \quad ; \quad \sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM';$$

Însă $\sphericalangle BAM \sphericalangle = ABM$. Rezultă că: $\sphericalangle CAM' = \sphericalangle CBM'$, adică M' se găseşte pe cercul circumscris triunghiului ABC.

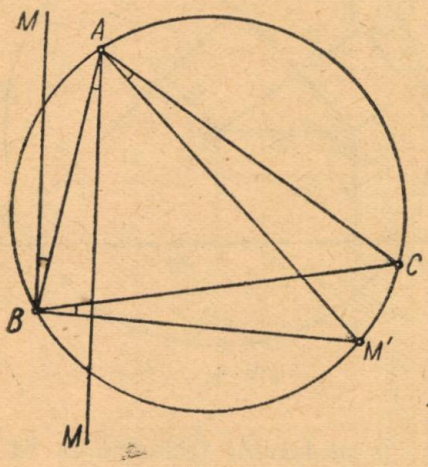


Fig. 3

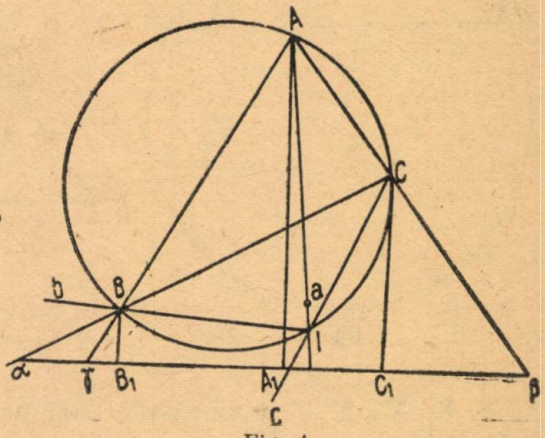


Fig. 4

6. *Aplicaţii a)* O transversală oarecare întîlneşte laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC respectiv în α, β, γ. Se unesc vîrfurile A, B, C respectiv cu centrele a, b, c ale cercurilor circumscrise triunghiurilor $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$. Să se demonstreze că dreptele Aa, Bb, Cc trec prin acelaşi punct I care este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Dreapta Aa şi înălţimea AA_1 a triunghiului $A\beta\gamma$ sînt drepte isogonale. Analog Bb şi înălţimea BB_1 a triunghiului $B\gamma\alpha$, CA şi înălţimea CC_1 a triunghiului $C\alpha\beta$.

Cum dreptele AA_1 BB_1, CC_1 sînt paralele, dreptele Aa, Bb, Cc trec prin acelaşi punct I situat pe cercul circumscris.

b) I fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC, proiecţia pe bisectoarea unghiului A a unui punct arbitrar P al cercului BIC este centrul

cercului circumscris triunghiului podar al punctului P în raport cu triunghiul ABC (triunghiul format de proiecţiile punctului P pe laturi).

Fie P' simetricul lui P faţă de bisectoarea AI. Deoarece P' este pe cercul BIC, avem:

$$\sphericalangle PBI = \sphericalangle P'BI \quad ; \quad \sphericalangle PCI = \sphericalangle P'CI$$

Rezultă că punctele P şi P' sînt isogonale în raport cu triunghiul ABC. Deci proiecţiile punctelor P şi P' pe laturi sînt pe un cerc cu centrul în ω, sau cu alte cuvinte ω este centrul cercului circumscris triunghiului podar al punctului P.

7. Fie M şi M' două puncte isogonale în raport cu triunghiul ABC, iar

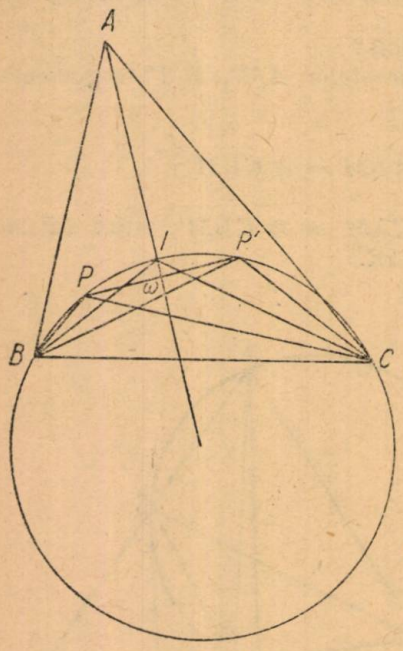


Fig. 5

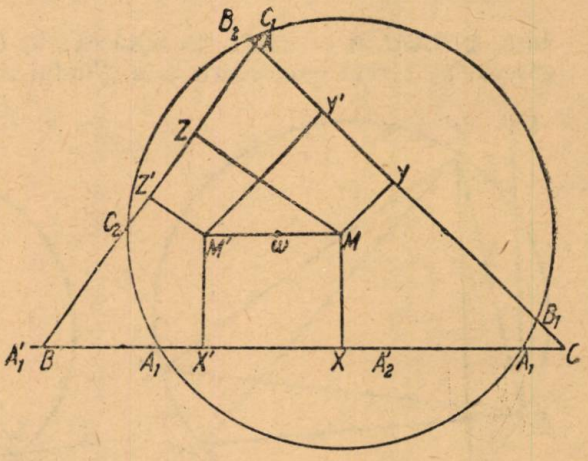


Fig. 6

X, Y, Z; X', Y' Z' proiecţiile acestor puncte pe laturile triunghiului. Să se arate că:

a) dacă din punctele X, Y, Z ca centre descriem cercuri care trec, prin, punctul M' ele taie respectiv laturile BC, CA, AB în punctele A_1 A_2 B_1 B_2, C_1, C_2, care se află pe acelaşi cerc cu centrul în M.

b) Dacă din punctele X_1 Y_1 Z_1 ca centre, descriem cercuri care trec prin punctul M ele taie laturile corespunzătoare BC, CA, BA în punctele A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 C'_1 C'_2 care se află pe acelaşi cerc cu centrul în M' şi egal cu precedentul. Se observă că (fig. 6):

$$MA_1^2 = XM^2 + XA_1^2 = XM^2 + XM_1'^2$$

Aplicînd teorema medianei în triunghiul XMM'_1 avem:

$$XM^2 + XM_1'^2 = 2X\omega^2 + \frac{MM'^2}{2}$$

Deci:

$$MA_1^2 = 2X\omega^2 + \frac{MM'^2}{2}.$$ Însă: $X\omega = Y\omega = Z\omega$

Prin urmare:

$$MA_1 = MA_2 = AB_1 = MB_2 = MC_1 = MC_2$$

Pentru punctul *b)* observăm că:

$$M'A_1'^2 = X'M^2 + X'M'^2 = 2X'\omega^2 + \frac{MM'^2}{2}$$ şi că $X'O = Y'O = Z'O = XO = \ldots$

8. Fie ABC un triunghi oarecare iar (C) o curbă în planul triunghiului Curba trasată de isogonalul unui punct care se mişcă pe curba (C) este *transformata isogonală a curbei* (C).

În transformarea isogonală un cerc care trece prin două vîrfuri ale triunghiului de referinţă se transformă într-un alt cerc care trece prin aceste două vîrfuri.

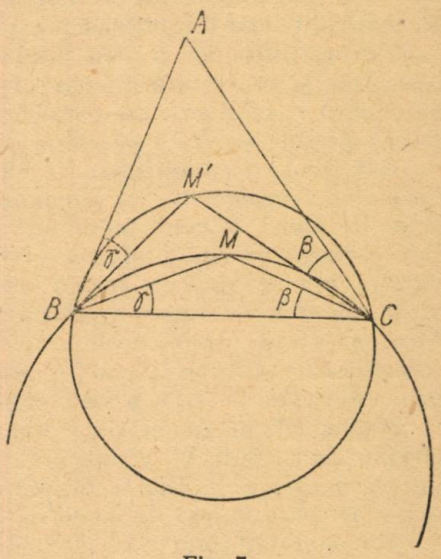


Fig. 7

Din fig. 7 observăm că $\widehat{M} = \pi - \beta - \gamma$; $\widehat{M'} = \pi - (B - \gamma) - (C - \beta) = A + \beta + \gamma$ de unde $M + M' = \pi + A$.

Prin urmare, dacă M descrie un cerc BMC şi M' descrie un cerc $BM'C$.

Florin Constantinescu
Elev cl. X-a L. b. Nr. 3, Cluj.

DIN EXPERIENŢA CERCURILOR DE MATEMATICI ALE ELEVILOR CLASELOR V-VII DIN ŞCOALA SOVIETICĂ

Prof. I. VAIS

de la Institutul de perfecţionare a cadrelor didactice

O DEOSEBITĂ atenţie se acordă în şcoala sovietică activităţii în afara orelor de clasă la matematică. Importanţa acestei activităţi constă în aceea că ea oferă largi posibilităţi pentru adîncirea muncii de educare ideologico-politică, pentru trezirea şi dezvoltarea interesului pentru matematică, pentru lărgirea orizontului ştiinţific al elevilor, pentru formarea deprinderii de a studia individual, etc. Ea îmbracă diferite forme vii şi atractive. Una din aceste forme o constituie «cercurile de matematică».

Cercurile sînt create pe baza intereselor comune ale unui anumit grup de elevi şi au menirea să satisfacă cerinţele acestora. Satisfacerea cerinţelor

elevilor nu se face însă la voia întîmplării ci se urmăreşte dezvoltarea intereselor şi iniţiativei elevilor într-o anumită direcţie, într-un anumit sistem pedagogic.

Cercurile din şcolile de şapte ani, cuprind de obicei numai pe elevii claselor VI—VII. Sînt cercuri care primesc şi pe elevii clasei a V-a. Unele îi primesc pe cei mai buni chiar din primele zile, altele după prima jumătate a anului şcolar, cînd cunoştinţele lor le dau posibilitatea rezolvării unor probleme care să intereseze şi pe cei din clasele VI—VII. Acolo, unde condiţiile sînt favorabile, adică în şcoli cu clase paralele şi cu doi profesori de matematică, se formează cercuri separate pe clase, pentru elevii claselor VI—VII.

Dat fiind că cunoştinţele de algebră şi geometrie ale elevilor din aceste clase sînt neînsemnate, iar ei cunosc aritmetica aproape în întregime, activitatea în cercuri se compune în special, din rezolvarea problemelor de aritmetică. Acestea nu sînt probleme obişnuite, din acelea care sînt de obicei rezolvate în orele de clasă, ci conţin unele dificultăţi care necesită, pentru a fi învinse, un efort mai mare de gîndire. Nu trebuie însă să se exagereze, iar problemele care se propun trebuie să fie totuşi accesibile majorităţii membrilor cercului. Eforturile pe care le fac elevii sînt din plin răsplătite după cîtva timp, prin abilitatea pe care o dobîndesc în rezolvarea problemelor mai dificile.

Problemele de geometrie se abordează în cercuri, atunci cînd cunoştinţele elevilor de clasa a VI-a sînt suficiente pentru ca problemele să prezinte interes pentru toţi. Ele se propun chiar de la începutul activităţii, în cercurile formate numai din elevi de clasa a VII-a.

Un deosebit interes îl manifestă participanţii la activitatea cercurilor pentru elementul distractiv (probleme distractive, jocuri matematice, enigme, etc), pentru găsirea de procedee variate pentru rezolvarea problemelor şi pentru căutarea de «noi» demonstraţii pentru rezolvarea teoremelor învăţate.

In articolele ce se publică în legătură cu activitatea cercurilor de matematică, putem găsi multe exemple care ilustrează această preocupare a elevilor, precum şi rezultatele obţinute de ei.

Astfel, profesorul H. P. Poleacov descrie o lucrare a unei eleve de clasa a VII-a care pe baza observaţiilor făcute asupra numerelor a stabilit o metodă de a calcula pătratele primelor numere prin sumări succesive.

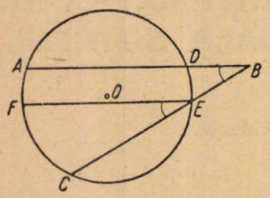


Fig. 1

Profesorul V. G. Razumov vorbind despre experienţa muncii cercului de matematică pentru elevii clasei a VII-a, pe care-l conduce, citează un elev care a propus pentru teorema cu privire la măsura unui unghi cu vîrful în afara cercului o altă demonstraţie decît cea din manual.

Iată această demonstraţie:

Se dau secantele AD şi CE care se intersectază în punctul B (fig. 1). Se cere să se demonstreze că unghiul ABC are ca măsură jumătatea diferenţei măsurilor arcelor AC şi DE cuprinse între laturile sale.

Demonstraţie. — Ducînd dreapta EF paralelă cu AD se obţine unghiul înscris FEC care are ca măsură jumătatea măsurii arcului FC. Arcul FC este egal cu diferenţa între arcele AC şi AF. Cum arcul AF este egal cu arcul DE, ca arce cuprinse între coarde paralele, se poate scrie egalitatea: $\overset{\smile}{FC} = \overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{DE}$.

Unghiul FEC este egal cu unghiul ABC, ca unghiuri corespondente şi deci măs. $\widehat{B}$ = măs. $\widehat{FEC} = \frac{1}{2}$ măs. $\overset{\smile}{FC} = \frac{1}{2}$(măs. $\overset{\smile}{AC}$ − măs. $\overset{\smile}{DE}$).

Această demonstraţie a stîrnit un deosebit interes în rîndul membrilor cercului care au căutat şi au găsit — folosind procedeul de mai sus — alte domonstraţii pentru teoremele relative la măsura unghiului format de o secantă şi o tangentă (fig. 2) şi a unghiului format de două tangente (fig. 3).

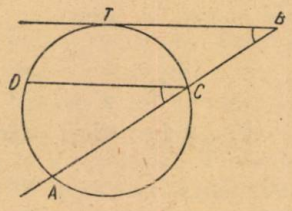


Fig. 2

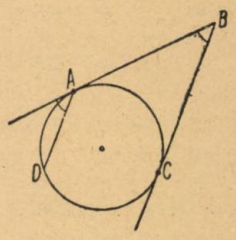


Fig. 3

După ce profesorul a explicat în clasă cum se construieşte pe un segment de dreaptă dat un arc capabil de un unghi dat, elevii au declarat că trebuie să se găsească o rezolvare mai simplă a acestei probleme. Ei au găsit următoarele două noi procedee:

I. Se construeşte un unghi egal cu unghiul dat (fig. 4). Printr-un punct arbitrar B luat pe una din laturi, se duce o dreaptă care să formeze cu aceea un unghi mai mare decît cel dat. Pe această dreaptă se ia un segment BC egal cu segmentul dat. Prin punctul C se duce o dreaptă paralelă cu cealaltă latură a unghiului şi se obţine punctul A_1. Se construieşte cercul ce trece prin A_1, B şi C. Arcul BA_1C este arcul căutat.

II. Se construeşte un unghi egal cu unghiul dat (fig. 5).

Pe una din laturi se ia un punct B astfel încît un arc de cerc de rază

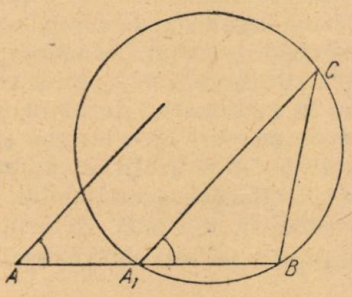


Fig. 4

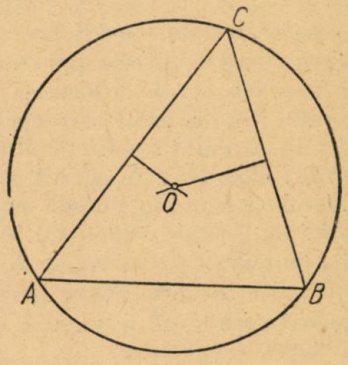


Fig. 5

cît segmentul dat şi avînd centrul în B să poată întîlni cealaltă latură a unghiului. Se obţine astfel punctul C. Se construieşte cercul ce trece prin A, B şi C. Arcul BAC este arcul căutat.

Recrutarea elevilor la cerc şi organizarea cercului nu se face după un şablon. Fiecare profesor conducător de cerc se străduieşte să găsească cele mai eficace mijloace pentru a atrage pe elevi la cerc precum şi forma oganizatorică cea mai potrivită pentru ca cercul să-şi trăiască viaţa cu adevărat.

Conducătorul cercului de matematică de la şcoala de 7 ani din Pervomaisc, M.N. Goliado, împărtăşind experienţa şcolii nr. 110 din Mscova a pus la baza organizării cercului structura asociaţiei de elevi.

La începutul anului şcolar, a ales o comisie de organizare dintre foştii membri ai cercului şi cu ajutorul lor a publicat în ziarul cercului « Evrica » o serie de probleme indicînd numărul punctelor atribuite pentru fiecare problemă rezolvată. S-a anunţat că vor fi înscrişi ca membri ai cercului acei elevi care vor obţine un număr mai mare de puncte.

Faptul că există un oarecare obstacol pentru primirea în cerc i-a antrenat pe elevi în a se întrece pentru obţinerea celui mai mare număr de puncte. Acest sistem de recrutare a membrilor a permis alegerea celor mai buni elevi şi cu cea mai mare iniţiativă. Au fost aleşi datorită rezultatelor o bţinute 30 membri permanenţi dintre elevii claselor a VI-a şi a VII-a. La prima şedinţă, a fost ales un consiliu de conducere în număr de 5 format din: preşedinte (profesorul), vice-preşedinte, secretar, redactor al ziarului şi bibliotecar; s-a adoptat regulamentul de funcţionare, denumirea cercului şi a fost elaborat un plan de muncă pe primul semestru.

In ziarul « Pionierscaia Pravda » membrii cercului au scris următoarele: « Cercul nostru se numeşte « Cheia de aur ». L-am numit astfel pentru că este un cerc matematic. Matematica este doar cheia fără de care nu poţi deschide porţile spre a pătrunde în fizică, chimie, în tehnică ».

În regulament, au fost definite sarcinile cercului, structura lui organizatorică, drepturile şi îndatoririle membrilor. Sarcinile principale ale cercului sînt: îmbogăţirea cunoştinţelor elevilor în domeniul matematicii, desvlotarea gîndirii matematice şi a interesului pentu studiul matematicii, cunoaşterea istoriei matematicii, a vieţii şi activităţii matematicienilor renumiţi (în special ruşi), dezvoltarea deprinderilor pentru munca ceatorare de sine stătătoare, confecţionarea de material demonstrativ în legătură cu matematica şi executarea de lucrări practice.

Fiecare membru al cercului este dator să practicipe activ la şedinţele cercului şi la concursul de rezolvare de probleme organizat de cerc şi să confecţioneze material demonstrativ necesar şedinţelor cercului. Adunarea generală a membrilor cercului are dreptul să excludă pe membrii nedemni şi să admită noi membri care s-au remarcat în munca la matematică în afara orelor de clasă. Membrii cercului posedă un carnet de membru şi o insignă şi plătesc o cotizaţie de 2 ruble anual. Cu banii rezultaţi din cotizaţii se cumpără cărţi ştiinţifico-populare şi material necesar confecţionării materialului demonstrativ. O astfel de organizare permite cercului să cuprindă elemente bune, iar popularizarea largă a muncii cercului printre ceilalţi elevi ai şcolii atrage în cerc masa amatorilor.

Şedinţele cercului se ţineau săptămînal şi într-o zi anumită. Unele şedinţe erau restrînse, cu participarea numai a membrilor, iar altele lărgite, la care erau invitaţi toţi doritorii. Deseori se adunau astfel 60—80 de elevi. La şedinţele restrînse, membrii cercului aveau ocazia să cunoască diferite şarade şi trucuri matematice, rezolvarea originală a unor probleme, jocuri matematice. Răspîndind aceste cunoştinţe în rîndurile elevilor, membri ai cercului, ei căpătau în ochii acestora o superioritate pe care mulţi o jinduiau. Interesul elevilor pentru cerc era stimulat şi în felul acesta, căci s-a observat că mulţi elevi n-au putut fi atraşi decît atunci cînd cunoşteau conţinutul muncii.

Să arătăm acum cîte ceva din conţinutul muncii acestui cerc.

Deoarece la vîrsta lor elevii cl. V—VII sînt atraşi într-o măsură mai mare de elementul distractiv, aproximativ jumătate din numărul şedinţelor cercului au fost consacrate rezolvării problemelor distractive şi căutării de soluţii originale. Textul problemelor era adus la cunoştinţa membrilor şi altor elevi ai şcolii fie prin «Evrica», fie că se publicau la şedinţele cercului. La sfîrşitul şedinţei, conducătorul cercului anunţa problema şi propunea să se rezolve pentru şedinţa următoare. Fiecare problemă avea un titlu pentru ca membrii cercului să se poată orienta uşor.

Iată cîteva exemple de probleme propuse şi de soluţii originale date de elevi. *Peste cîte minute.*

De acasă pînă la şcoală fac 30 minute, iar fratele meu 40 minute. Peste cîte minute îl ajung pe fratele meu dacă el pleacă de acasă cu 5 minute înaintea mea?

Majoritatea membrilor cercului au dat soluţia următoare: (aceiaşi soluţie a fost dată de membrii cercului şi elevii claselor V—VI ai şcolii nr. 206 din Moscova):

Considerăm distanţa de acasă pînă la şcoală drept unitate.

Rezolvare. — Aflăm a cîta parte din distanţa de acasă pînă la şcoală parcurg într-un minut

$$1 : 30 = \frac{1}{30}$$

Aflăm a cîta parte din distanţă parcurge fratele meu într-un minut:

$$1 : 40 = \frac{1}{40}$$

Aflăm a cîta parte din întreaga distanţă reprezintă diferenţa vitezelor noastre;

$$\frac{1}{30} - \frac{1}{40} = \frac{1}{120}$$

Aflăm a cîta parte din drum parcurge fratele meu în 5 minute:

$$\frac{1}{40} \times 5 = \frac{1}{8}$$

Aflăm peste cîte minute îl voi ajunge pe fratele meu:

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{120} = 15 \text{ (minute)}$$

După ce a fost prezentată această soluţie cineva comunică că elevul M. a găsit o altă soluţie. Acesta se ridică şi face următorul raţionament:

Timpul în care fratele meu parcurge întreaga distanţă este cu 10 minute mai mare decît cel folosit de mine. El pleacă însă de acasă cu 5 minute înaintea mea şi de aceea vine la şcoală cu 5 minute mai tîrziu decît mine. Prin urmare eu îl ajung pe fratele meu la jumătatea drumului, adică după 15 minute.

Dupăce elevul M. a terminat, în sală s-a făcut tăcere — toţi participanţii se gîndeau la soluţia prezentată. După cîtva timp, pe feţele lor apar zîmbete largi care exprimă admiraţie:

— Uite, ce simplu e ! Cum de nu ne-am gîndit şi noi la aceasta?

La aceeaşi şedinţă, conducătorul a propus 2—3 probleme asemănătoare. A doua zi, mulţi dintre membrii cercului au propus problema tovarăşilor care n-au fost la şedinţă, şi le-a arătat cît de simplu a rezolvat-o colegul lor. Astfel, pînă la sfîrşitul zilei aproape toţi elevii şcolii şi chiar unii dintre părinţii lor au cunoscut problema şi rezolvarea ei originală.

Astfel de soluţii s-au dovedit a nu fi de puterea tuturor elevilor. Chiar membrii cercului, elevi în clasa a VII—a, n-au rezolvat problema de mai sus pe această cale scurtă. Aceasta nu trebuie să ne mire prea mult, deoarece elevii sînt obişnuiţi ca în probleme să predomine calculele şi înainte de a le rezolva ei caută să stabilească tipul respectiv cunoscut. In soluţia elevului M., calculele sînt reduse la minimum şi predomină raţionamentul logic.

Totuşi elevii nu s-au speriat de acest lucru şi au cerut să li se propună mai des astfel de probleme. Ei au mărturisit că în tot timpul liber s-au gîndit la rezolvarea problemelor asemănătoare celor propuse.

Uneori membrii cercului dădeau soluţii care constituiau surprize chiar pentru conducător. Un astfel de exemplu îl constituie problema «De la Gomel la Briansc».

In fiecare zi, la ora 4 dimineaţa pleacă din Gomel un marfar care întîlneşte la orele 5 seara în Briansc trenul de pasageri ce vine de la Moscova şi care soseşte la Gomel la orele 11 şi 30 minute. Odată, marfarul a plecat de la Gomel cu o oră mai tîrziu şi întîlnirea cu trenul din Moscova a avut loc la 16 km de Briansc. Să se afle distanţa de la Gomel la Briansc.

Eleva S din clasa a VII—a a dat următoarea soluţie:

Marfarul parcurge distanţa Gomel-Briansc în 13 ore, iar trenul de pasageri parcurge aceeaşi distanţă în 6 ore şi 30 minute. Prin urmare, trenul de pasageri merge de 2 ori mai repede decît marfarul. In ziua întîrzierii marfarului, trenul de pasageri era la Briansc la orele 5 seara, iar marfarul la o distanţă de o oră de drum pînă la Briansc. Această distanţă a fost parcursă de ambele trenuri care veneau în sens opus şi anume, trenul de pasageri a parcurs 2/3 din acest drum (sau 16 km), iar marfarul 1/3. Reiese că viteza marfarului este de $16 + 8 = 24$ km/oră, iar distanţa căutată de $24 \cdot 13 = 312$ km.

La şedinţele cercului s-au propus probleme scurte de felul următor:

1. O cărămidă cîntăreşte 1 kg şi jumătate de cărămidă. Cît cîntăreşte cărămida?

2. O carte cu coperte cartonate costă 7 ruble şi 50 copeici, cartea costînd cu 7 ruble mai mult decît copertele. Cît costă copertele?

3. Doi elevi locuiesc într-o clădire cu mai multe etaje: Vania la etajul I, iar Petia la al V-lea. De cîte ori înălţimea locuinţei lui Petia este mai mare decît înălţimea locuinţei lui Vania?

4. In 5 ore, 5 muncitori sapă 5 m de şanţ. De cîţi săpători este nevoie pentru a săpa 100 m şanţ în 100 ore?

De obicei elevii dădeau la început răspunsuri greşite. Dar răbdarea conducătorului a dat posibilitatea fiecăruia să-şi exprime părerea şi să ajungă singur la răspunsul just.

In afara problemelor de aritmetică, la şedinţe s-au propus probleme de algebră şi de geometrie. S-a remarcat faptul că pentru unele probleme de

geometrie, de demonstraţie sau de construcţie, elevii au găsit pînă la 5 procedee variate de rezolvare.

De asemenea s-au căutat noi demonstraţii ale teoremelor studiate la lecţii. Astfel s-a găsit demonstrarea criteriului al treilea de egalitate al triunghiurilor prin metoda suprapunerii, demonstrarea teoremei despre suma unghiurilor unui triunghi prin ducerea unei paralele la latura opusă printr-un vîrf al său, noi demonstraţii ale teoremelor despre linia mijlocie în triunghi şi trapez, etc.

La şedinţele restrînse, la care au dreptul să participe numai membrii cercului, după cum am văzut, au fost analizate jocuri matematice, trucuri şi sofisme. Iată cîteva asemenea exemple:

1. Conducătorul şedinţei propune următoarele:

— Gîndiţi-vă fiecare la un număr oarecare de trei cifre astfel încît cifra sutelor să fie diferită de cifra unităţilor. Scriţi numărul răsturnat (cu cifrele în ordine inversă) şi aflaţi diferenţa dintre ele (din numărul mai mare scădeţi pe cel mai mic). Scriţi din nou numărul răsturnat al acestei diferenţe şi adunaţi ultimele două numere.

Profesorul anunţă că va ghici rezultatul fiecăruia.

După ce elevii au anunţat că au terminat calculele, conducătorul şedinţei a dat fiecăruia cîte o bucăţică de hîrtie pe care era scris rezultatul. Elevii şi-au dat seama curînd că nu e vorba de nici o ghicitoare deoarece se obţine întotdeauna unul şi acelaşi număr 1089. Ei n-au putut însă explica de ce se obţine întotdeauna acest rezultat.

2. Conducătorul şedinţei propune să se scrie un număr de mai multe cifre şi el asigură că va adăuga repede acelui număr o cifră la stînga sau la dreapta astfel încît noul număr să fie divizibil cu 11. De pildă, va adăuga la dreapta numărului 273683 cifra 3 sau la stînga cifra 8. « Secretul » acestui truc este bazat pe criteriul de divizibilitate cu 11.

3. *Un băiat ingenios.* — Un băiat a cumpărat într-o librărie 6 peniţe, cîteva caiete a cîte 30 copeici şi 3 creioane. Vînzătorul i-a dat un bon de plată pentru suma de 2 ruble şi 20 copeici.

— Aţi greşit, îi spune băiatul îndată ce-şi aruncă ochii pe bon.

Vînzătorul deşi surprins că băiatul a putut remarca greşala fără a face socoteala banilor, a refăcut totuşi socoteala şi s-a convins că băiatul a avut dreptate. Cum a putut băiatul să-şi dea seama de greşală?

Tot în cadrul activităţii cercului, elevii au arătat în referate scurte rolul excepţional al savanţilor ruşi, în special al savanţilor sovietici, în dezvoltarea matematicii.

M.N.Golaido arată în articolul său că munca cercului a contribuit într-o mare măsură la dezvoltarea interesului pentru studiul matematicii nu numai la membrii cercurilor ci şi la ceilalţi elevi ai şcolii şi la îmbunătăţirea situaţiei la învăţătură la matematică. Membrii cercului au arătat în unanimitate, că şedinţele cercului i-au ajutat să stăpînească mai bine matematica.

Astfel elevul D. din clasa a VII—a, a scris:

« La şedinţele cercului ni s-au propus probleme interesante a căror rezolvare ne-a îngăduit să se ne însuşim mai bine matematica. Multe dintre acestea au putut fi rezolvate fără să mai punem mîna pe hîrtie şi creion şi ţineam minte timp îndelungat metoda de rezolvare. M-am străduit să rezolv toate problemele popuse la concurs. Aceasta m-a învăţat să fiu perseverent ».

Rezultatele examenelor au arătat îmbunătățirea situației elevilor la învățătură; peste 3/4 din elevii clasei a VII—a au obținut nota «bine» și «foarte bine» dînd dovadă de cunoștințe profunde și temeinice la algebră și geometrie.

Elevii au luat cunoștință de unele probleme din istoria dezvoltării matematicii și de renumiții matematicieni ruși: N. I. Lobacevski, S. V. Kovalevscaia, P.L.Cebîșev, I.M.Vinogradov, L.S.Pontreaghin.

Ei au contribuit prin eforturile lor la confecționarea de material demonstrativ: grafice, figuri geometrice și tabele cu formule și de clasificare a figurilor geometrice.

Membrii cercului au făcut propuneri prețioase pentru îmbunătățirea muncii cercului și și-au exprimat dorința ca cercul să-și continue activitatea.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ȘI APARATE DE FIZICĂ

PLUTITORUL DESCARTES

Prof. N. RĂDULESCU
Liceul nr. 1, București

SE știe că un corp se cufundă într-un lichid, plutește în interiorul apei sau plutește la suprafață, după cum densitatea sa este mai mare, egală sau mai mică decît a lichidului. Toate aceste trei cazuri se pot demonstra expermental cu plutitorul lui Descartes.

Experiența lui Descartes se poate realiza în modul cel mai simplu cu ajutorul unei eprubete obișnuite, dar reușita ei este condiționată de o anumită cantitate de apă pe care o vom pune de la început în eprubetă.

Se pune într-o eprubetă circa 3/4 din ea apă și se introduce într-un cilindru de sticlă plin cu apă (fig. 1), astfel ca ea să plutească în apa din cilindru. Cu ajutorul unei pipete se adaugă, sau eventual se scoate din eprubetă, atîta apă pînă ce ea plutește cu buza sa superioară aproape tangent la suprafața apei din cilindru. Ne alegem un cilindru al cărui diametru la gură să fie cît mai mic astfel ca să-l putem acoperi cu podul palmei noastre. Se scoate eprubeta atent din apă, se astupă cu degetul arătător de la mîna dreaptă și astfel astupată o introducem cu gura în jos în apa din același cilindru (fig. 2). Cilindrul trebuie să fie umplut complet cu apă. Fundul eprubetei este acum aproape tangent la suprafața apei din cilindru iar în eprubetă este închis un volum de aer. Se acoperă etanș gura cilindrului cu palma mîinii drepte fără ca sub palmă să fie aer și se apasă pe suprafața apei. În urma apăsării pe suprafața apei vom observa că volumul de aer scade deoarece în eprubetă a intrat o cantitate de apă peste cea introdusă de noi inițial (conform legii Pascal), iar eprubeta începe să se

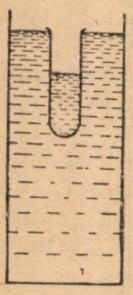


Fig. 1

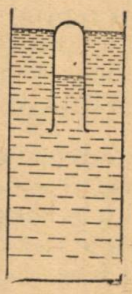


Fig. 2

cufunde. Apăsînd convenabil pe suprafaţa apei din cilindru putem face ca eprubeta să plutească în interiorul apei, să se ducă la fund sau să revină spre suprafaţa apei din cilindru.

Plutitorul lui Descartes morişcă hidraulică

Ne procurăm o eprubetă cît mai largă la gură, cu pereţii groşi şi un dop de plută cît se poate de bun, pe care prin pilire, îl facem să astupe eprubeta cît se poate de etanş. Cu un perforator de dopuri sau cu un cui înroşit în foc, facem în dop două canale pe lungimea dopului în care introducem două tuburi de sticlă efilate după cum se vede în figura 3. Punem în eprubetă atîta apă încît montîndu-i dopul cu cele două tuburi de sticlă în el, să plutească în cilindrul cu apă cu fundul aproape tangent la suprafaţa apei din cilindru (fig. 3). Părţiie efilate ale celor două tuburi le îndreptăm în sens opus şi acoperim dopul cu o grăsime consistentă pentru a asigura cît mai perfect etanşeitatea dopului bine fixat în gîtul eprubetei.

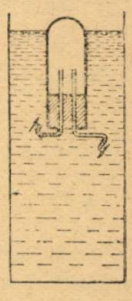


Fig. 3

Apăsînd cu palma pe suprafaţa apei din cilindru ca şi în primul caz, plutitorul coboară; slăbind presiunea pe suprafaţa apei din cilindru, el se ridică rotindu-se în jurul său. La apăsarea pe suprafaţa apei din cilindru în eprubetă pătrunde o cantitate de apă peste cea introdusă de noi iniţial, iar la slăbirea presiunei pe suprafaţa apei din cilindru, această cantitate de apă iese afară ţîşnind în sensuri opuse şi realizînd astfel, un cuplu de forţe, care are ca efect rotirea eprubetei.

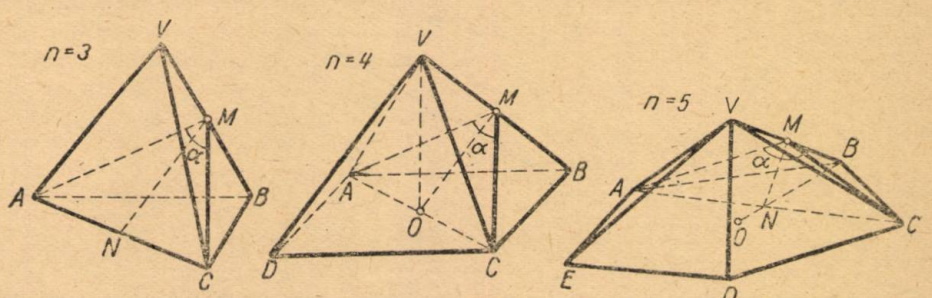
PROBLEME REZOLVATE

Problema 943

Suma muchiilor laterale ale unei piramide regulate este egală cu perimetrul bazei. Să se găsească valoarea unghiurilor diedre formate de două feţe laterale ale piramidei.

L. Lopovoc

Soluţie. Din enunţ rezultă că toate feţele piramidei sînt triunghiuri echilaterale egale. De aci rezultă că numărul feţelor piramidei va fi cel mult egal cu 5, întrucît suma feţelor



unui poliedru convex este mai mică decît patru unghiuri drepte. Unghiul cerut α va fi dat de (vezi figura); $AM \perp BV, MC \perp BV$;

$$\cos \alpha = \frac{2\,\overline{MC}^2 - \overline{AC}^2}{2\,\overline{MC}^2}.$$

Insă $\overline{AC} = 2R\sin\frac{2\pi}{n}$, $\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2R\sin\frac{\pi}{n} = \sqrt{3}\,R\sin\frac{\pi}{n}$. R fiind raza cercului circumscris poligonului de bază iar n numărul feţelor.

Rezultă:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{8\cos^2\frac{\pi}{n}}{3}$$

pentru $n = 3$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\alpha = 70°31'43'',6$

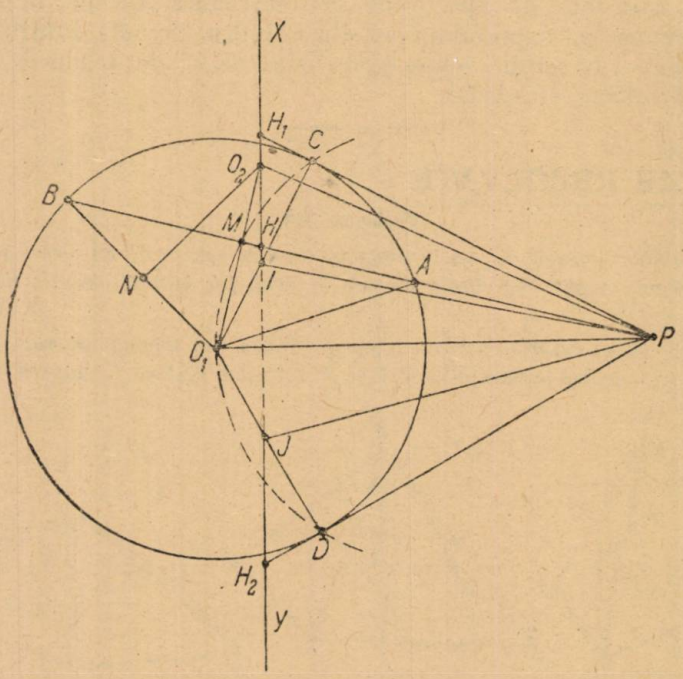
pentru $n = 4$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; $\alpha = 109°28'16'',4$

pentru $n = 5$; $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\alpha = 138°11'22',75$.

Problema 1008

Se dă cercul (O_1) şi punctul fix P. O secantă variabilă ce trece prin P, intersectează cercul în punctele A şi B. Fie O_2 centrul cercului AO_1B. Să se găsească locul geometric al ortocentrului H al triunghiului PO_1O_2.

Mihai I. Popescu



Soluţia I-a. Fie M şi N *respectiv mijloacele segmentelor* AB şi O_1B. Patrulaterul BO_2MN fiind inscriptibil ($\sphericalangle BNO_2 = \sphericalangle BMO_2 = 90°$), deducem:

$$\overline{O_1M}\cdot\overline{O_1O_2} = \overline{O_1N}\cdot\overline{O_1B} = \frac{1}{2}R^2 = \text{constant}$$

unde am notat cu R, raza cercului (O_1).

Deosebim cazurile:

1°. Punctul P este interior cercului (O_1) sau pe cerc. In acest caz, punctul M va descrie cercul (ω) de diametru O_1P. Deci, locul geometric al punctului O_2 va fi figura inversă cercului (ω), adică o dreaptă (Δ) perpendiculară pe O_1P. De aici se deduce că locul lui H este dreapta (Δ).

2°. Punctul P este în interiorul cercului (O_1). In cazul acesta locul lui M va fi arcul CO_1D al cercului de diametru O_1P.

Punctul O_2 va descrie figura inversă arcului CO_1D compusă din semidreptele IX şi JY, I şi J fiind mijloacele razelor O_1C şi O_1D. De aici se deduce că locul lui H este segmentul H_1H_2, unde am notat cu H_1 şi H_2 ortocentrele triunghiurilor O_1IP şi O_1JP.

Soluţia II-a. Punctul P găsindu-se pe axul radical al cercurilor (O_1) şi (O_2), rezultă:

$$\overline{PO_1}^2 - \overline{PO_1}^2 = O_1O_2^2 = O_1A^2, \text{ de unde:}$$

$$\overline{PO_2}^2 - O_1O_2^2 = \overline{PO_1}^2 - O_1A^2$$

Ţinînd seama că:

$$\overline{PO_1}^2 - O_1O_2^2 = \overline{HP}^2 - \overline{HO_1}^2, \text{ deducem:}$$

$$\overline{HP}^2 - \overline{HO_1}^2 = \overline{PO_1}^2 - \overline{O_1A}^2 = \text{constant}$$

Avînd în vedere că locul geometric al punctelor care păstrează constantă diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta determinată de punctele fixe considerate, regăsim rezultatele dela soluţia I-a.

Problema 1036

Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{(x+6)^5 + (x-12)^5}{(x-2)^5 + (x-4)^5} = 2101.$$

Marius Iosifescu

Soluţie. Dezvoltînd parantezele se obţine o ecuaţie de gr, V. Un artificiu de calcul ne permite să reducem ecuaţia din enunţ la o ecuaţie bipatrată. Notăm $x = y + 3$. Ecuaţia ia forma

$$\frac{(y+9)^5 + (y-9)^5}{(y+1)^5 + (y-1)^5} = 2101.$$

Dezvoltînd parantezele avem $y = 0$ şi

$$21y^4 + 202y^2 - 223 = 0$$

cu rădăcinile ± 1, $\pm 3{,}258\,i$.

Prin urmare $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_{4,5} = 3 \pm 3{,}258\,i$.

Problema 1055

1°. *Să se arate că există un triunghi ABC ale cărui laturi să fie exprimate prin numerele:*

$$a = m\sqrt{1+n^2} \; ; \quad b = n\sqrt{1+m^2} \; ; \quad c = m + n$$

unde m şi n sînt numere reale şi pozitive.

2°. *De asemenea există un triunghi $A_1B_1C_1$ cu laturile*

$$a_1 = m(1+n^2) \; ; \quad b_1 = n(1+m^2) \; ; \quad c_1 = (m+n)(1-mn)$$

unde m şi n sînt numere pozitive şi $mn < 1$.

C. Ionescu-Ţiu

Soluție. 1°. Avem evident $a + b > c$. Rămîne să demonstrăm că $a + > b$ și $b + c > a$. Notăm $m = \operatorname{tg}\alpha$, $n = \operatorname{tg}\beta$; $\left(o' < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Inegalitatea $a + c > b$ se scrie:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta > \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$$

sau

$$\sin\alpha + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta > \sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) > \sin\beta - \sin\alpha; \text{ simplificînd cu } 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

obținem:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) > \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha), \text{ care este evidentă.}$$

Inegalitatea $b + c >$ a se reduce de asemenea la inegalitatea evidentă:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) > \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

2°. Și în acest caz $a_1 + b_1 > c_1$. Cu aceiași notație ca mai sus inegalitatea $a_1 + c_1 > b_1$ se scrie:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\beta} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) > \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos^2\alpha}$$

sau

$$\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) > 0;$$

deci

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) > 0$$

Inegalitatea $b_1 + c_1 > a_1$ se reduce la

$$\sin(\beta - \alpha) + \sin(\alpha + \beta) > 0$$

Ultimele două inegalități trigonometrice sînt evidente.

S-au primit și soluții algebrice, ceva mai lungi.

Problema 1059

Să se arate că între razele R_1, R_2, R_3, R_4, ale sferelor exînscrise unei piramide triunghiulare și raza R a sferei înscrise piramidei există relația:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{2}{R}.$$

I. Codreanu, elev, Buzău

Soluție dată de elevul *Marius Iosifescu*. Fie S_1, S_2, S_3, S_4 ariile fețelor piramidei cărora le corespund respectiv sferele exînscrise de raze R_1, R_2, R_3, R_4. Fie V volumul piramidei. Vom avea:

$$V = \frac{1}{3}R(S_1 + S_2 + S_4 + S_4)$$

$$V = \frac{1}{3}R_1(-S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$

$$V = \frac{1}{3}R_2(S_1 - S_2 + S_3 + S_4)$$

$$V = \frac{1}{3}R_3(S_1 + S_2 - S_3 + S_4)$$

$$V = \frac{1}{3}R_4(iS_1 + S_2 + S_3 - S_4.)$$

Eliminînd între aceste relații pe S_1, S_2, S_3, S_4 și V obținem relația din enunț.

Problema 1058

Fie A, B şi C trei puncte aşezate pe o dreaptă în ordinea dată. Notăm $\frac{AB}{BC} = K$ *şi cu D şi E mijloacele segmentelor AB şi BC. Fie M şi N punctele de contact ale tangentei comune cercurilor de diametre AD şi DC şi P şi Q punctele de contact ale tangentei cercurilor de diametre AE şi EC. Să se arate că*

$$\frac{MN^2}{PQ^2} = \frac{K(K+2)}{2K+1}.$$

Ion N. Cristea, elev, Constanţa

Soluţie. Conform unei teoreme cunoscute avem:

$$MN^2 = AD \cdot DC$$

$$PQ^2 = AE \cdot AC.$$

Ţinînd seamă că $AD = \frac{AB}{2} = \frac{K}{2} BC$ şi $DC = \frac{AB}{2} + BC = \left(\frac{k}{2}+1\right) BC$;

$AE = AB + \frac{BC}{2} = (K + \frac{1}{2}) BC$ şi $EC = \frac{BC}{2}$ obţinem relaţia din enunţ.

Problema 1068

Să se arate că rădăcinile sistemului

$$x - 3\sqrt{3}\, y = 2\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}+1)\, x + (5 - 3\sqrt{3})\, y = 2 + 2\sqrt{3}$$

satisfac relaţia

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Maria Neumann

Soluţie. Rezolvînd sistemul găsim

$$x = \frac{8\sqrt{3}}{7} \quad \text{şi} \quad y = \frac{-2}{7}$$

valori care satisfac relaţia $x^2 + y^2 = 4$.

In limbaj geometric spunem că dreptele reprezentate prin ecuaţiile sistemului se intersectează într-un punct situat pe cercul cu centrul în origină, de rază 2.

Problema 1069

Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$2x^2 + xy + y^2 = 11$$

$$x^2 + xy + 3y^2 = 9.$$

Simon St. Petre

Soluţie. Notăm $y = mx$. Sistemul devine

$$x^2(2 + m + m^2) = 11$$

$$x^2(1 + m + 3m^2) = 9.$$

Prin împărţire obţinem

$$9(2 + m + m^2) = 11(1 + m + 3m^2), \text{ sau}$$

$$24m^2 + 2m - 7 = 0$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \; ; \; m_2 = -\frac{7}{12}.$$

Găsim:

$$x_{1,2} = \pm 2 \quad ; \quad x_{3,4} = \frac{\pm 12}{\sqrt{23}}$$

$$y_{1,2} = \pm 1 \quad ; \quad y_{3,4} = \frac{\mp 7}{\sqrt{23}}.$$

Problema 1071

Să se arate că ecuația reciprocă

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

are ca soluții valorile

$$x = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \arcsin \frac{-a \pm \sqrt{8 - 4b + a^2}}{b - 2}$$

și inversele lor.

Ioan Licea, elev, Galați

Soluție. Impărțind ecuația cu x^2 și notînd $x + \frac{1}{x} = y$, de unde $x^2 + \frac{1}{x^2} = y - 2$ obținem ecuația în y:

$$y^2 + ay + b - 2 = 0 \quad \text{deci} \quad y = \frac{-a \pm \sqrt{8 - 4b + a^2}}{2}.$$

Soluțiile ecuației reciproce se obțin rezolvînd ecuația

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

unde y are succesiv valorile de mai sus. Notînd $x = \operatorname{tg} \alpha$, ecuația (1) se poate scrie

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{1}{y} \quad \text{sau} \quad \sin 2\alpha = \frac{2}{y}.$$

Intrucît unghiul auxiliar 2α poate lua două valori suplimentare, vom avea:

$$x_{1,2} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \arcsin \frac{2}{y} \quad ; \quad x_{3,4} = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} \arcsin \frac{2}{y}.$$

Problema 1076

Un microscop are distanța focală a obiectivului $f = 0{,}5$ cm., distanța ocularului $F = 6$ cm, iar distanța dintre ocular și obiectiv de 30 cm. De cîte ori poate mări acest microscop imaginea obiectului, știind de asemenea că distanța vederii clare este de 25 cm.

Emil Surdu, elev, T.-Severin

Soluție. Puterea de mărire a microscopului este dată de formula $G = P \cdot \delta$, unde P (puterea) se poate înlocui cu $P = \frac{d}{f \cdot F}$; $d =$ distanța obiectiv-ocular și δ este distanța vederii clare.

$$G = \frac{d}{f \cdot F} \cdot \delta = \frac{30 \cdot 25}{6 \cdot 0{,}5} = \frac{750}{3} = 250 \text{ ori.}$$

Problema 1077

O lampă de 27 luminări este așezată în fața unei celule fotoelectrice la distanța de 3 m. Știind că sensibilitatea celulei este 20 μ/lm și suprafața catodului de 4 cm^2, se cere să se calculeze intensitatea curentului care ia naștere.

Ion Șerban, elev, Pitești

Soluție. Iluminarea unei suprafețe așezate la distanța R metri față de izvorul luminos de intensitate L lumînări, este dată de relația

$$E = \frac{L}{R^2} \text{ luxi.}$$

Inlocuind avem

$$E = \frac{27}{3^2} = \frac{27}{9} = 3 \text{ luxi.}$$

Cunoscînd iluminarea E și suprafața S putem calcula fluxul Φ cu ajutorul formulei $\Phi = E \cdot S$. Inlocuind avem $\Phi = 3 \cdot 4 = 12$.

Relația care ne dă sensibilitatea unei celule fotoelectrice este $f = \frac{I}{\Phi}$ unde I este intensitatea curentului ce ia naștere. Inlocuind avem

$$I = \Phi \cdot f \; ; \quad I = 12 \cdot 20 = 240 \; \mu A.$$

Problema 1093

Să se rezolve ecuația

$$(8x + 7)^2 \; (4x + 3) \; (x + 1) = 4{,}5.$$

A. P. Bodnarenco

Soluție. Notăm $8x + 7 = m$, de unde $x = \frac{m - 7}{8}$. Ecuația ia forma $m^2 (m^2 - 1) = 72$.

Sau $m_1^2 = 9$; $m_2^2 = -8$, deci $m_{1,2} = \pm 3$; $m_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}\, i$.

Rezultă $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = -1{,}25$; $x_{3,4} = \frac{\pm 2\sqrt{2}\, i - 7}{8}$.

Problema E: 470

Prin vîrfurile B și C ale unui triunghi oarecare ABC ducem paralele la înălțimea AD pe care AC și AB o taie respectiv în M și N. Să se arate că dreptele $MB \cdot DC = NC \cdot BD$.

Radu Stroe, elev, Ploești

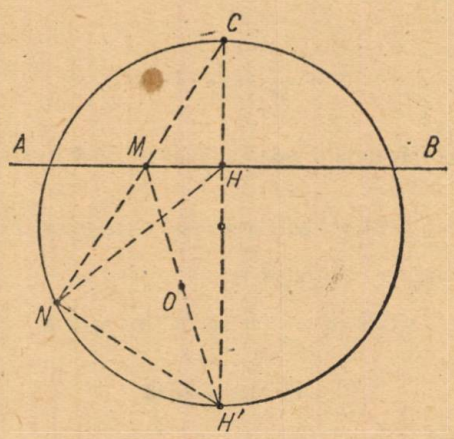
Soluție. După teorema lui Thales avem: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AN}$. Dreptele MB și NC fiind paralele rezultă că triunghiul MAB este asemenea cu triunghiul ACN și deci, $\frac{MB}{NC} = \frac{BA}{AN}$. Rezultă că $\frac{BD}{DC} = \frac{MB}{NC}$ din care deducem $BD \cdot NC = DC \cdot MB$.

Problema 1099

Se dă punctul M, mobil pe dreapta AB. Pe segmentul care unește punctul M cu un punct fix C din plan se ia punctul N, așa încît $CM \cdot CN = K^2$. Fie H proiecția lui C pe AB. Se cere locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului variabil NMH.

N. C. Ciomu

Soluție. Punctul N descrie figura inversă dreptei AB: cercul de diametru CH' $\left(CH' = \frac{K^2}{CH}\right)$.



Se observă că cercul NMH trece prin punctul H', patrulaterul $NMHH'$ fiind inscriptibil. Deci centrul acestui cerc este mijlocul segmentului $H'M$, $O \cdot H'$ fiind fix, O descrie o paralelă la AB care trece prin mijlocul segmentului HH'.

Problema 1103

Dacă între două plăci paralele de sticlă se află apă, ele se atrag cu o forță de 0,5 kg. Dacă între ele se află glicerină se atrag cu o forță de 0,2 kgf. Să se determine cantitatea de apă și de glicerină dintre plăci, dacă împreună cîntăresc 2 g. Se socotește unghiul limită $\varphi = 0$ și se dă tensiunea superficială a apei $\alpha = 73$ dyn/cm și a glicerinei $\alpha = 65$ dyn/cm.

Ioan Licea, elev, Galați

Soluție. Relația care dă forța de atracție între plăci este

$$F = \frac{2\alpha m}{\rho d^2}.$$

Prin urmare

$$\frac{F_{H_2O}}{F_{gl}} = \frac{73\, m_{H_2O} \cdot 1{,}26}{65 \cdot m_{gl}} = \frac{0{,}5}{0{,}2} \quad \text{și}$$

$$9{,}2\, m_{H_2O} = 16{,}25\, m_{gl}.$$

Insă $m_{H_2O} + m_{gl} = 2$. Rezultă $m_{H_2O} = 1{,}27$ grame; $m_{gl} = 0{,}73$ grame.

Problema 1104

Să se calculeze energia elaborată la contopirea picăturilor mici de glicerină de rază $r = 5 \cdot 10^{-4}$ mm într-o picătură de rază $R = 5$ mm.

Ioanin Brezeanu, elev, Tîrgovlște

Soluție. Avem

$E = 4\, R^2 \left(\frac{R}{r} - 1\right)$ glicerină (R.M.F.IV/953, p. 12). Inlocuind $r = 5 \cdot 10^{-5}$ cm; $R = 5 \cdot 10^{-1}$ cm și $\alpha_{gl} = 65$ dyn/cm, avem:

$E = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-2}\, (10^4 - 1)$. 65 erg, sau $E = 0{,}204165$ jouli.

Problema 1108

Pe feţele interioare ale unui condensator electric plan se găsesc iniţial un electron pe placa negativă şi o particulă α pe placa pozitivă. Să se găsească viteza căpătată de fiecare particulă şi lungimea de undă a undei asociate fiecărei particule, atunci cînd accelerate de diferenţa de potenţial U aplicată plăcilor, particulele ating simultan un plan paralel cu plăcile. Să se găsească şi raportul în care acest plan împarte distanţa d dintre plăci. Să se demonstreze că, indiferent de masele acestor particule, raportul energiilor lor este direct proporţional cu raportul sarcinilor lor.

Gabriel Popescu, elev, Rm. Vîlcea

Soluţie. Forţa care acţionează asupra particulelor este egală cu $\frac{e_p U}{d}$, e_p fiind sarcina particulei. Această forţă imprimă particulelor respectiv acceleraţiile

$$a_e = \frac{eU}{dm_e}; \qquad a_\alpha = \frac{e_\alpha U}{dm_\alpha}$$

Conform enunţului vom avea

$$d = \left(\frac{eU}{dm_e} + \frac{e_\alpha U}{dm_\alpha}\right) t^2, \text{ de unde}$$

$$t = d : \sqrt{U\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} + \frac{m_e}{e}\right)} \cdot \text{ Rezultă:}$$

$$v_e = \frac{e}{m_e}\sqrt{U} : \sqrt{\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} + \frac{e}{m_e}\right)}; \quad v_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{U} : \sqrt{\left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} + \frac{e}{m_e}\right)};$$

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e} \quad \text{şi} \quad \lambda_\alpha = \frac{h}{m_\alpha v_\alpha}$$

Raportul în care planul împarte distanţa între plăci este egal cu

$$\frac{a_e}{a_\alpha} = \frac{m_\alpha e}{m_e e_\alpha}$$

Raportul energiilor cuantice ale particulelor este proporţional cu

$$\frac{m_e v_e}{m_\alpha v_\alpha} = \frac{e}{e_\alpha}$$

Problema 1154

Să se afle o progresie geometrică ştiind că suma primilor patru termeni este S, iar suma patratelor aceloraşi termeni este S_2.

Aplicaţie: $S = 15$, $S_2 = 85$.

Niculae I. Tiţa, student, Bucureşti

Soluţie. Notăm cu a primul termen al progresiei şi cu q raţia. In acest caz

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 = a(1 + q + q^2 + q^3)$$

Se vede că:

$$1 + q + q^2 + q^3 = \frac{q^4 - 1}{q - 1}$$

deci

$$S = a\left(\frac{q^4 - 1}{q - 1}\right) \quad \text{şi} \quad a = \frac{S(q - 1)}{q^4 - 1}$$

De asemenea,

$$S_2 = a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^6 = a^2(1 + q^2 + q^4 + q^6).$$

Se vede că:

$$1 + q^2 + q^4 + q^6 = \frac{2^8 - 1}{2^2 - 1}$$

Deci

$$S_2 = a^2\left(\frac{q^7 - 1}{q^2 - 1}\right) \text{ și } a^2 = \frac{S_2(q^2 - 1)}{q^8 - 1} \quad \text{însă} \quad a^2 = \frac{S^2(q - 1)^2}{(q^4 - 1)^2}$$

Rezultă că,

$$\frac{S^2(q^2 - 1)}{q^8 - 1} = \frac{S^2(q - 1)^2}{(q^4 - 1)^2} \text{ sau } \frac{S_2(q - 1)(q + 1)}{(q^4 - 1)(q^4 + 1)} = \frac{S^2(q - 1)(q - 1)}{(q^4 - 1)(q^4 - 1)}$$

$$\frac{S_2(q + 1)}{q^4 + 1} = \frac{S^2(q - 1)}{q^4 - 1} \; ; \; \frac{S_2(q + 1)}{q^4 + 1} = \frac{S^2}{(q + 1)(q^2 + 1)}$$

Efectuînd operațiile obținem ecuația:

$$(S^2 - S_2)q^4 - 2S_2q^3 - 2S_2q^2 - 2S_2q + (S^2 - S_2) = 0,$$

care este o ecuație reciprocă.

Dacă înlocuim pe S și S_2 cu valorile respective, găsim:

$$14\,q^4 - 17\,q^3 - 17\,q^2 - 17\,q + 14 = 0$$

Împărțim cu q^2 și obținem: $14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0.$

Înlocuim pe $q + \frac{1}{q}$ cu y și în acest caz ecuația se scrie astfel:

$$14(y^2 - 2) - 17\,y - 17 = 0 \quad \text{sau} \quad 14\,y^2 - 17\,y - 45 = 0.$$

Rezolvăm această ecuație și după ce aflăm valorile lui y le egalăm pe rînd cu $q + \frac{1}{q}$ și obținem astfel 4 valori pentru q. Două din acestea sînt imaginare, iar două sînt reale și egale cu 2 și $\frac{1}{2}$.

Înlocuind pe q cu 2 în egalitatea: $15 = a(1 + q + q^2 + q^3)$, obținem pentru a valoarea unu.

La fel, dacă înlocuim pe q cu $\frac{1}{2}$, obținem $a = 8$. Există deci, două progresii care satisfac enunțul:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots \text{ și } 8, 4, 2, \tfrac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Problema 1163

Dacă U_1; U_2; U_3; U_4; ... sînt termeni ai șirului Fibonacci să se arate că există relația:

$$(U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{2n})\left(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_{2n}^2\right) =$$

$$= U_{2n+1}\left(2\,U_{2n} + U_{2n-1} - 1\right)\left(U_{n+2}^2 - U_{n-1}^2\right).$$

Dan Coșa, elev, Orașul Stalin

Soluție: Suma primilor $2n$ termeni ai șirului lui Fibonacci este

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{2n} = U_{2n+2} - 1.$$

Suma patratelor primilor $2n$ termeni ai șirului este:

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_{2n}^2 = U_{2n} \cdot U_{2n+1}.$$

Avem:

$$U_{2n} \cdot U_{2n+1} \cdot (U_{2n+2} - 1) = U_{2n+1}(2\,U_{2n} + U_{2n-1} - 1)(U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2)$$

$$U_{2n}(U_{2n+2} - 1) = (U_{2n} + U_{2n} + U_{2n-1})(U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2)$$

$$U_{2n}(U_{2n+1} - 1) = (U_{2n} + U_{2n-1} - 1)(U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2)$$

$$U_{2n}(U_{2n+2} - 1) = (U_{2n+2} - 1)(U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2)$$

$$U_{2n} = U_{n+1}^2 - U_{n-1}^2.$$

Prin metoda inducției complete se determină relația fundamentală:

$$U_{n+m} = U_{n-1} \cdot U_m + U_n \cdot U_{m+1}$$

Facem pe $m = n$:

$$U_{2n} = U_{n-1} \cdot U_n + U_n \cdot U_{n+1}$$

$$U_{2n} = U_n (U_{n-1} + U_{n+1})$$

$$U_n = U_{n+1} - U_{n-1}$$

$$U_{2n} = (U_{n+1} - U_{n-1})(U_{n+1} + U_{n+1})$$

$$U_{2n} = U_{n+1} - U_{n-1}$$

Cu aceasta problema e rezolvată. Elementele de bază ale problemei se găsesc în broșura «Numerele lui Fibonacci» de N. N. Vorobiev, pag. 8—11.

Problema 1178

Fie M un punct în interiorul tetraedrului oarecare $A_1A_2A_3A_4$. Dreptele A_1M, A_2M, A_3M, A_4M înțeapă fețele opuse respectiv în punctele B_1, B_2, B_3, B_4.

Să se stabilească relațiile:

$$\sum \frac{MB_1}{A_1B_1} = 1 \quad \text{și} \quad \sum \frac{A_1M}{A_1B_1} = 3.$$

Mihail I. Popescu, student, București

Soluție. Notăm cu A_1', A_2', A_3', A_4' picioarele înălțimilor tetraedrului considerat și cu M_1, M_2, M_3, M_4 proiecțiile punctului M respectiv pe fețele opuse vîrfurilor A_1, A_2, A_3, A_4.

Ținînd seamă că suma volumelor tetraedrelor $MA_2A_3A_4$, $MA_1A_3A_4$, $MA_1A_2A_3$ este egală cu volumul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$, putem scrie:

$$\frac{S(A_2A_3A_4) \cdot MM_1}{3} + \frac{S(A_1A_3A_4) \cdot MM_2}{3} + \frac{S(A_1A_2A_4) \cdot MM_3}{3} + \frac{S(A_1A_2A_3) \cdot MM_4}{3} = \frac{S(A_2A_3A_4) \cdot A_1A_1'}{3}. \tag{1}$$

Deoarece

$$S(A_2A_3A_4)\cdot A_1A_1' = S(A_1A_3A_4)\cdot A_2A_2 = S(A_1A_2A_4)\cdot A_3A_3' = S(A_1A_2A_3)\cdot A_4A_4'$$

relația (1) devine:

$$\sum \frac{MM_1}{A_1A_1'} = 1.$$

Ținînd seama de relația: $\frac{MM_1}{A_1A'} = \frac{MB_1}{A_1B_1}$ și de cele analoage, relația (2) se mai poate scrie:

$$\sum \frac{MB_1}{A_1B_1} = 1. \qquad (3)$$

Din relația $MB_1 = A_1B_1 - A_1M$ și cele analoage, relația (3) devine:

$$\sum \frac{A_1M}{A_1B_1} = 3.$$

Observare. In cazul cînd M este centrul sferei circumscrise tetraedrului considerat, avem:

$$\sum \frac{1}{A_1B_1} = \frac{3}{R}.$$

PROBLEME PROPUSE [1]

1346. — Ce forță este necesară pentru a se desface emisferele de Magdeburg, dacă presiunea în interiorul lor este de 0,5 mm, iar diametrul lor este de 20 cm? Presiunea atmosferică se consideră normală.

Virgil Atanasiu

1347. — Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x^5 - a = y^4(x - b)$$
$$y^5 - a = x^4(y - b)$$

M. Cacenovski (Moscova)

1348. — Arătați că numerele x și y care verifică relația $x + y\sqrt{5} = (9 + 4\sqrt{5})^n$, unde n este un întreg pozitiv sau negativ, verifică și relația $x^2 - 5y^2 = 1$. De asemenea, reciproca.

(Olimpiada Matematică a II-a, Moscova)

1349. — Să se arate că între elementele unui triunghi avem relațiile

$$b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 4S$$
$$b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2bc \sin(B - C)$$

Dacă D este piciorul înălțimii din A în triunghiul ABC iar M, mijlocul laturii BC, să se regăsească relațiile precedente, observînd că

$$\text{aria } ADB + \text{aria } ADC = S$$
$$\text{aria } ADB - \text{aria } ADC = 2 \text{ aria } ADM$$

N. N. Mihăileanu

---

[1]) La problemele propuse în acest număr se primesc soluții pînă la 1 ianuarie 1955.

1350. — Se dau două cercuri fixe cu centrele O_1 și O_2, de rază respectiv r_1 și r_2. Să se afle locul geometric al centrului O al unui al treilea cerc, de rază dată r, astfel ca tangentele comune exterioare, la perechile de cercuri (O); (O_1) și (O); (O_2) să fie egale. Ce condiție trebue să îndeplinească raza r a cercului (O) pentru ca locul geometric de mai sus să fie chiar mediatoarea segmentului $O_1\ O_2$?

Gh. D. Simionescu

1351. — Să se construiască grafic un triunghi dreptunghic la care cunoaștem ipotenuza și mediana dusă dintr-un unghi ascuțit. Ca aplicație, să se ducă o secantă la două cercuri concentrice date, astfel ca cercul mare să fie tăiat după o coardă dublă coardei din cercul mic.

* * *

1352. — Fie A_1, B_1, C_1 simetricele unui punct P din planul unui triunghi ABC în raport cu mijloacele laturilor BC, CA, AB. *a)* Să se arate că AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente într-un punct I; *b)* Să se afle locul geometric descris de punctul I cînd P descrie cercul circumscris triunghiului ABC; *c)* Cum trebuie să varieze P pentru ca I să descrie cercul înscris triunghiului ABC.

C. Ionescu-Țiu

1353. — Într-un cerc de rază R și centru O, fie o coardă mobilă AB de lungime $R\sqrt{2}$. Din punctele A și B se duc paralele la două direcții perpendiculare Δ și Δ' care se taie într-un punct M. Se cere locul geometric al punctului M.

* * *

1354. — Într-o progresie geometrică în trei termeni, suma termenilor este 26 și diferența extremilor, 16. Se cere: *a)* Să se afle progresia; *b)* cunoscînd că se obțin două progresii cu rații diferite, să se înșereze între aceste două rații, 10 mezi aritmeticii.

« Olimpiada Matematică » — Timișoara, martie 1954

1355. — Luînd vîrfurile triunghiului ABC ca centre, să se descrie trei cercuri egale. Cercul cu centrul în A intersectează laturile AB, AC respectiv în B_a, C_a. Notăm cu A_b, C_b și A_c, B_c punctele analoage. Să se demonstreze că intersecțiile dreptelor $B_a\ C_a$, $C_b\ A_b$, $A_c\ B_c$ cu laturile triunghiului ABC sînt colineare.

Mihail I. Popescu, student, București

1356. — Se dă un trunchi de piramidă $ABCDA'B'C'D'$ regulat și drept. Să i se determine aria laterală totală și volumul, cunoscîndu-i-se apotema egală cu a, distanța dela centrul bazei mari pînă la unul din vîrfurile bazei mici egală tot cu a și unghiul α făcut de o muchie cu proiecția ei pe baza mare, definit de $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Să se arate că oricare ar fi a avem relația: aria bazei mici $<$ aria unei fețe $<$ aria bazei mari.

« Olimpiada Matematică » — Timișoara, martie 1954

1357. — Pentru încălzirea unui cuptor electric pînă la temperatura necesară, la alimentarea cu curent continuu este necesară o intensitate de 6 amperi. Dacă prin înfășurarea cuptorului se trece un curent alternativ, după redresarea unei singure alternanțe, să se calculeze ce indicații trebuie să dea ampermetrul de curent continuu și ampermetru cu curent alternativ, conectați în circuit astfel încît cuptorul să aibă temperatura necesară.

* * *

1358. — Se dă ecuaţia

$$6x^2 - 19x + q = 0.$$

Să se determine q ştiind că între rădăcini există relaţia:

$$9(x_1^2 + x_2^2) + 54(x_1^3 + x_2^3) = 920$$

apoi să se studieze semnul trinomului

$$6x^2 - 19x + q$$

unde q are valoarea aflată.

« Olimpiada Matematică » — Timişoara, martie 1954

1359. — Un vagonet trebuie să fie deplasat în timpul cel mai scurt posibil de la un loc în altul pe distanţa d. Vagonetul poate merge accelerat sau frînat însă numai cu acceleraţie constantă a, trecînd apoi în mişcare uniformă sau oprindu-se. Să se calculeze viteza maximă V pe care o atinge vagonetul pentru ca deplasarea să se facă într-un timp minim, apoi să se calculeze acel timp în funcţie de datele problemei.

* * *

1360. — *a)* Lovitura ciocanului pe o nicovală grea aşezată pe pieptul atletului din circ este nevătămătoare pentru acesta, pe cînd lovitura direct în corpul omului îi duce moartea. Explicaţi acest fapt.

b) De ce loviturile de nicovală ale unui ciocan cu abur, la uzină, zguduie clădirea şi pămîntul considerabil mai puţin cînd nicovala este grea, decît atunci cînd este uşoară?

c) La ciocnirea unui camion cu un turism este avariat în special, turismul. De ce?

* * *

1361. — *a)* Deşi roţile unui turism urmează toate neregularităţile drumului, caroseria lui se mişcă abia legănîndu-se. Explicaţi fenomenul.

b) Dacă o locomotivă nu poate să mişte din loc deodată, o garnitură grea de vagoane o împinge mai întîi înapoi, şi pe urmă o trage înainte. Pentru ce se face aceasta?

c) De ce cînd trenul se pune în mişcare brusc, se poate întîmpla o rupere a garniturii de vagoane? În care parte a garniturii se poate întîmpla mai curînd această rupere?

* * *

1362. — Într-un triunghi ABC este fixă latura BC şi unghiul B. Să se afle locul geometric al picioruluí înălţimii dusă din vîrful B.

* * *

1363. — Pe laturile opuse AB şi CD ale unui paralelogram, luăm respectiv, punctele M şi N astfel că $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = m$. Dreptele DM şi BN taie diagonala AC în punctele R şi S. Să se arate că

$$RS = \frac{AC}{2m + 1}$$

C. Ionescu-Ţiu

1364. — Fie o dreaptă xy şi două puncte A şi B. Să se găsească un punct P pe dreaptă astfel că unghiul APx să fie dublul unghiului BPy.

* * *

1365. — Două drepte care se taie într-un punct A sînt tăiate de o a treia dreaptă mobilă în punctele B şi C astfel ca suma $AB + AC$ să rămînă constantă. Să se determine poziţia dreptei mobile astfel ca distanţa BC să fie minimă.

* * *

1366. — Să se demonstreze că aria unui patrulater inscriptibil şi circumscriptibil este egală cu rădăcina pătrată a produsului laturilor.

* * *

1367. — Se dă un cerc şi un punct fix A. O dreaptă mobilă dusă prin A taie cercul în B şi C. Pe mijlocul M al coardei BC se duce perpendiculara MP egală cu MA. Care este locul geometric al lui P?

* * *

1368. — Să se demonstreze că orice plan care trece prin mijloacele a două muchii opuse ale unui tetraedru oarecare, îl împart în două părţi echivalente.

* * *

1369. — Se dau n sfere egale aşezate ca la rulmenţi pe bile, avînd centrele lor pe un cerc şi în şir tangente cele vecine. Să se demonstreze că volumul acestor sfere este mai mare decît volumul golului cuprins între sfere şi torul circular în care sînt înscrise sferele.

C. Ionescu-Ţiu

1370. — Trebuie confecţionat din tablă un con circular drept fără bază care să aibă unghiul format de înălţimea lui şi o generatoare de 15°, iar volumul să aibă o capacitate de 1810 litri.

1) Să se afle raza şi înălţimea conului; 2) Să se afle unghiul şi raza sectorului circular care reprezintă desfăşurarea conului pe un plan; 3) Conul fiind cu vîrful în jos să se afle pînă la ce înălţime trebuie turnată apă pentru ca volumul cu apă să fie $\frac{1}{7}$ din volumul trunchiului de con, rămas gol; 4) Care este raza sferei înscrise în conul confecţionat; 5) Să se arate cum se poate afla aria unui paralelogram de laturi a şi b, dacă unghiul ascuţit format de diagonale este α.

Examen de maturitate, clasa XI L. b. 10 Bucureşti

1371. Pe linia de cea mai mare pantă a unui plan înclinat cu 15° faţă de planul orizontal, se rostogoleşte fără alunecare un cilindru greu şi omogen, avînd raza de 3 cm şi masa de 500 g.

Să se afle valoarea forţei de frecare a cilindrului pe plan.

* * *

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI[1]

E: **534.** Se consideră un triunghi isoscel OAB ($OA = OB$) în care latura OA rămîne fixă. Să se afle locurile geometrice ale centrelor cercurilor exînscrise în unghiurile A şi B.

Florin Constantinescu, elev, Cluj

E: **535.** Diferenţa vîrstelor a doi fraţi este $3\frac{1}{2}$ ani. Numărul de ani cît îi trebuie fratelui mai mic pînă la 20 este $\frac{3}{4}$ din anii ce-i are fratele mai mare peste 20. Ce vîrstă au cei doi fraţi? Soluţie aritmetică.

Olimpiada Matematică, Bucureşti, aprilie 1954

---

[1]) La problemele propuse în acest număr se primesc soluţii pînă la 1 ianuarie 1955.

E: **536.** Să se arate că

$$\left(\frac{1+a^7}{1+a^4}-\frac{a^7-1}{a^4-1}\right)a^4=2-\left(\frac{1-a^7}{1-a^4}+\frac{a^7+1}{a^4+1}\right)$$

C.I.Ţ.

E: **537.** Să se arate că:

$$\frac{x+y}{x-y}\left(1+\frac{xyz}{(x-y)^2}\right)+\frac{(x+y)(z-1)}{x-y}=\frac{(x^3+y^3)z}{(x-y)^3}$$

C.I.Ţ.

E: **538.** Un dinam produce un curent de 5 Amperi, care alimentează un reşou cu rezistenţa de 40 ohmi. După cît timp se va încălzi 100 g apă cu 60°C ce se găseşte într-un vas pe reşou dacă 1/6 din căldura produsă se pierde.

Gh. Galaţky, elev, Tîrgovişte

E: **539.** Pentru export s-au aşezat 10 tone mere de 2 calităţi în lădiţe de 10 kg şi 15 kg, calitatea a II în cele de 10 kg şi calitatea I în cele de 15 kg, total 850 lădiţe. Preţul total al merelor este 49000 lei; 3 kg. din calitatea II valorînd cît 2 kg din calitatea I. Se cere: *a)* cîte lădiţe din fiecare fel au fost? *b)* ce cantitate de mere de fiecare fel a fost? *c)* costul unui kg de mere din fiecare fel?

Olimpiada Matematică, Timişoara, aprilie 1954

E: **540.** Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x-y=a$$
$$\frac{x+y}{x-2y}=b$$

Leonid Rusnac, student, Timişoara

E: **541.** Comalimentul din Timişoara a primit de la fabrici o anumită cantitate de cutii de conserve de carne, zarzavat şi compot. Cutiile de compot reprezintă 40% din numărul cutiilor de zarvavat; cutiile de carne, $\frac{22}{35}$ din numărul cutiilor de zarzavat şi compot la un loc, iar cutiile de compot sînt cu 1500 mai puţine decît cele de zarzavat. Conservele au fost distribuite trustului alimentar, alimentarei şi micului gros, în felul următor:

Alimentara a primit de 2 ori mai multe conserve de carne decît trustul, iar micul gros cu 200 mai mult decît trustul. Zarzavat a fost dat cu 500 mai multe cutii alimentarei decît trustului şi cu 100 mai puţine micului gros (decît trustului). Compotul a fost repartizat în mod egal trustului şi alimentarei iar micul gros a primit 1/2 din cantitatea primită de trust. *a)* Cîte cutii de conserve din fiecare fel au fost distribuite în total?; *b)* cîte din fiecare fel au primit cele 3 întreprinderi?

Olimpiada Matematică, Timişoara, aprilie 1953

E: **542.** Să se rezolve sistemul

$$x+y+z=a+3$$
$$2x+y+az=a^2+5$$
$$x+ay+2z=a^2+5.$$

Notă: se obţin pentru necunoscute expresii întregi.

Olimpiada Matematică, Bucureşti, martie 1954

E: **543.** Din localităţile A şi B pleacă deodată una spre alta, două trăsuri. Distanţa între A şi B este de 85 km. Trăsura care pleacă din A parcurge în prima oră 5 km şi în fiecare oră următoare cu 3 km mai mult. Trăsura care pleacă din B parcurge în prima oră 10 km şi în fiecare oră următoare cu 2 km mai puţin. După două ore dela începutul mişcării pleacă din B spre A un automobil care parcurge V km pe oră. Se întreabă: *a)* după cîte ore de la începutul mişcării se vor întîlni cele două trăsuri?; *b)* după cîte ore de la începutul mişcării distanţa între cele două trăsuri va fi 37 km?; *c)* Să se determine viteza automobilului astfel încît toate cele 3 vehicule (trăsurile şi automobilul) să se întîlnească deodată?

Olimpiada Matematică, Cluj, aprilie 1954

E: **544.** Să se arate că:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-2}}\right)^2=a\,(a-1),\ \text{unde}\ a\geqslant 2.$$

Florin Torjescu, elev, Ploeşti

E: **545.** De la două debarcadere A şi B situate la distanţa de 960 km unul de altul a plecat cîte o barcă una către cealaltă. Cea din A pleacă cu 3 minute înaintea celei din B. Fiecare barcă merge cu viteză constantă. Insă, viteza bărcii din A este cu 36 m pe minut mai mică decît viteza bărcii B. Presupunînd că bărcile se întîlnesc la jumătatea distanţei dintre cele două debarcadere, se cere să se calculeze timpul cînd s-au întîlnit cele două bărci, de la plecarea lor .De asemenea să se calculeze vitezele celor două bărci.

Olimpiada Matematică, Cluj, aprilie 1954

E: **546.** Raportul a două numere este $\frac{5}{3}$. Dacă scădem 10 din primul şi adăugăm 10 celuilalt raportul numerelor obţinute devine $\frac{3}{5}$. Să se afle numerele.

Florian Iliescu, elev, Craiova

E: **547.** Dacă

$$x=\frac{a}{b+c},\quad y=\frac{b}{c+a}\quad\text{şi}\quad z=\frac{c}{a+b}.$$

Să se arate că $xy+yz+zx=1-2\,xyz$.

Ion I. Cristea, elev, Constanţa

E: **548.** Pentru umplerea unui bazin cu apă, se folosesc trei robinete. Primul robinet cu cel de al doilea, umple bazinul în 2 ore. Al doilea robinet cu al treilea umple bazinul în 3 ore, iar primul cu al treilea robinet umple bazinul în 4 ore. Se întreabă: *a)* In cît timp vor umple bazinul toate trei, robinetele curgînd împreună?; *b)* Care dintre cele trei robinete uitat deschis 4 ore face ca apa din bazin să se verse? Cît la sută din capacitatea bazinului s-a vărsat?

Ion Mihail, elev, Alba Iulia

E: **549.** O bucată de săpun scoasă din fabrică în formă de paralelipiped dreptunghic lung de 100 cm, lat de 80 cm şi gros de 30 cm se desface prin tăieturi paralele cu feţele în bucăţi cubice de aceiaşi mărime. Care este cel mai mic număr de bucăţi cubice în care se poate desface săpunul şi cît este de mare o bucată.

Marius Zaharescu, student, Bucureşti

Repartizarea pe clase: V-a (535, 543, 545, 546, 549); VI-a (539, 541, 544, 547, 548); VII-a (534, 536, 537, 538, 540, 542).

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI.

Pînă la 10 iulie 1954 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Șerb Gabriel Adrian (cl. Xi, Ploești), *Baieră P. Bogdan* (cl. X, Focșani), *Iordache D. Ioan* (cl IX, Constanța), *Cristea I. Ion* (cl. IX, Constanța), *Lupuțiu Ioan* (cl. IX, Ploești), *Donescu St. Dragomir* (cl. XI, Focșani), *Popescu Al. Dan* (cl. XI, Reșița), *Neguț G. Nicolae* (an III, s.m.m., București), *Mișcol Mircea* (cl. IX, Giurgiu), *Vasilescu Constantin* (cl. XI, Călărași), *Bostan Hote* (cl. XI, Vaslui), *Silion Dinu* (cl. XI, Ploești), *Mitu Șt. Velicu* (cl. XI, Giurgiu), *Buruiană Gh.* (cl. X, Focșani), *Pupăzan Nicolae* (cl. XI, Predeal), *Rus A. Ioan* (cl. IX, Oradea), *Dinu G. Gheorghe* (an II S. E.M. Craiova), *Dumitriu Constantin* (cl. XI, Focșani), *Ionescu Gabriel* (cl. XI, Focșani), *Pricâ G. Constantin* (cl. XI, Craiova), *Stroe Radu* (cl. IX, Ploești), *Brebu Gheorghe* (cl. IX, Tîrgoviște), *Vrăjitoru Dan* (cl. IX, Aiud), *Sandu Titu* (cl. X, Craiova), *Pandrea Nicolae* (cl. XI, Focșani), *Roșianu Dragomir* (cl. XI, R. Vîlcea), *Petru I. Dumitru* (cl. XI, Giurgiu), *Zaharia D. Gheorghe* (cl. XI, Focșani), *Minuț M. Petru* (cl. X, Piatra Neamț), *Petrovici Radu* (Cl. XI, Focșani), *Savin I. Dan* (an IV, Cîmpu-lung Muscel), *Iliescu C. Florian* (cl. XI, Craiova), *Popa G. Stancu* (cl. IX, Corabia), *Voicu Traian* (an II El. Craiova), *Stăncic Octavian* (cl. XI, Focșani), *Bărbuică Nicolae* (an II elec. Craiova), *Popovici Iulian* (cl. IX, Ploești), *Roibănescu N. Adrian* (cl. XI, Focșani), *Mazilu T. Alexandru* (cl. X, I.b.7, București), *Teodorescu Mihai* (cl. X, I.b.10, București, *Pieleanu Dumitru* (cl. VIII, Giurgiu), *Ionescu Savin* (cl. XI, Pitești), *Guiașu Silviu* (cl. IX, Oradea), *Lambă Stelian* (an III, Constanța), *Cosma Octavian* (cl. X, Oradea), *Budai Teodor* (cl. X, Suceava), *Brebente Corneliu* (cl. IX, Tîrgoviște), *Stoian Gheorghe* (cl. IX, Tîrgoviște), *Lazăr Edith* (cl. X, Piatra Neamț), *Boloca Ioan* (an II, Cîmpulung Mold.), *Iliescu Paul* (cl. IX, Ploești), *Kümbetlian Gheorghe* (cl. XI, Constanța) *Gavriluț Mihai* (cl. IX, Roman), *Mihăilă Ieronim* (cl. X, Roman).

* * *

Pînă la 10 iulie 1954 s-au mai primit cel puțin cîte **zece soluții bune** dela următorii rezolvitori:

(urmare)

BUZĂU Clasa VII-a. Suciu A. Tița (E: 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 395, 396, 397, 400), Clasa IX-a. Marinescu Doina (1152, 159, 165, 183, E: 401, 402, 404, 409, 411, 412, 415, 418, 426, 427, 428, 429), Mihăescu C. Laura (1088, 152, 154, 165, 183, E: 397, 381, 402 407, 425, 447, 452), Ștefănescu Marilena (1165, 183, E: 411, 412, 418, 419, 425, 428, 441, 447, 454), Petrescu Dorina (1165, E: 411, 412, 415, 418, 425, 426, 428, 429, 447) Potor M. Constantin (1127, 129, 151, 152, 157, 159, 167, 172, 191, E: 396, 398, 399, 400, 401, 402, 405, 407, 409, 411, 412, 413, 415, 418, 420, 422, 427, 428, 429, 430, 431, 435, 436, 441, 442).

CĂLĂRAȘI. *S.M.T.M. Agricolă.* Petrovici Gh. (1107, 165, 173, 207, E: 411, 412, 415, 418, 424, 447, 449, 451). Clasa XI-a. Vasilache Constantin (1078, 94, 106, 113, 124, 126, 127, 128, 129, 138, 140, 142, 143, 149, 151, 152, 159, 161, 162, 165, 171, 174, 175, 179, 183, 185, 191, 203, 204, 207, 216, 218, 221, 232, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247).

CIMPINA. (Ploești) *Liceul mixt Breaza.* Clasa VIII-a Zaharia I. Gheroghe (1217, 221, 230, 232, E: 397, 447, 454, 459, 461, 469). Școala medie tehnică de petrol. Anul III. Enăchescu T. Stoian (1118, 121, 124, 126, E: 385, 387, 388, 389, 391, 392, 395, 396, 397, 398, 400).

CIMPULUNG MUSCEL. Clasa VIII-a. Enăchescu I. Victor (E: 370, 382, 389, 396, 402, 410, 411, 412, 418, 425, 447). Clasa IX-a Vasilescu Anișoara (1165, E: 402, 404, 411, 412, 418, 424, 428, 429, 447,), Clasa X-a; Sminchișescu T. Gheorghe (1143, 165, 173, 183, E: 384, 387, 391, 392, 396, 397, 398, 402, 404, 406, 409, 411, 412, 414, 415, 418, 419, 428, 447, 454, 455). *Școala medie tehnică de cărbuni.* Anul IV. Savin I. Dan (1093, 94, 96, 97, 98, 104, 105, 107, 115, 118, 119, 124, 134, 135, 136, 149, 151, 152, 153, 154, 157, 159, 161, 162, 163, P).

CIMPULUNG MOLDOVENESC. *S.M.T. Construcții.* Anul II. Boloca Ion (1078, 79, 80, 81, 84, 85, 87, 88, 96, 98, E: 369, 370, 371, 372, 373, 377. 378, 379, 380, 381, 382, 383, 387, 389, 390, 391, 392, 393, 396, 397, 403, 404, 406, 407, 411, 412, 413, 414, 415, 417, 418, 421 — 436, 439, 441—446).

CARANSEBEȘ. *Liceul mixt.* Sedeșniuc Aurel (1084, 152, 159, E: 391, 398, 402, 406, 407, 409, 411, 412, 416, 424, 428, 434).

CLUJ. Clasa VIII-a. Petrescu E. Rodica (1179, 121, E: 412, 426, 429, 433, 440, 441, 444, 445, 446). *Școala Specială muncitorească* Anul I. Popescu Const, (1148, 167, 1230, E: 396, 410, 412, 413, 415, 418, 421, 447, 448, 452, 457, 464, 465, 470). Păun Constantin (1127, 130, 148, 127, 216, 246, E: 396, 402, 410, 412, 413, 415, 421, 447, 448, 457, 464, 465, 470). Aldea Florea (1230, 243, 246, E: 402, 411, 412, 417, 418, 447, 448, 452, 457, 464, 465, 470). Soaita Liviu (E: 396, 402, 406, 409, 410, 411, 418, 421, 448, 457, 460, 470, 1216, 243). Coțea Nicolae (1243, 246. E: 396, 408, 410, 411, 412, 415, 417, 418, 421, 452, 464, 465, 470), Faghiura Gh. (1118, 201, E: 384, 413, 417, 421, 448, 456, 467, 486). Anul II. Sfârlea Vasile (1126, 156, 201, 239, 241, 244, 247, E: 417, 421, 425), Azappanyon Mihai (1126, 165, 201, 216, 241, 244, 245, 247, E: 417, 421).

CONSTANȚA. *Școala hidrotehnică.* Anul. I. Caraman Gheraţa (1189, 98, 102, 106, 121, 137, 140, 152, 201, E: 383, 389, 405, 406, 410, 454), Ghencea Adrian (1089, 97, 98, 128, 140, 152, 165, 183, 201, 204), Manolescu Constantin (1089, 93, 98, 128, 140, 152, 165, 183, 201, 204). Anul II. Duagi Axel (1078, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 127, 128, 165, 183, E: 370, 371, 374, 376, 378, 380, 381, 382, 406, 409, 411, 412, 413,) Cîrjali Haiati (1080, 82, 85, 88, 93, 98, 127, 140, 152, 165, 183, 201, 204, E: 412, 413, 415, 417, 418, 425, 426 427, 428, 429, 431, 433, 435). Cerbureanu Aurelian (1091, 93, 98, 118, 128, 140, 152, 183, 201, 204), Stepan Ion 180, 82, 89, 93, 102, 118, 124, 128, 140, 152, 201, 204). Sachelarie Nicolae (1216), 220, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247), Pascu Gh. (1078, 78, 79, 84, 165, 183, E: 370, 372, 373, 374, 376, 377, 378, 380, 381, 382, 411, 426, 427, 428, 429, 431, 435, 442), Titireanu Emilia (1078, 77, 88, E: 425, 429 434, 435, 436, 441, 443), Anul III. Lambă Stelian (1121, 127, 128, 129, 140, 142, 152, 165, 166, 174, 179, 181, 183, 190, 204, 221, 239, 240, 241, 243, 245, 246, 247, P), Văiedanu Tănase (1121, 127, 128, 183, 221, E: 411, 413, 415, 427, 428, 447). *Liceul de băieți.* Clasa IX-a. Cristea I. Ion (1120, 143, 155, 158, 163, 167, 173, 178, 181, 194, 201, 203, 211, 215, 218, 221, 222, 224, 226, 227, 228, 229, 233, 236, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P). Iordache Dan Ion (1190, 95, 124, 126, 132, 140, 143, 151, 152, 157, 159, 163, 165, 166, 167, 169, 174, 175, 179, 183, 185, 194, 195, 204, 205, 207, 211, 214, 216, 218, 224, 230, 236, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P), Clasa XI-a. Kümbetlian Gh. (1142, 143, 153, 157, 160, 164, 169, 174, 194, 202, 204, 208, 222, 229, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P), Sachelarie Nicolae (1216, 220, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247).

CORABIA. Clasa IX-a. Popa Gh. Stancu (1054, 67, 72, 93, 95, 99, 100, 118, 121, 125, 123, 126, 130, 140, 142, 143, 148, 152, 154, 154, 161, 165, 166, 174, 183, 193, 195, E: 370, 383, 387, 388, 389, 390, 404, 413, 414, 417, 418, 420, 421), Clasa X-a. Bădănac M. Alexandru (1062, 63, 64, 65, 66, 67, 68, E: 404, 413, 414).

CRAIOVA. *Liceul 1 băieți.* Clasa VIII-a. Ionescu N. Const. (1152, E: 412, 457, 463, 471, 475, 476, 497, 499, 505, 510). Clasa IX-a. Turlea I. Dorin (1140, 142, 148, 151, 152, 154, 159, 165, 179, 183, P). Clasa XI-a. Iliescu C. Florian (1000, 1, 38, 40, 58, 62, 65, 70, 83, 85, 159, 165, 166, 167, 183, 185, 199, 202, 207, 212, 218, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, E: 401, 404, 448, 451, 452, 453). *Liceul 2 băieți.* Clasa X-a. Sandu Titu (1042, 43, 53, 54, 57, 62, 64, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 89, 93, 94, 98, 102, 104, 118, 125, 126, 127, 128, 129, 137, 139, E: 390, 402, 404, 406, 409, 411, 412, 413, 418, 423, 424, 428, 435, 436, 441, 442, 443, 444, 447), Clasa XI-a. Guran A. Marius (1140, 143, 165, 183, 184, 208, 239, 240, 242, E: 402, 404, 409, 411, 412, 417, 453), Prică Gh. Constan-

tin (1053, 54, 165, 166, 169, 173, 175, 179, 181, 183, 184, 185, 186, 188, 189, 190, 191, 193, 195, 196, 204, 208, 224, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246), *Şcoala medie Electrotehnică.* Anul II. Bărbuică Nicolae (1118, 124, 148, 152, 154, 159, 161, 165, 166, 179, 183, 185, 203, 204, 222, 239—242, 244—247, P), Chitucea Eugen (1127, 128, 143, 145, 148, 245, 246, 247, E: 402, 451, 457, 470), Dinu Gh. Gheorghe (1039, 58, 70, 94, 96, 97, 102, 105, 118, 130, 131, 132, 135, 138, 140, 142, 143, 144, 148, 151, 152, 161, 179, 181, 185, 202, 204, 216, 218, 222, 223, 224, 230, 240, 241, 243, 244, 245, 246, 247, E: 403, 411, 418), Voicu I. Traian (1124, 126, 127, 128, 138, 165, 140, 141, 143, 148, 152, 154, 159, 161, 166, 175, 179, 183, 184, 185, 202, 204, 212, 222, 230, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247, E: 420, 259, P). *Liceul 1 fete.* Clasa IX-a. Ionescu N. Marioara (1252, E: 382, 389, 391, 400. 412, 415, 429, 441, 457, 462, 463, 471, 473, 475, 479, 482, 505).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VIII-a. Bardar Marilena (1098, 118, 128, E: 402, 407, 410, 447, 448, 450, 355, 458), Clasa X-a. Ene St. Ion. (1167, 172, 187, 191, 202, 216, 221, 239, 240, 241, 242, 243, E: 418, 421, 447, 451, 453), Florescu C. Constantin (1216, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247).

DEJ. Clasa VIII-a. Oniga Maria (1211, E: 411, 412, 425, 426, 428, 429, 431, 433, 440, 441, 446, 447, 441), Clasa IX-a. Cîmpeanu Ana (E: 402, 403, 411, 418, 421, 428, 429, 435, 440, 447), Moldoveanu Maria (E: 410, 411, 412, 425, 426, 429, 431, 441, 442, 443), Micu G. Rodia (E: 405, 409, 411, 412, 415, 418, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 435, 441, 447, 448), Absolvent. Chiricuţă Gh. (1152, 161, 165, 174, 179, 183, 185, 195, 201, 204, 218, 230, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247).

DRĂGĂŞANI. (Vîlcea). *Şcoala medie tehnică agricolă* Voiceşti. Anul II. Manea I. Nicolae (1149, E: 398, 410, 411, 412, 413, 414, 422, 423, 426, 427, 428, 429, 431, 433, 438, 441, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 454), Stelea Florea (1087, 88, 91, 159, E: 405, 410, 412, 421, 425, 428, 429, 441, 446, 447, 448, 449).

FOCŞANI. Clasa VIII-a. Niculescu I. Constantin (1165, 167, E: 411, 416, 421, 426, 427, 428, 429, 431, 432, 534, 436, 438, 440) Clasa X-a. Baieră B. Bogdan (1164, 86, 87, 95, 96, 97, 98, 102, 104, 106, 107, 109, 112, 113, 114, 118, 119, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 134, 140, 141, 142, 148, 150, 151, 153, 154, 157, 158, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 170, 173, 479, 183, 185, 191, 195, 204, 214, 216, 217, 218, 219, 224, 230, 231, 232, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, E: 409, 411, 412, 415, 417, 418, 421, 425, 426, 427, 428, 432, 436, 442, 444, 446, 461, 466, 476, P), Buruiană Gh. (1081, 85, 95, 97, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 109 110, 111, 112, 113, 114, 119, 121, 123, 124, 129, 135, 136, 138, 140, 141, 153, 157, 159, 162, 164, 166, 170, 175, 180, 191, 192, 201, P), Cristea Gr. Armand (1070, 118, 121, 124, 125—128, 130, 137, 139, 149, 152, 159, 183, 384, 385, 397, 388, 389, 391, 394, 396, 398, 399, 401, 402, 405, 407, 410, 411, 414, 417, 418, 422, 423, P), Dogaru Ştefan (1084, 87, 88, 89, 97, 98, 99, 104, 109, 113, 119, 126, 157, 179, 185, 192, 195), E: 442, 454, 455, P) Donescu St. Dragomir (1101—107, 109—114, 118, 119, 121—132, 134, 143, 148—154, 157, 159, 161, 162, P) Dumitru Constantin (1092, 94, 95, 97, 98, 102—107, 109, 110, 112, 113, 114, 119, 121—127, 129, 140, 141, 142, 150, 151, 152, 154, 156, 157, 159, 162, 165, 166, 170, E: 370, 371, 373, 378, 380, 382, 385, 388, 389, 391, 395, 398, 402, 403, 404, 407, 447, 448, 451, 452), Hainăroşie V. Constantin (1121, 126, 127, 128, 165, 167, 171, 173, E: 384, 385, 406, 422, 423, 424, 447), Ianuc Corneliu (1080, 85, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 110, 111, 112, 113, 124, 141, 153, 157, 170, 175, 180, 185, 191, 192, 201), Iancu Gabriel (1087, 88, 92, 97, 99, 102, 104, 105, 106, 109, 110, 111, 113, 114, 118, 119, 121, 123, 124, 126, 127, 129, 130, 138, 139, 148, 157, 159, 165, 166, 167, 179, 183, 185, 186, 191, 195, P), Lupaşcu Mihai (1087, 119, 123, 126, 130, 148, 149, 157, 165, 179, 183, 195, E: 411, 412, 415, 416, 417, 418, 436, 441, 412, 415, 416, 417, 418, 436, 441, 447, 451), Pandrea Nicolae (1084, 86, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 109, 110, 114, 119, 123, 130, 131, 132, 137, 138, 139, 142, 151, 153, 154, 157, 159, 160, 162, 164 169, 170, 180, 182, 187), Petrovici Radu (1078, 79,

80, 81, 82, 83, 84, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 110, 101 104, 106, 110, 118, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, P), Rozenfeld Paul (1053, 64, 82, 92, 109, 119, 123, 127, 128, 130, 148, 165, 183, 192, 195), Salonţi Anton (1087, 92, 93, 94, 98, 102, 103, 104, 105, 109 110, 113, 118, 119, 121, 126, 149, 152, 153, 156, 157, 162, 164, 165, 167, 183, 212), Stăncic Octavian (1087, 88, 92, 97, 99, 102, 104, 105, 106, 107, 110, 113, 114, 118, 119, 123, 124, 135, 136, 137, 138, 157, 159, 162, 164, 166, 167, 179, 185, 187), Zaharia D. Gheorghe (1087, 97, 98, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 109, 110, 112, 113, 119, 123, 124, 125, 138, 139, 140, 141, 142, 148, 153, 157, 159, 162, 164, 166, 167, 175, 179, 187, 191), Robănescu N. Adrian (1084, 87, 88, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 110, 111, 112, 113, 114, 121, 124, 137, 138, 141, 157, 159, 162, 165, 166, 179, 180, 191, E: 373, 400, 402, 406, 407, 409, 411, 412, 413, 415, P), Ţtru Gh. Emil (1239, 243, 245, 247, E: 389, 402, 404, 409, 423, 434, 442, 443, 449, 457, 460, 465, 470)

GALAŢI. Şcoala medie tehnică Anul II Dermengea Milică (1078,84, 87, 88, 106, 124, 126, 137, 140, 149, E: 387, 389, 423, 448, 451).

GIURGIU. Clasa VIII-a. Pieleanu I. Dumitru (1121, 124, 126, 138, 139, 143, 149, 151, 152, 157, 159, 162, 163, 165, 167, 168, 179, 183, 188, 204, 212, 213, E: 395, 398, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 409. 411—416, 418, 425, 426, 427, 429, 430, 431, 436 , 437, 439—446, P) Clasa IX-a. Tode Traian (E: 387, 389, 391, 392, 396, 398, 399, 406, 411), Clasa X-a. Aldea I. Vasile (1084, 106, 107, 112, 127, 128, 139, 142, 148, 151, 159, 163, 164, 165, 167, 174, 180 183, 199, 212), Anul II. Pante Gh. (1148, 127, 151, 152, 243, E: 391 , 392, 402, 414, 423, 452 457, 458, 460, 469, 470), Anul III. Ilie A. Ioana (1180, 1149, 152, 157, 162, 167, 168, 183, 185, 188), Negoi M. Ion (1151, 157, 165, 245, E: 387, 389, 463, 467, 458, 460). Clasa IX-a, Mihail M. Vasile (1118, 149, 152, 157, 162, 167, 168, 179, 183, 185, 188, 204, 212, 213, E: 395, 398, 402, 403, 404, 406, 409, 411, 412, 413, 414, 416, 418, 447); clasa XI-a Bătineţu. M. Dumitru (1080, 85, 87, 91, 94, 96, 110, 149, 167, E: 406, 407), Găulea Alexandru (1144, 1206, 219, 243, E: 387, 388, 391, 396, 399, 405, 411, 412, 413, 417, 421, 457, 458, 461, 464, P), Mişcol Mircea (1140, 142, 149, 150, 151, 152, 154, 156, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 179, 180, 183, 188, 190, 192, 195, 197, 201, 203, 209, 211, 213, 214, 217, 221, 222, 240, 242, 245, 247, 375, P), Mitu St. Velicu (1183, 184, 185, 187, 188, 190, 191, 199, 201, 202, 204, 207, 209, 210, 212, 214, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 228, 229, 230, 231, 232, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P), Petru I. Dumitru (1093, 95, 112, 121, 141, 143, 151, 159, 161, 164, 165, 167, 168, 170, 171, 173, 175, 176, 179, 183, 185, 187, 190, 191, 199, 201, 204, 205, 207, 208, 209, 212).

GRADISTE (Regiunea Bucureşti). Clasa VI-a. Marin Aneta (E: 314, 390, 401, 404, 405, 406, 407, 408, 414, 447).

HUNEDOARA. Gheorghe Valer (1121, 149, 152, 159, 171, 214, 216, 217, 219, 221, 222, 223, 230, 231, 232, 238, 239, 240, 242, 243, 245, 246, P), Meduţ Ioan (E: 409, 410, 411, 447, 449, 451, 452, 457, 1149, 207).

IAŞI. Clasa VI-a. Lupu Sonia (E: 358, 389, 392, 397, 400, 403, 457, 459, 462, 464), Obşanski Paula (E: 447, 452, 454, 455, 457, 460, 462, 463, 471); clasa VII-a *Hîrlău*. Tibulac Florin (E: 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415 417, 418, 422, 424, 451). Şcoala pedagogică, anul I. Vartolomeu Agop (1098, E: 370, 371, 373, 379, 381, 382, 397, 398, 408), Gafencu Gheorghe (E: 396, 397, 398, 400, 408, 425, 426, 427, 429, 447), Tănase Adrian (1118, 159, E: 382, 387, 389, 390, 396, 397, 398, 400, 405, 406, 411, 415, 426, 427, 428, 429, 447); anul III. Grăjdeanu I. Petru (1207, E: 384, 396, 402, 406, 425, 427, 428, 429, 435, 443); clasa IX-a. Alexa Dumitru (1096, 98, 106, 112, 140, 142, 143, 152, 165, 171, 175, 183, 190, 202, 203, 221, 227, 240, 241, 245, 247); clasa X-a. Bîrsan M. Temistocle (1118, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 142, 148, 152), Vaisman Izu (1078, 81, 82, 83,84, 85, 87, 88, 91, 95, 97, 98, 99, 100, 122, 124, 126, 127,); clasa XI-a. Neagu Constantin (1084, 87, 88, 93, 97, 98, 126, 127, 165, 167, 171, 183, 209, E: 381, 418), Ursache Eugen (1084, 85, 87, 88, 93, 97, 98, 99, 126, 127, 152, 165, 167, 171, 183).

MORENI. Şcoala medie de petrol, anul III. Enăchescu T. Stoian (1125, 127, 128, 130, 137, 138, 140, 143, 149, 152, 154, 159, E: 401, 402, 403, 404, 406, 407, 409, 410).

ODORHEI. Clasa XI-a Sass Jenő (1140, 142, 145, 146, 148, 149, 150, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 159, 161, 162, 163).

ORADEA. *Inand*, clasa V-a. Gherman Ecaterina (1154, (E: 376, 382, 387, 389, 391, 392, 396, 398, 400, 406, 409, 454, 455,460,); clasa IX-a Daina Iosif (1152, 167, 169, E: 406, 411, 412, 413, 415, 418, 445, 446), Guiaşu I. Silviu (1054, 58, 66, 67, 82, 85, 87, 88, 89, 90, 93, 94, 96, 98, 102, 103, 104, 107, 109, 110, 111, 113, 115, 121, 126, 127, P), Cheleleu Traian (1152, E: 389, 391, 395, 400, 418, 426, 427, 428, 429, 433, 434, 436), Rus A. Ioan (1125, 136, 142, 143, 144, 148, 151—166, 168—173, 180, 183, 185, 186, 188, 191, P); clasa X-a. Cosma Octavian (1068, 69, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 95, 96, 97, 98, 121, 124, 127, 126, 128, 129, 148, 150, 151, 183).

ORAŞUL STALIN. Şcoala medie tehnică mecanica, anul II. Teutsch Ulrich (1165, 169, 173, 175, 181, 183, 185, 188, 189, 190); clasa VII-a D. Mircea Florian (E: 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 420, 421, 422, 423, 424); clasa VIII-a. Ciobanu Ioan (E: 342, 347, 389, 391, 412—418, 429, P).

PANCIU. Absolvent Cristian I. Gheorghe (1152, 165, 171, 175, 199, 207, 212, 214, 217, 219, 230, 231, 239, 240, 242, 243, 245, 246, 252, 253, 255, 261, E: 401, 402, 404, 408, 409, 410, 411, 415, 418, 448, 449, 450, 454, 457, 459, 460, 465, 467, 469, 470, P).

PIATRA NEAMŢ. Clasa X-a. Lazăr Edith (1165, 173, 174, 175, 179, 181, 183, 184, 185, 204, 209, 218, 220, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 252, 253, 254, 255, 256, 261, E: 411, 412, 452, 453, 454, 457, 465, 470, 471, P), Ianu Valerian (1078, 84, 87, 152, 159, 240, 245, 250, E: 358, 411, 412), Minuţ M. Petru (1095, 102, 122, 125, 127, 137, 140, 146, 149, 165, 167, 171, 174, 175, 179, 183, 185, 199, 201, 204, 205, 208, 214, 240, 241, 242, 243, 245, 246); clasa XI-a. Calianu Narciza (1143, 183 201, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, E: 457), Pristavu V. Ioan (« Metoda coeficienţelor nedeterminaţi »).

PITEŞTI. Clasa V-a, *Băiculeşti*. Roncea A. Teodor (E: 457, 458, 459, 460); clasa IX-a. Bogaciu Valeriu (1142, 143, 145, 151, 153, 154, 157, 159, 161, 162), Dumitraşcu Ilie (1152 191, 245, 247, E: 410, 411, 413, 447, 452), Sorescu Victor, (1243, 245, 246, 247, E: 402, 404, 407, 412, 415, 447, 448, 457, 458, 459, 460, 464, 466); clasa XI-a. Ionescu V. Savin (1085, 93, 113, 118, 139, 148, 149, 152, 159, 162, 165, 167, 170, 172, 176, 179, 181, 183, 185, 188, 191, 195, 199, 201, 204, 207, P); Şcoala medie tehnică mecanică, an I. Alexandru G. (1121, 124, E: 356, 357, 370, 372, 382, 392, 425), Arsene N. (E: 372, 375, 382, 389, 391, 392, 409, 425, 429, 457), Comardici Zaharia (E: 370, 371, 389, 391, 398, 404, 406, 429, 454, 459), Ionescu Corneliu (E: 370, 372, 382, 389, 391, 398, 425, 429, 457, 460, P), Luca V. (1124, E: 356, 370, 372, 375, 382, 391, 392, 397, 398, 450, 457, 459), Necula Gheorghe (E: 369, 370, 375, 382, 387, 389, 391, 392, 397, 398, 402, 420, 425, 429, 440, 442, 457, 460), Niţă M. Floarea (E: 372, 375, 382, 392, 397, 398, 400, 404, 425, 457, 460), Pîrîianu Elena (E: 375, 382, 387, 389, 391, 397, 404, 425, 457, 460), Popa Gheorghe (E: 370, 372, 375, 382, 387, 392, 398, 400, 401, 404, 407, 460), Sofron Gavril (1212, 222, 240, 242, E: 401, 402, 404, 411, 417, 418, 435, 442, 451, 454), Udrea Ion (E: 370, 372, 375, 382, 378, 391, 392, 396, 398, 400, 401, 404, 425, 429, 457, 459, 460), Popa Marin (E: 370, 372, 382, 387, 389, 391, 392, 396, 398, 400, 401, 402, 404, 425, 457, 459, 460).

PLOEŞTI. Carpat Letiţa (1139, 165, 167, 168, 239, 240, 241, 242, 244, 247); clasa IX-a. Constantinescu N. Ion (1078, 81, 84, 93, 96, 98, 118, 127, 128, 148, 149, 151, 152, 154, 157, 159, 165, 169, 183), Dobrescu D. Horia (1078, 81, 84, 87, 88, 93, 96, 97, 98, 106, 118, 128, 139, 149, 152, 157, 159, 165, 167, 179, 183, 205), Lupuţiu Ioan (155, 67, 83, 140, 143, 146, 154, 157, 158, 159, 161, 163—171, 172, 175, 179, 181, 183—186, 190, 191, 192, 195, 196, 197, 199, 202—205, 208, 209, 239, 240, 241, 243, 247), Iliescu I. Paul (1070, 78, 80, 81, 83, 84, 93, 96, 97, 98, 118, 128, 149, 151, 152, 154, 157, 159, 165, 167, 169, 183, 205, E: 370, 373,

378, 380), Stroe Radu (1145, 148, 154, 161, 163, 170, 175, 176, 179, 181, 183, 185, 190, 195, 201, 204, 205, 211, 216, 218, 221, 226, 232, 239, 240, 242, 243, 244, 245, 246, 247), Prahoveanu Mihai (1065, 68, 78, 84, 87, 93, 96, 122, 152, 154), Teodoru Alexandru (1065, 68, 70, 84, 93, 106, 118, 128, 139, 152, 169), Popovici Iulian (1117, 118, 122, 126, 127, 128, 140, 149, 151, 152, 159, 162, 163, 165, 167, 168, 169, 183, 186, 194, 196, 199, 205), Stoicescu Armand (1084, 93, 96, 118, 127, 128, 139, 140, 149, 158, 159, 171, 179 183, 199); clasa XI-a. Biclineru Vasile (1097, 102, 118, 124, 126, 139, 149 151, 159, 168), Popescu Nicolae (1079, 84, 121, 139, 141, 149, 151, 152, 159, 165, 176, 179, 185, 204), Odobescu Alexandru (1079, 84, 113, 121, 124, 126, 127, 128, 149, 150, 151, 157, 159, 165, 183, 204); clasa XI-a. Dăscălescu Gheorghe 1081, 87, 91, 96, 104, 105, 109, 113, 125, 128), Colţosu Valeriu (1084, 98, 124, 126, 127, 128, 13, 149, 152, 157, 159, 164, 165, 175, 179, 183, 184), Dragomirescu Aurel (1084, 96, 98, 126, 127, 130, 143, 149, 146, 165, 167, 183, 185, 208), Dumitrescu Stelian (1140, 143, 149, 151, 152, 156, 159, 165, 167, 172, 173, 175, 179, 183, 208), Dumitrescu Emil (1096, 98, 140, 143, 149, 151, 152, 159, 165, 183), Moreanu Rudi (1058, 65, 69, 81, 84, 87, 98, 118, 124, 128), Mecsincescu Mihai (1078, 81, 84, 93, 96, 98, 118, 127, 140, 148, 151, 152, 157), Georgescu Mihai (1064, 85, 87, 88, 96, 175, 179, 183, 185), Popescu Titu (1121, 124, 126, 128, 165, 171, 175, 179, 183, 185, 188, 219, 221, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P), Sinescu Mircea (1127, 139, 143, 149, 152, 157, 159, 163, 165, 166, 170, 179, 180, 183, 188), Silion Dinu (1119, 123, 125, 129, 143, 149, 154, 162, 164, 166, 167, 174, 180, 184, 186, 188, 190, 193, 195, 201, 202, 203, 204, 207, 208, 209, 219, 221, 227, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247) Şerb Gabriel Adrian (1157, 166, 169, 170, 173, 174, 181, 190, 193, 194, 195, 196, 199, 201, 202, 203, 205, 206, 207, 208, 209, 211, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 229, 232, 233, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P, VI: I, VIII: I, 2, 3, IX: 1).

PREDEAL. Clasa XI-a. Alexa I. Ioan (1183, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 98, 99, 106, 113, 121, 125, 126, 127, 128, 166, 171, 175, 183, 185, 190, 195, 201, 206, 220, 224, 239, 240, 242, 243, 246, 247), Budin Constantin (1078, 79, 80, 81, 82, 85, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 98, 102), Duţu Gheorghe (1080, 82, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 105, 106, 111, 112, 113, 118, 121, 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 139, 143, 148, 149, 154, 157, 159, 165, 171, 174, 175, 183, 188, 190, E: 369, 370, 372, 372, 378, 379, 384, 389, 391, 398, 404, 409, 411, 412, 418, 421, 423, 425, 426, 427, 428, 429, 431), Gavrilenco Leonard (1058, 62, 68, 78, 79, 81, 84, 98, 103, 105, 106, E: 356, 358, 361, 362, 378, 381, 382, 383), Grabcev D. Boris (1082, 83, 87, 88, 89, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 106, 111, P), Uţă Marin (1045, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 100, 102, 103, 105, 106, 112, 113, 118, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 133, 137, 140, 143, 148, 149, 154, 157, 159, 165, 171, 174, 175, 183, 188, 190, P).

PUCIOASA (Ploeşti). Clasa VIII-a. Bucur D. Gheorghe (E: 401, 402, 411, 448, 449, 450, 451, 452, 454, 457, 460).

RIMNICUL SĂRAT. Clasa VIII-a. Cristea Aurel (1127, 128, 141, 148, 152, 159, 183, 191, 245, E: 384, 385, 386, 390, 391, 401, 403, 407, 411, 412, 418, 421, 424, 428, 448, 451, 457, 459, 460, 465, 470).

RIMNICUL VILCEA. Clasa XI-a. Popescu Constantin (1143, 149, 152, 165, 241, 246, 247, 249, E: 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 377, 379, 380, 381, 382, 387, 388, 389, 391, 392, 394, 395, 396, 397, 399, 400), Roşianu Dragomir (1019, 96, 118, 143, 151, 159, 162, 163, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 173, 175, 176, 183, 188, 191, 202, 203, 204, 207, 208, 240, 243, 244, 245, 247, E: 400, 404, 426, 429, 445, 447, 451, 454, 457, 460).

REŞIŢA. Clasa X-a. Colojoară Ion (1079, 80, 81, 82, 86—89, 93, 96, 102 104, 106, 107, 109, 110, 113, 114, 126); Clasa XI-a. Popescu Alex. Dan. (1059, 68, 73, 83, 91, 111, 115, 123, 128, 140, 143, 150, 152, 154, 157, 159, 162, 163, 165, 166, 171, 173, 175, 179, 183, 185, 186, 188, 189, 190, 192, 195, 201, 203, 204, 209, 211, P).

ROMAN. Clasa IX-a. Gavriluț Mihail (1001, 2, 33, 38, 69, 78, 81, 87, 95, 96, 98, 99, 106, 118, 121, 128, 129, 130, E: 315, 318, 324, 326, 328, 331, 335, 341, 343, 346, 349, 353, 356, 357, 360, 363, 373, 374, 375, 378, 380, 386, 387, 389, 390, 391, 392, 394, 396, 398, 426—430, 432, 434, 436, 437, 439, 441, 442, 443, 444), Juncu Gelu (1035, 46, 78, 80, 81, 84, 88, E: 344, 351, 386, 387, 389, 391, 398, 414, 418, 425); clasa XIa. Mihăilă Ieronim (1078—85, 88—90, 98, 102, 128, 137, 149, 159, 162, E: 369—375, 377—383, 391, 396, 398, 402, 404); anul III. Căluianu G. Nicolae (1084, 85, 89, 91, 95, 96, 97, 107, 113, 118, 126, 136, 139, 151, 183, 222, 240, 245, 247, E: 401, 408, 425, 426—446).

SATU MARE. Clasa VII-a. Benea Aurel (1152, 203, 241, 245, E: 402, 405, 409, 415, 421, 447, 449, 451, 454, 456, 458, 460, 470), Mareș Ilieș (1159, E, 409, 411, 412, 413, 415, 418, 419, 421, 447, 449, 454); anul II. Bacalu Ioan (1161, 165, 179, 181, 186, 190, 193, 194, 195, 203, 208, 209, 221, 222, 226, 239, 240, 245k 246, 247).

SIBIU. Anul II s. m. construcții. Murgulescu Mihai (1149, E: 401 402, 404, 405, 408, 418, 451, 459, 460), Zimmermann N. (212, E: 448—451, 454, 455, 456, 459, 460).

SLATINA. Clasa IX-a. Antonescu Păun (1126, 127, 159, 245, 246, 247, E: 389, 391, 398, 400, 407), Gheorghe M. Ioan (1121, 127, 143, 152, 159, 183, 211, 221, 239, 240, 244, 246, 247, E: 389, 391, 392, 394, 398, 402, 404, 409, 411, 412, 415, 418, 419, 424, 429, 441, 445, 447, 452, 458), Ursu G. Mihai (1098, 121, 143, 165, 183, 207, 211, 216, 226, 227, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247, E: 389, 391, 394, 397, 399, 407, 409, 418, 426, 429, 431, 441, 449, 452, 455, 465, 470).

SUCEAVA. Clasa V-a. Rotaru Nicolae (E: 400, 401, 419, 420, 448, 450, 452, 453, 454, 455, 457, 459, 460, 463, 466, 467, 469, 470); clasa IX-a. Rotaru Constantin (1085, 112, 118, 174, 184, 191, 195, 199, 214, 216, 217, 219, 231, 239, 242, 243, 245, 247, E: 419, 420, 450, 452, 453, 454, 455, 457, 460, 461, 466, 467, 470, P), Păiculean Ion (1183, 145, 149, 152, 157, 159, 162, 165, 169, 183, 191, 204, 214, 217, 240, 241, 245, 247, E: 384, 387, 389, 391, 392, 393, 397, 398, 400, 403, 407, 411, 412, 447, 448, 449, 454); clasa XIa. Budai Teodor (1096, 97, 121, 123, 148, 149, 151, 154, 157, 158, 161, 162, 164, 165, 169 , 179,183, 184, 185, 186, 191, 194, 203, 204, E: 383, 395, 399, 402, 403, 404, 407, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 418, 420, 422, 447, 448, P).

TIRGOVIȘTE. Clasa VIII-a. Stănciulescu Mihai (E: 411, 412, 426, 427, 428, 434, 436, 438, 447); clasa IX-a. Brebente Corneliu (1053, 54, 65, 68, 69, 76, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 93, 94, 95, 98, 102, 106, 111, 118, 119, 120, 126, 139), Brebu Gheorghe (1078, 80, 81, 82, 84, 88, 92, 93, 94, 95, 98, 100, 104, 107, 109, 119, 123, 124, 126, 128, 140, 141, 152, 153, 159, 162, 165, 166, 167), Oprea Aurelian (1031, 41, 88, 112, 124, 125, 140, 143, 152, 154, 159, 161, 165, 173, 183, 185), Stoian Gheorghe (1104, 118, 119, 124, 127, 128, 140, 143, 144, 148, 149, 151, 152, 154, 155, 161, 165, 168, 170, 171, 73, 175, 179, 183); clasa X-a. Mateescu Marin (1088, 89, 90, 173, 239, 240, 241, 244, 245, 246, 247); clasa XI-a. Ionescu Ion (1000, 1, 2, 3, 4, 9, 18, 36, 37, 54), Nica Ion (1054, 85, 87, 88, 98, 124, 149, 152, 165, 175, 179, 183).

TIRGU JIU. Clasa VIII-a. Amzulescu Liana (1098, 221, 243, 245, 246, E: 356, 369, 378, 457, 458, 466, 469, 470, 471, 473, 475, 479); clasa X-a. Gornoviceanu Coriolan (1084, 120, 125, 128, 152, 165, 183, 185, 189, 204, 244, 245, 246, 247).

TIRGU MUREȘ. Clasa X-a. Mărginean Nicolae (1165, 183, 191, 247, E: 403, 404, 405, 417, 418, 459, 470).

TECUCI. Clasa IX-a. Grecu Eugen (1183, 221, 243, 245, 247, E: 404, 407, 409, 411, 415, 418); clasa X-a. Morozan Teodor (1102, 111, 122, 142, 145, 175, 194, 209, 211).

TIMIȘOARA. Liceul 1 băieți. Clasa VII-a. Mihăileanu N. Constantin (E: 424, 447, 448, 449, 457, 458, 459, 460, 462, 463, 466, 476, 477, 478); clasa IX-a. Arsenovici Tiberiu (1152, E: 401, 402, 403, 406, 407, 409, 411, 412, 415, 418); anul III. Flincher Gheorghe (1199, 200, 201, 204, 207, 212, 213, 221, 239, 240, 242), Matter Martin (1159, E: 386, 389, 391, 395, 396, 398, 400, 401, 402, 408); anul IV. Mănescu Răzvan (1121, 152, 159, 165, 183, E: 384, 385, 386, 387, 389, 390, 392, 394, 396, 397, 398, 399, 400, 406, 407), Fuia Hristu (1121, 152, 159, 165, 183, 208, E: 384, 387, 389, 392, 394, 397, 406, 407).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. Surdulescu Radu (1165, 183, E: 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418), Filimon Ștefan (1078, 79, 80, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 106, 118, 144, 49, 52, 165).

VASLUI. Clasa IX-a. Stăncescu Viorel (1065, 68, 69, 78, 127, 165, 183, E: 354, 361, 364, 381, 382, 384, 385, 386, 388, 389, 390, 391); clasa XI-a. Bostan Hote (1118, 124, 125, 127, 128, 129, 131, 140, 143, 145, 148, 149, 151, 152, 154, 159, 165, 166—170, 172, 173, 174, 175, 183, 189, 190, 191, 201, 202, 203, 208, 211, 239, 240, 243, 245, 247).

ZĂLĂU. Clasa VII-a. Moratti Cornel (E: 411, 412, 416, 425, 428, 429, 447, 454, 455, 457, 459, 460, 462, 463, 470); clasa VIII-a. Farcaș Beniamin (E: 416, 417, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 442, 443), Gherman Mircea (E: 418, 425, 426, 427, 428, 429, 434, 439, 441, 444).

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie; iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complect și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F. seria B.*

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele patru numere apărute.

— *Soluțiile ce se vor anunța* la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1954, se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1954.

— *După apariția numărului 10* al G.M.F. seria B, corespondenții evidențiați în cursul anului 1954 sînt rugați să-și întocmească cîte o fișă cuprinzînd numele, adresa lor actuală și tabelul cu toate problemele ce au rezolvat, *așezate în ordinea lor numerică și* care au fost anunțate la rubrica rezolvitorilor în numerele 1—10, apoi să o trimită redacției în plicul cu alte probleme rezolvate, în vederea *clasificării și premierii pe anul 1954.*

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse, mai există publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *In redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori, aceste reguli îndeplinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *Corespondentul nostru* care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă scoasă dintr-o observare făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele și în fine, cei mai avansați pot să ne trimită și cîte un articol cu o chestiune generală sau cu o apropiere originală între chestiuni cunoscute. Aceste note sau articole este bine să fie refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise pentru a evita ca în expunerea făcută să fie scrise vorbe fără rost, iar ideile trebuie să deștepte interes pentru cititor.

— *Ordinea și îngrijirea* în prezentarea unei idei pot fi îndeplinite dacă harnicul nostru corespondent a făcut mai multe rezolvări, dacă a citit și a înțeles deplin, multe din soluțiile și articolele publicate și dacă a studiat îndeajuns chestiunea de care se ocupă.

— *Tovarășii colaboratori* elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra activității cercurilor de matematică sau de fizică la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « Olimpiadei matematice », pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu triajul sau întîrzierea revistei se pot face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a Presei din București, str. Constantin Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat a face cunoscută revista și altora și a ne trimite propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Marcuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ SERIA B PE ANUL 1954

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 10 (12 numere)

C. 955. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul **Lei 1** exemplarul

E 1426
01

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
ОБМЕН - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Országos Műszaki Könyvtár
TULAJDONA

Anul V — octombrie 1954

10

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul V, Nr. 10 — octombrie 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Luna prieteniei romîno-sovietice*	361
2.	*Din opera marelui fizician sovietic S. I. Vavilov*	363
3.	*Despre vectori de conf. univ. N. Mihăilă*	366
4.	*Spectroscopia şi aplicaţiile ei (urmare) de Virgil Atanasiu*	372
5.	*Asupra valorilor reale ale unor funcţii de variabilă reală de C. Ionescu-Ţiu*	381
6.	*Construirea unui polariscop de N. Stănescu*	385
7.	*Chestiuni de examen (1372—1386)*	387
8.	*Probleme rezolvate (E: 413, 284, 1136, 1141, 1155, 1157, 1160, 1162, 1165)*	389
9.	*Probleme propuse (1387—1407)*	394
10.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 550—E: 562)*	397
11.	*Poşta redacţiei*	399
12.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	400

ANUL V (10) OCT. 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Spiru Haret, 12 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi de fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár MARBOMA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL V * Nr. 10 octombrie 1954

LUNA PRIETENIEI ROMÎNO-SOVIETICE

POPORUL nostru întîmpină în fiecare an, cu deosebită mîndrie, tradiţionala sărbătoare a « Lunii Prieteniei Romîno-Sovietice ». Această sărbătoare culminează cu aceea a zilei de « 7 Noembrie », aniversarea Marei Revoluţii Socialiste din Octombrie care a deschis o nouă eră în istoria omenirii.

Prietenia dintre poporul nostru şi marele popor rus are rădăcini adînci în trecut. Lupta comună împotriva cotropitorilor otomani, precum şi existenţa unor împrejurări istorice favorabile, au făcut să se creeze strînse relaţii economice, politice şi culturale romîno-ruse. Numai datorită sprijinului hotărît al armatelor ruse a izbutit poporul nostru să-şi cucerească în 1877, independenţa de stat.

Seculara prietenie dintre poporul romîn şi popoarele U.R.S.S. a căpătat o nouă bază prin eliberarea patriei noastre de către armatele sovietice.

Cucerirea unei adevărate independenţe naţionale, crearea regimului democrat-popular, se datoresc eliberării ţării şi sprijinului frăţesc acordat poporului nostru de către Marea Uniune Sovietică.

Un şir de mari realizări a fost obţinut în opera de construire a socialismului. La baza acestor realizări stă munca devotată plină de avînt patriotic a clasei muncitoare, aliată cu ţărănimea muncitoare, stă ajutorul continuu şi neprecupeţit al Uniunii Sovietice; acest ajutor ne-a dat posibilitatea să obţinem importante succese în opera de lichidare a înapoierii economice şi culturale a ţării, înapoiere lăsată moştenire de trecutul regim burghezo-moşieresc; ajutorul U.R.S.S. nu numai că a contribuit la înzestrarea industriei noastre cu uriaşe cantităţi de maşini din cele mai perfecţionate şi mai ieftine, dar a creat şi posibilitatea ca ţara noastră să devină o ţară producătoare de maşini şi utilaj pentru agricultură, pentru industria petroliferă, industria uşoară, etc. avînd chiar disponibilităţi pentru export.

In întreprinderile noastre, alături de perfecţionările şi inovaţiile tehnice rod al spiritului creator al poporului romîn, se aplică procedee şi metode înaintate sovietice care duc la o mai mare productivitate a muncii, la un mai mare venit al oamenilor muncii şi în consecinţă la îmbunătăţirea condiţiilor de trai.

Uniunea Sovietică — pe drept cuvînt numită centrul culturii şi ştiinţei universale, prin oamenii ei de ştiinţă — este de o imensă importanţă pentru creaţia ştiinţifică şi tehnică din ţara noastră. Oamenii de ştiinţă din institutele de cercetări elaborează noi procedee tehnologice care se aplică în industrie, folosind metode de cercetări, analize şi aparate realizate în Uniunea Sovietică.

Pentru însuşirea ştiinţei şi tehnicii sovieticii stau la dispoziţia oamenilor de ştiinţă, a inginerilor şi tehnicienilor, a muncitorilor, documentaţia, literatura de

pecialitate sovietică. Cartea sovietică ne învață să folosim tot mai din plin și mai rațional resursele de producție, să gospodărim mai chibzuit, să dezvoltăm armonios toate ramurile economiei naționale, să folosim și să aplicăm metodele înaintate ale raționalizatorilor și fruntașilor în întrecerea socialistă. Avîntul vertiginos al producției noastre editoriale în domeniul științei și tehnicii — expresie a capacității de creație a oamenilor noștri de știință, a geniului creator al poporului nostru — este strîns legată de cunoașterea și aplicarea științei sovietice.

Tineretul nostru, avînd la baza pregătirii sale concepția științifică despre natură și societate, avînd în fața sa mărețul exemplu al comsomoliștilor sovietici, contribuie prin munca și lupta sa la opera de construire a socialismului.

Cît de izbitor este contrastul între situația țării noastre, a tuturor țărilor lagărului democrat și situația țărilor din lagărul imperialist unde șomajul de masă, haosul, stagnarea și ruina economică înrăutățesc continuu viața celor ce muncesc.

Fiecare om conștient, cinstit, din patria noastră, știe că pacea, libertatea și înflorirea țării, fericirea propriei sale familii îi sînt chezășuite de prietenia și alianța de nezdruncinat cu marele popor sovietic, de superioritatea socialismului pe arena mondială, de victoriile internaționale ale uriașului lagăr democrat în frunte cu Uniunea Sovietică.

Iată pentru ce în inima poporului nostru este mai vie ca oricînd flacăra dragostei și recunoștinței față de Marea Uniune Sovietică.

« Luna Prieteniei Romîno-Sovietice » nu este numai o mare sărbătoare, ci și un prilej de a cunoaște și mai adînc politica gloriosului Partid Comunist al Uniunii Sovietice și a Statului sovietic, realizările istorice ale oamenilor sovietici, de a extinde și a aplica experiența lor, cu succes, în toate domeniile.

Pentru tineretul studios din patria noastră, « Luna Prieteniei Romîno-Sovietice » înseamnă un prilej de adîncă recunoștință față de marea noastră prietenă care, a înțeles să pună la dispoziția lui toată experiența prețioasă a școlii sovietice, lucrările de valoare din domeniul matematicii și fizicii, metodicele sovietice, lucrările de popularizare științifică, revistele, etc. Toate acestea, au contribuit și contribuie la educarea tineretului nostru, la formarea viitoarelor cadre științifice și tehnice necesare construirii unei vieți noi.

In anul acesta, sărbătorirea lunii prieteniei romîno-sovietice are loc în condițiile întăririi continue a forțelor păcii. Prin succesele obținute la conferința de la Geneva, acordurile încheiate cu privire la restabilirea păcii în Indochina, prin respingerea de către parlamentul francez a tratatului cu privire la « comunitatea defensivă europeană » frontul partizanilor păcii s-a consolidat.

Această sărbătorire are loc de asemenea, în condițiile pregătirii și desfășurării celui de-al II-lea Congres al Partidului Muncitoresc Romîn. In întîmpinarea congresului, oamenii muncii își întețesc eforturile în lupta pentru dobîndirea de noi succese în construcția economică și culturală, exprimîndu-și astfel dragostea și devotamentul față de Partidul Muncitoresc Romîn, conducătorul de nădejde al poporului.

Oamenii muncii știu că toate marile realizări înfăptuite în decursul ultimului deceniu se datoresc conducerii de către partid; ei văd în întărirea continuă a partidului, chezășia îndeplinirii tuturor sarcinilor economice, politice și sociale care stau în fața poporului nostru, pe drumul construirii socialismului.

Acestui scop îi servește noul Statut modificat al P.M.R. al cărui proiect va fi supus discuțiilor și aprobării celui de-al doilea congres al partidului, precum și directivele cu privire la dezvoltarea agriculturii în următorii 2—3 ani. Adaptarea

acestor directive şi traducerea lor în viaţă vor deschide perspectivele unei noi şi puternice dezvoltări a agriculturii în scopul unei mai bune aprovizionări a populaţiei cu produse agricole, al dezvoltării generale a economiei naţionale.

«Luna Prieteniei Romîno-Sovietice» este un prilej, pentru a intensifica lămurirea concretă, vie, documentată, în rîndurile celor mai largi mase, a politicii consecvente de pace a Uniunii Sovietice.

Mai puternică decît oricînd, Uniunea Sovietică este astăzi pentru toată omenirea iubitoare de pace, bastionul de neînvins al păcii şi libertăţii popoarelor, al colaborării internaţionale, al progresului.

Prietenia şi alianţa ţării noastre cu Marea Uniune Sovietică şi ţările lagărului democrat are la bază politica comună, consecventă de apărare a păcii.

«Luna Prieteniei Romîno-Sovietice» înseamnă pe plan naţional şi internaţional, o expresie a superiorităţii relaţiilor de tip nou dintre ţările lagărului democrat în frunte cu U.R.S.S., o expresie a hotărîrii poporului nostru de a-şi făuri o viaţă tot mai bună, de a contribui puternic în strînsă prietenie şi alianţă cu Uniunea Sovietică, cu ţările de democraţie populară, la biruinţa cauzei păcii şi colaborării între toate popoarele lumii.

DIN ISTORIA ŞTIINŢEI

DESPRE OPERA MARELUI FIZICIAN SOVIETIC S. I. VAVILOV

S. I. VAVILOV face parte din strălucita pleiadă de fizicieni care s-au format în noile condiţii create ştiinţei de către Statul Sovietic după Marea Revoluţie din Octombrie.

Prin lucrările sale cu renume mondial şi prin lupta sa neobosită pentru pace şi progres, academicianul Serghei Ivanovici Vavilov întruchipa trăsăturile caracteristice ale unui savant şi patriot sovietic, iar moartea sa prematură la 25 ianuarie 1951, a însemnat o mare pierdere pentru ştiinţa sovietică şi cea universală.

S. I. Vavilov a fost un fizician strălucit şi multilateral, un pătrunzător cercetător al celor mai speciale domenii ale fizicii, privind optica fizică, optica fiziologică, razele X, fizica nucleară, optotehnica, radiotehnica, etc. Totuşi, acest vestit fizician nu s-a închis în cadrul domeniilor speciale ale fizicii pe care le-a aprofundat şi le-a dezvoltat în lumina materialismului dialectic, ci a acordat atenţia cuvenită şi problemelor generale de istorie a ştiinţei, precum şi sarcinilor ce reveneau ştiinţei pentru ridicarea nivelului de viaţă a poporului muncitor.

Activitatea lui ştiinţifică s-a desfăşurat după principiul pentru care a luptat cu deosebit succes toată viaţa lui şi anume, că ştiinţa să fie strîns legată de practică, de viaţă.

Academia de Ştiinţe a U.R.S.S., al cărui preşedinte a fost S. I. Vavilov pînă la moartea sa, a planificat activitatea ştiinţifică, considerată fiind ca o parte organică a planului economic al ţării întregi.

Cercetarea ştiinţifică nu poate fi socotită o ocupaţie ruptă de efortul poporului sovietic pentru a înfăptui măreaţa sa sarcină istorică, construirea

comunismului, ci trebuie să fie legată de acest efort şi să-l sprijine pas cu pas. Pentru a pune ştiinţa în slujba noii societăţi, în Uniunea Sovietică au fost create numeroase institute de cercetări fizico-tehnice.

Capacitatea de organizare a lui S. I. Vavilov s-a dovedit prin modul de conducere, înzestrare şi organizare a institutelor de cercetări fizico-tehnice ale Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi mai ales prin randamentul ridicat pe care l-au dat aceste institute. Elev şi apoi colaborator al strălucitului experimentator şi învăţat progresist P. N. Lebedev, care a demonstrat cel dintîi existenţa presiunii luminii, S. I. Vavilov s-a ocupat de tînăr de problemele de optică cercetînd «culoarea termică a coloranţilor». Activitatea sa de bază a fost însă în domeniul fotoluminiscenţei, precum şi a aplicaţiilor ei în tehnica iluminatului cu substanţe luminiscente. Toate aceste probleme au fost studiate de S. I. Vavilov şi şcoala creată de el, reuşind să rezolve multe din ele şi indicînd pentru altele calea de urmat pentru rezolvarea lor.

Cum am mai spus, domeniul preferat al cercetătorului S. I. Vavilov a fost fotoluminiscenţa în formele ei cele mai variate. Aceste studii au dus la descoperirea unui nou fel de radiaţie în lichide, de către P. A. Cerencov. Academicianul S. I. Vavilov a dovedit că nu este vorba de un fenomen de luminiscenţă, ci de un efect nou necunoscut pînă atunci, care a fost numit efect Cerencov.

Un alt domeniu de cercetări al lui S. I. Vavilov îl formează observaţiile vizuale ale fluctuaţiilor cuantice ale luminii în care Vavilov se dovedeşte de asemenea, deschizător de drumuri noi în fizică.

Pe baza teoriei cuantelor, Vavilov şi şcoala lui, au adus o bogată contribuţie la interpretarea justă a fenomenelor de bază ale fotoluminiscenţei. Vavilov a precizat definiţia luminiscenţei prin introducerea unui parametru care-i este caracteristic şi permite delimitarea netă între luminiscenţă şi alte efecte înrudite. Acest factor este durata de viaţă a stării excitate a moleculelor. Vavilov şi şcoala lui au studiat mai ales luminiscenţa soluţiilor, care permite cercetarea ciocnirii dintre molecule, a rezonanţei între moleculele excitate şi neexcitate, ceea ce duce la stabilirea structurii moleculelor. Prin fotoluminiscenţă se pot studia în general, multe aspecte ale comportării lichidelor ca, vîscozitatea, disociaţia electrolitică, structura pseudocristalină, lărgirea nivelelor energetice, etc. ceea ce duce la studierea stării lichide, în general.

Studiind parametrii caracteristici ai luminiscenţei soluţiilor ca: spectrul de fluorescenţă, intensitatea, polarizarea şi durata, Vavilov şi şcoala sa au reuşit să rezolve foarte multe aspecte ale acestor fenomene aşa de complexe. Astfel, ei au dovedit că randamentul nu depinde de lungimea de undă a radiaţiei excitate, că spectrele de polarizaţie sînt foarte variate şi sînt legate de structura anizotropă a moleculelor şi că durata nu depinde de frecvenţa excitatoare.

Faptul că unele molecule prezintă fenomenul de fotoluminiscenţă, iar altele nu, este o problemă care n-a fost soluţionată în totalitatea ei pînă în prezent. Ea a fost însă, soluţionată parţial de către şcoala lui Vavilov. Acolo unde nu apare fluorescenţa, energia de excitaţie trece în energie de oscilaţie sau de rotaţie a moleculelor, sau trece în energie de disociere fotochimică a moleculei, ori este transmisă într-un fel sau altul moleculelor dizol-

vantului. Este de remarcat apariţia luminiscenţei la unele molecule organicc dizolvate în licbide foarte vîscoase. Se pare că vîscozitatea dizolvantului face imposibilă mişcarea de rotaţie a moleculelor, încît energia absorbită serveşte la excitarea moleculelor dînd naştere la fluorescenţa lor.

Contribuţia lui V a v i l o v este valoroasă şi la explicarea fenomenului complicat de dependenţă a randamentului fluorescenţei în funcţie de diverşi factori, cum ar fi temperatura, şi adausurile străine în soluţie. El a arătat că fenomenul constă în transmiterea energiei de excitaţie a moleculelor prin ciocniri neelastice, moleculelor corpurilor străine. Teoria elaborată de V a v i l o v este în concordanţă cu datele experimentale.

Aceasta reprezintă o sumară prezentare a lucrărilor lui S. I. V a v i l o v în domeniul vast şi complicat al fluorescenţei soluţiilor, lucrări care servesc astăzi, ca îndreptar acelora care se ocupă cu studiul acestei ramuri a opticei fizice. Activitatea aşa de rodnică şi valoroasă a lui V a v i l o v asupra fotoluminiscenţei soluţiilor a fost distinsă cu Premiul Stalin.

S. I. V a v i l o v a înţeles necesitatea unei legături trainice între gîndirea abstractă, între teorie, practică şi tehnică. El a contribuit astfel, la aplicarea industrială a rezultatelor obţinute de el personal şi şcoala sa, în domeniul luminiscenţei.

Sub conducerea personală a lui S. I. V a v i l o v, s-a creat în U.R.S.S. tehnologia producţiei lămpilor care dau aşa numita lumină de zi sau lumină rece, a lămpilor fluorescente. Faţă de lămpile incandescente, acest nou izvor de lumină prezintă două mari avantaje: pe de o parte au randamentul luminos de 3—4 ori mai mare decît al becurilor obişnuite, căci nu risipesc energie sub formă de căldură, iar pe de altă parte, oferă posibilitatea de a li se modifica compoziţia spectrală a luminii emise, cu ajutorul diferiţilor luminofori. În felul acesta se obţine un izvor de lumină ieftină şi higienică, avînd aceiaşi compoziţie spectrală cu lumina solară.

Analiza luminiscentă este a doua mare aplicaţie tehnică a luminiscenţei, metodă de analiză elaborată sub conducerea lui V a v i l o v. Analiza luminiscentă este folosită mult la cercetarea zăcămintelor de bitum, la analiza rapidă a probelor de roce şi la cercetarea zăcămintelor de petrol.

Institutul de optică din Leningrad a elaborat sub directiva lui V a v i l o v, metoda de analiză luminiscentă pentru sortarea sticlelor optice. Metoda permite recunoaşterea şi clasificarea rapidă a sticlelor, putîndu-se analiza a peste 1000 probe de sticlă în 8 ore, comparînd luminiscenţa lor cu aceea a etaloanelor.

Analiza luminiscentă se foloseşte şi în defectoscopia metalelor neferoase, putîndu-se pune uşor în evidenţă fisuri şi alte defecte de fabricaţie a pieselor metalice.

Dar S. I. V a v i l o v a deschis drumuri noi în fizică prin cercetările sale în alt domeniu, acela al observaţiei vizuale a fluctuaţiilor cuantice ale luminii. El a elaborat o metodă nouă de observare a acestor fluctuaţii cuantice ale energiei luminoase, lucrînd cu fascicule luminoase foarte slabe, la pragul percepţiei vizuale, cînd ochiul observatorului primeşte un număr redus de fotoni. Printr-o serie de experienţe delicate bazate pe această metodă de «fotometrie de prag», V a v i l o v a reuşit să demonstreze neîndoielnic natura discontinuă a luminii. Principiul metodei constă în a observa la pragul vizual, un flux luminos slab, încît din cauza fluctuaţiilor

statistice numărul fotonilor devine cînd mai mare, cînd mai mic față de pragul senzației vizuale.

S. I. Vavilov dovedește că radiația în lichide, descoperită de P. A. Cerencov, elevul său, nu este un caz de luminiscență, ci un fapt nou, care constă în radiația emisă de un electron care se mișcă uniform într-un mediu dielectric, cu o viteză mai mare decît viteza luminii în acel mediu. Teoria cantitativă a fenomenului a fost elaborată de Vavilov, Tamm și Frank. Acest fenomen este analog cu fenomenul electromagnetic al undelor de șoc care apar la mișcarea supersonică a unui corp în aer. Pentru această descoperire așa de importantă, Vavilov și colaboratorii săi au fost distinși cu Premiul Stalin, gradul I, în anul 1946.

Dar marele om de cultură S. I. Vavilov s-a preocupat nu numai de formarea cadrelor de fizicieni, ci a scris cărți și articole de popularizare, prin care să răspîndească știința în cele mai largi mase populare. Menționăm cartea frumoasă «Ochiul și soarele», apărută și în limba romînă, apoi «Despre lumina caldă și rece», «Microstructura luminii», etc.

S. I. Vavilov a fost un înfocat patriot și om de stat activ, luptător neobosit al mișcării partizanilor păcii din întreaga lume, ținînd astfel o strînsă legătură cu masele largi ale poporului, care l-au ales deputat al Sovietului Suprem al U.R.S.S. El este un exemplu viu și luminos pentru toți oamenii de știință sovietici și pentru oamenii de știință progresiști din întreaga lume.

DESPRE VECTORI

Conf. univ N. MIHĂILĂ

In procesul de creare a științelor, omul a căutat să-și explice fenomenele naturii precum și legile lor de desfășurare, atît sub aspectul *calitativ* cît și sub cel *cantitativ*.

Noțiunea de *mărime* s-a impus printre primele elemente, drept rezultat ce caracterizează investigația minții omenești asupra naturii.

In strădania de închegare a științei de-a lungul timpurilor, mărimile au apărut sub forme diferite, forme ce reprezintă trepte de cercetare sau grade de aproximare, suficiente la un anumit stadiu de înțelegere al fenomenelor, precum și de cunoaștere a naturii lor intime. Lungimea unei cărări pe care o străbate vînătorul, suprafața unei grădini pe care o cultivă agricultorul, populația unui sat creat din nevoile de sociabilitate ale oamenilor, au fost mărimi pe care viața le-a pus în fața minții omului și pentru a căror exprimare a fost suficientă folosirea unui număr, numit la început număr aritmetic, iar mai tîrziu înglobat în numerele algebrice.

Mărimea care poate fi exprimată printr-un număr algebric este numită mărime scalară. Pentru măsurarea unei astfel de mărimi este de ajuns fixarea unei unități, «scara de măsurare, iar rezultatul poate fi exprimat printr-o singură noțiune: numărul algebric respectiv. Exemplu: 5 km; 2500 oameni; 15°C. Natura însă, ne oferă un număr de mărimi pe care din obișnuință le numim mărimi fizice, ca de pildă: forța (printre care găsim în primul rînd, greutatea corpurilor), viteza și accelerația punctelor unui corp în mișcare,

intensitatea unui cîmp electromagnetic şi multe altele care nu pot fi cuprinse şi exprimate ca atare în mod suficient printr-un număr algebric.

Cînd spunem de exemplu, că un automobil execută o mişcare cu o viteză de 60 km/h, nu cunoaştem decît un aspect al mărimii viteză. In adevăr, pentru cunoaşterea vitezei sînt necesare următoarele elemente:

— locul în spaţiu unde se găseşte automobilul la momentul considerat, adică punctul M (fig. 1 a) căci viteza este a mobilului M şi nu a altor mobile ce s-ar putea afla în spaţiul respectiv la momentul considerat (alte automobile, biciclete, căruţe, pietoni, avioane, etc.). Mai mult, în locul M nu se poate găsi într-un anumit moment decît un singur corp, automobilul nostru;

— direcţia vitezei dată de tangenta tt' la drumul (traiectoria) mobilului, şi nu de altă dreaptă ce face parte din fascicolul ce s-ar putea duce prin M;

— sensul vitezei Mt, dat de sensul mişcării dela A spre B. Ar putea fi Mt', dacă mişcarea pe drum s-ar face dela B spre A;

— intensitatea (modulul) vitezei înregistrată de aparatul de marcat viteza: 60 km/h (şi definită ca drumul în km ce l-ar parcurge mobilul în mişcare rectilinie şi uniform, într-o oră).

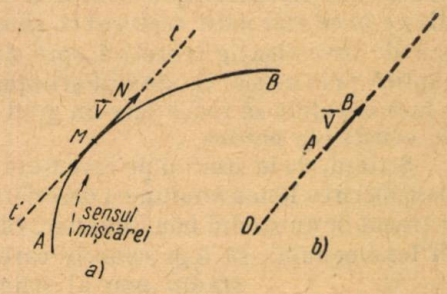


Fig. 1

In procesul de înţelegere a mărimii numită viteză, mintea noastră a făcut în mod tacit o presupunere: automobilul a fost asimilat unui punct M. Se putea ocoli această abstractizare considerînd un punct M aparţinînd automobilului, căruia i se determină viteza.

Pentru reprezentarea vitezei, o imagină geometrică ce s-a impus cu mult succes în spaţiul tridimensional, spaţiul euclidian, lăcaş al fenomenelor fizice, este aceea dată de segmentul orientat MN, concretizat în noţiunea de *vector*.

Se numeşte vector un segment orientat din spaţiu, AB (fig. 1 b) care are:

— *origina* în punctul A extremitatea în punctul D;

— *direcţia*, dată de dreapta sau suportul B;
sensul, dela A spre B;

— *intensitatea (modulul)*, mărimea segmentului geometric AB măsurat la o anumită scară fixată pentru reprezentarea geometrică respectivă.

Un vector se notează de obicei, fie cu două litere alăturate cu o săgeată deasupra $\overrightarrow{AB}$, sau cu simplă linie deasupra lor $\overline{AB}$; în ambele cazuri se începe totdeauna cu originea. Un vector se mai poate nota fie cu o literă $\overrightarrow{V}$, fie cu o literă groasă **a** fără nici un semn suplimentar.

Dintr-un început se observă că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$ au aceleaşi elemente doar sensurile sînt contrarii, deci $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Astfel de vectori se numesc *vectori opuşi*.

Mărimile pentru a căror exprimare se folosesc vectori sînt numite *mărimi vectoriale*.

Noţiunea de vector, datorită în primul rînd imaginei pe care i-o asociem, este formal geometrizată. Această geometrizare are însă, un substrat mai adînc.

In adevăr, fenomenele sub orice formă s-ar prezenta sînt aspecte ale materiei în mişcare. Vectorul reprezintă un fenomen într-o formă mai complexă: el ne arată unde se desfăşoară, care este direcţia şi sensul fenomenului, al mişcării, cu ce intensitate se desfăşoară. Spaţiul şi timpul reflectă proprietăţi generale ale materiei în mişcare, iar geometria traduce prin elementele ei de bază aspectul spaţial al naturii. Acest aspect poate fi redat şi de vector. De aici rezultă o geometrizare a vectorului sau, inversînd, o vectorializare a geometriei. Vectorul însă, mai mult decît elementele de bază ale geometriei, reuşeşte să redea într-un grad mai înaintat materia în mişcare, redă în mod mai complet aspectul realităţii. Faptul că ştiinţele naturii fizice folosesc din ce în ce mai mult vectorul ca element de traducere a fenomenului cercetat, sau de investigaţie teoretică spre noi descoperiri, nu este întîmplător, ci se explică prin aceea că stadiul ştiinţei a atins acea treaptă de dezvoltare care o face capabilă să redea într-un grad mai înalt, aspectul de mişcare al materiei ce constituie natura.

Ştiinţa, de la stadiul pe care l-am putea numi static, şi care se mulţumea cu descoperirea fenomenului, cu descrierea lui şi a condiţiilor locale de desfăşurare, a trecut la un stadiu nou, dinamic, care caută să găsească sensul de desfăşurare al fenomenului, să lege cauzele care-l produc de efectele respective. Acestui stadiu nou al ştiinţei îi era necesar un instrument nou de redare a mărimilor, care a fost realizat de vector, precum şi un calcul cu aceste mărimi, calculul vectorial, care traduce într-un mod mai complet aspectul cantitativ al fenomenului.

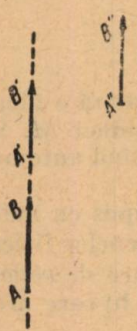


Fig. 2

Rezultatele ştiinţelor, mai ales cele fizico-matematice, prezentate vectorial sînt redate într-o formă mai concisă, mai clară şi mai elegantă. Pentru cercetătorul creator, sau tehnicianul inovator calculul vectorial reprezintă un ajutor preţios în munca lui.

In cele ce urmează vom schiţa cîteva aspecte privind vectorii şi calculul cu ei, care are singura dorinţă de a atrage atenţia celor studioşi asupra a ceea ce sînt vectorii şi cum se lucrează cu ei.

2. *Vectori echipolenţi.* Vectorii *paraleli*, de *acelaşi sens* şi *egali ca intensitate* se numesc *vectori echipolenţi.* Se poate scrie (fig. 2):

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''}$$

3. *Categorii de vectori.* Mărimile fizice vectoriale se prezintă sub forma a trei feluri de vectori:

— *vector liber.* Mai mulţi vectori echipolenţi din spaţiu, care pot fi priviţi ca unul singur caracterizînd o singură mărime fizică, definesc vectorul liber (fig. 2). Ca exemplu de vector liber se prezintă axul unui cuplu. Origina vectorului e arbitrară, iar suportul, orice paralelă la o direcţie dată. La fel intensitatea gravitaţională considerată într-o regiune restrînsă din spaţiu.

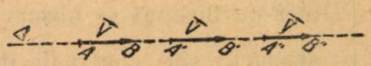


Fig. 3

— *vector alunecător.* Mai mulţi vectori echipolenţi, cu *acelaşi suport* (fig. 3) care pot fi priviţi ca unul singur, caracterizînd o singură mărime fizică, definesc vectorul alunecător. Ca exemplu de vector alunecător citäm forţa aplicată

unui corp solid. Pentru un vector alunecător originea rămîne arbitrară pe suport, deci vectorul poate aluneca de-a lungul dreptei suport.

— *vector legat.* Vectorul definit în fiecare punct din spaţiu prin toate elementele lui, fiind distinct în general, de la un punct la altul, se numeşte vector legat. Ca exemplu de vectori legaţi citãm: momentul unei forţe în raport cu un punct, viteza unui mobil, forţa aplicată unui punct material, greutatea unui corp aplicată în centrul de greutate. Pentru vectorul legat originea îl localizează în punctul de aplicaţie, îl leagă de punctul respectiv din spaţiu.

4. *Contur de vectori.* Se numeşte *contur de vectori*, un contur poligonal al cărui laturi sînt vectori astfel aranjaţi încît extremitatea unuia dintre ei coincide cu originea următorului (fig. 4). Originea primului vector, poartă numele de *originea conturului de vectori*, iar extremitatea ultimului vector, *extremitatea conturului de vectori.*

Vectorul ce închide conturul unind origina cu extremitatea poartă numele de *rezultanta vectorilor* ce constituie conturul de vectori.

5. *Adunarea vectorilor.* Operaţiile pe care le vom *defini* în cele ce urmează, sînt *rezultatul unor observaţii si cercetări experimentale* pe care omul le-a făcut într-un timp îndelungat, lucrînd cu diverse mărimi vectoriale. Compunînd forţe, analizînd viteze, cercetînd momente, s-a desprins natura diferitelor operaţii prin abstractizarea de care este capabilă gîndirea omenească.

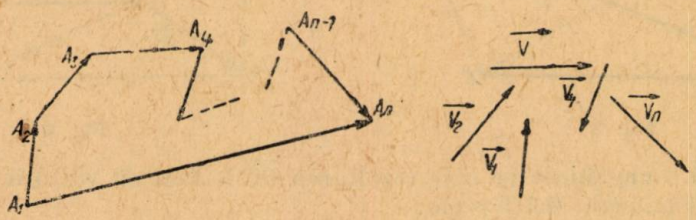


Fig 4.

In definirea operaţiilor vom urma ordinea pe care istoria ştiinţelor cantitative a impus-o şi pe care matematica o practică azi: adunarea, scăderea, etc.

Să considerăm în spaţiu o mulţime finită de vectori $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ... , $\vec{V}_n$ (fig 4), cunoscuţi. Plecînd dintr-un punct oarecare A, luat drept origină construim un contur de vectori ducînd într-o *ordine oarecare* vectori echipolenţi vectorilor consideraţi.

Definim suma vectorilor $\vec{V}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *vectorul* $\vec{V}$ *care este dat de rezultanta* $\vec{A_1A_n}$, adică echipolent cu vectorul ce uneşte origina conturului cu extremiatea lui.

Vectorial operaţia de adunare se scrie:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n \text{ sau } \vec{V} = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

6. *Cazuri particulare.* — a) *Rezultanta a doi vectori.* Doi vectori liberi din cauza echipolenţii, pot fi consideraţi avînd aceiaşi origină. Fie vectorii $\vec{OA}$ şi

$\overrightarrow{OB}$ cu originea în 0 (fig. 5). Ducînd $\overrightarrow{AC}$ echipolent cu $\overrightarrow{OB}$, conturul OAC are drept sumă, vectorul $\overrightarrow{OC}$, deci, *suma celor doi vectori este vectorul reprezentat de diagonala paralelogramului ce pleacă din origina celor doi vectori.*

Construcţia indicată mai sus prin care se găseşte suma a doi vectori, poartă numele de « *regula paralelogramului* ».

In triunghiul OAC avem:

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2\,OA \cdot AC \cos \widehat{OAC},$$

Notînd $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{R}$, unghiul celor doi vectori θ, deci $\widehat{OAC} = 180° - \theta$, avem

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos (180° - \theta) \text{ adică,}$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta$$

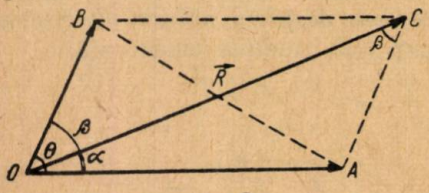


Fig. 5

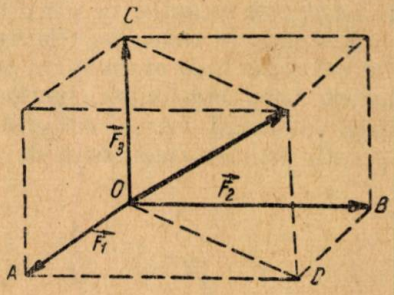


Fig. 6

Fie α şi β unghiurile pe care rezultanta $\overrightarrow{OC}$ le face cu vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$. Din acelaşi triunghi OAC avem:

$$\frac{OC}{\sin (180° - \theta)} = \frac{OA}{\sin \widehat{ACO}} = \frac{AC}{\sin \widehat{AOC}}$$

sau

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha}$$

relaţii cu ajutorul cărora se determină mai ales unghiurile α şi β.

b) *Rezultanta a trei vectori oricum situaţi în spaţiu.* Vom considera că cei trei vectori liberi $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ nu sînt în acelaşi plan (caz care evident, se poate trata în mod asenănător cazului precedent), ci situaţi oricum în spaţiu.

Fie $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ vectorii liberi daţi, sau echipolenţii lor (fig. 6) concurenţi în O. Pentru însumarea lor vom aduna $\overrightarrow{F_1}$, cu $\overrightarrow{F_2}$ şi apoi rezultanta lor cu $\overrightarrow{F_3}$ după regula paralelogramului:

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$$

$$(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}$$

Se observă că dacă se construieşte un paralelipiped care să aibă ca muchii tocmai vectorii $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, *suma* $\vec{F}$ *este tocmai diagonala paralelipipedului ce pleacă din origina vectorilor.*

7. *Scăderea vectorilor.* — Operaţia scăderii se defineşte de obicei, ca operaţia inversă celei de adunare. A scădea un vector $\vec{F}_1$ dintr-un al doilea vector $\vec{F}_2$ înseamnă a găsi un al treilea vector $\vec{F}$ care să satisfacă relaţia $\vec{F}_1 + \vec{F} = \vec{F}_2$.

Fie $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ doi vectori liberi daţi (fig. 7). Printr-un punct oarecare O ducem vectorii echipolenţi $\vec{OA} = \vec{F}_1$ şi $\vec{OB} = \vec{F}_2$. Vom avea:

$$\vec{F}_2 - \vec{F}_1 = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Se observă din figură că vectorul care trebuie adunat cu vectorul $\vec{OA}$ ca să dea vectorul $\vec{OB}$ este tocmai vectorul $\vec{AB}$, deci,

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$$

relaţia care are deseori următoarea interpretare: *un vector raportat la un punct*

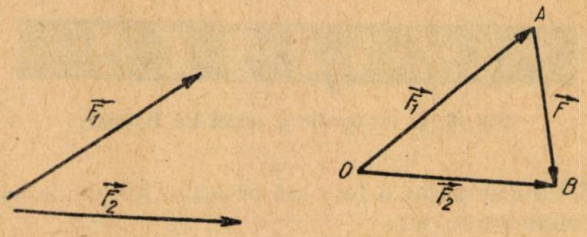


Fig. 7

din spaţiu este dat de diferenţa dintre vectorul ce duce la extremitate şi vectorul care duce la origină.

Observare. In aplicarea regulei paralelogramului diagonala care pleacă din origina vectorilor reprezintă suma vectorilor, iar cealaltă diagonală reprezintă diferenţa lor. In fig. 5, avem $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, iar $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$.

Determinarea mărimii vectorului diferenţă $\vec{F}$ se poate face pe considerente trigonometrice, obţinînd:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \theta.$$

(va urma)

SPECTROSCOPIA ŞI APLICAŢIILE EI

(urmare)

VIRGIL ATANASIU

Spectrul hidrogenului. Teoria lui Bohr.

Forma primitivă a teoriei spectrelor atomice se datoreşte lui Bohr (1913) şi se referă la atomul de hidrogen. Calculul şi desfăşurarea ideilor lui Bohr se bazează pe următorul material experimental: hidrogenul aflat într-un tub Geissler şi supus unei descărcări electrice condensate, produce o lumină roşiatică; aceasta analizată spectroscopic prezintă mai multe linii intense în roşu, albastru, violet şi ultraviolet, ale căror lungimi de undă devin din ce în ce mai vecine (fig. 8) şi tind către o limită situată la 3646 Å. Toate aceste linii formează ceea ce se numeşte seria lui Balmer.

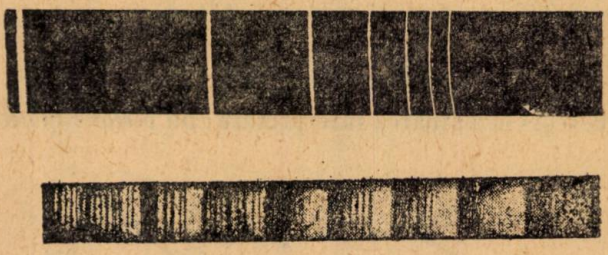


Fig. 8. O fotografie a seriei lui Balmer.

In anul 1885 Balmer a dat o formulă ce leagă lungimile de undă ale diferitelor linii din această serie:

$$\lambda = K\frac{n^2}{n^2-4}$$

unde $K = 364{,}6$ Å şi $n = 3;\ 4;\ \ldots,\ 11$. Dacă introducem în locul lungimii de undă frecvenţa $\nu = \frac{c}{\lambda}$ relaţia se scrie sub forma:

$$\nu = K\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

K fiind o constantă de proporţionalitate. Precizia măsurătorilor spectroscopice ale lui λ întrece cu mult precizia determinării lui c. Deci cauze străine, de spectroscopie tind să imprime o imprecizie numerică în formulele spectroscopice. Pentru a se evita aceasta se întrebuinţează în spectroscopie, în locul frecvenţei ν, cantitatea $N = \frac{1}{\lambda}$ care se numeşte *număr de undă* şi ne arată cîte unde revin pe un cm. Formula lui Balmer devine:

$$N = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3;\ 4;\ldots$$

R fiind o constantă (constanta lui Rydberg) care după datele actuale are valoarea $109677{,}759 \pm 0{,}05\ \text{cm}^{-1}$.

In anul 1905 Lyman a găsit în ultravioletul extrem, mai multe linii spectrale, care aparţin unei serii de tip Balmer:

$$N = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 2; 3; \ldots$$

Liniile cunoscute în număr de 15, sînt situate în ultravioletul depărtat cu lungimi de undă cuprinse între 1215,4 Å şi 915,3 Å.

In anul 1908 Paschen găseşte linii aparţinînd seriei:

$$N = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$n = 4; 5; \ldots$$

Brackett a găsit alte cîteva linii şi a mai descoperit o serie:

$$N = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$n = 5; 6; \ldots$$

iar în 1924 Pfund a completat lista seriilor găsind în infraroşu, primul termen al seriei:

$$N = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 6$$

Toate seriile descoperite succesiv în spectrul atomic al hidrogenului verifică o relaţie unică scrisă sub forma:

$$N = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$n = n' + 1; n' + 2; \ldots$$

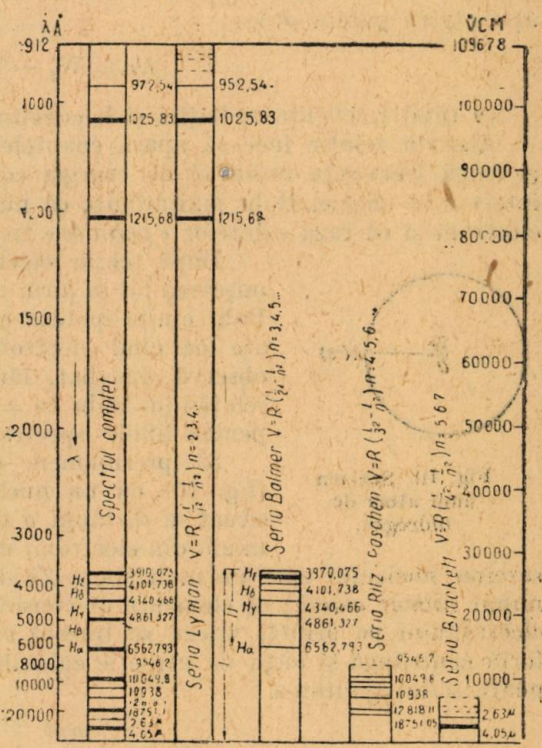


Fig. 9. Spectrul complet al hidrogenului.

Figura 9 reprezintă în mod schematic spectrul complet al hidrogenului şi diferitele lui serii. Se observă că fiecare serie constă dintr-un număr de linii, ale căror distanţe scad spre undele mai scurte tinzînd spre o anumită limită.

In afară de aceasta, Ritz a observat (1908) că numerele de undă ale tuturor liniilor apar ca o diferenţă între două expresii de aceiaşi formă, $\frac{R}{x^2}$, unde x este un număr întreg. El a extins această observare tuturor liniilor spectrale atomice punînd numărul lor de unde sub forma de diferenţă a doi «termeni» spectrali:

$$N = T_{n'} - T_n$$

Această observaţie a lui Ritz poartă numele de *principiul de combinaţie.*

Bazat pe aceste rezultate Bohr a căutat să obţină teoretic formula lui Balmer generalizată. El admite următorul mod de producere al liniilor spectrale (ţinînd seama de modelul atomic al lui Rutherford). Cînd un astfel de atom primeşte energie din afară, adică este excitat, electronul se mută pe o orbită cu rază mai mare. Cînd atomul emite energie, orbita electronului îşi micşorează raza, deci electronul se apropie de nucleu. Dacă W_1 este energia atomului în primul caz şi W_2 în cel de-al doilea, energia emisă de atom este $W_1 - W_2$.

Bohr admite că în cazul cînd această energie se pierde sub formă de radiaţie otpică putem scrie:

$$h\nu = W_1 - W_2$$

(ν fiind frecvenţa radiaţiei şi h constanta lui Planck).

Această relaţie face să apară cuantele de energie introdusă de Planck şi leagă frecvenţa radiaţiei de energia celor două stări ale atomului care intervin în emisie. Bohr mai admite că nu toate orbitele pot fi parcurse de electroni şi că raza orbitelor « *permise* » trebuie să verifice anumite condiţii.

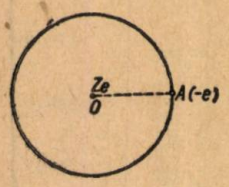


Fig. 10. Schema unui atom de hidrogen.

După teoria electromagnetică clasică electronul în mişcarea lui în jurul nucleului trebuie să piardă energie. Bohr emite ipoteza că această pierdere de energie nu are loc cînd electronul ocupă o orbită « *permisă* » se observă imediat, fără a face vreun calcul că forma relaţiei lui Bohr $h\nu = W_1 - W_2$ nu este în contrazicere pentru liniile spectrale emise, cu principiul lui Ritz.

Să presupunem că avem un atom de hidrogen (fig. 10), cu un nucleu $O(+e)$ şi un electron $A(-e)$ situat la distanţa a de nucleu (cînd studiem mişcarea unuia din electronii unui atom cu mai mulţi electroni sarcina nucleului este un multiplu $+Ze$ al lui e, Z fiind un număr întreg numit *număr atomic*, al elementului considerat). Fie ω viteza unghiulară a electronului pe orbită, viteza sa lineară v este $v = \omega a$. La echilibru, între forţa centrifugă şi forţa de atracţie culombiană dintre nucleu şi electron se poate scrie egalitatea

$$m\omega^2 a = \frac{mv^2}{a} = \frac{Ze^2}{a^2}$$

de unde

$$v^2 = \frac{Ze^2}{ma}$$

Energia totală a atomului este egală cu energia cinetică

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Ze^2}{2a}$$

plus energia potenţială a sarcinii $-e$ în cîmpul creat de sarcina Ze deci, $-\frac{Ze^2}{a}$ sau $W = -\frac{Ze^2}{2a}$. Energia totală este deci negativă, căci trebuie cheltuit lucru mecanic pentru a depărta cele două sarcini una de alta.

Bohr pune acum condiția de stabilitate a orbitelor « permise » și admite că numai acele orbite sînt posibile, pentru care momentul cantității de mișcare a electronului este egal cu un număr întreg de $\frac{h}{2\pi}$,

sau

$$m v a = m \omega a^2 = m \frac{h}{2\pi}$$

eliminînd pe v între această relație și ecuația mișcării, deducem:

$$\frac{m^2 h^2}{4 \pi^2 m^2 a^2} = \frac{Z e^2}{m a} \quad \text{sau} \quad a = n^2 \frac{h^2}{4 \pi^2 m Z e^2}$$

Razele orbitelor « *permise* » sînt proporționale cu patratele numerelor întregi succesive n. In stare normală neexcitată a atomului de hidrogen ($n=1$, $z=1$) introducînd pentru h, m și e valorile cunoscute, Bohr găsește o rază $a_0 = 0{,}532.10^{-2}$ cm.

Introducînd expresia lui a în relația care dă energia se obține:

$$W_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{2 \pi^2 Z^2 m e^2}{h^2} = -\frac{R c h}{n^2} \cdot Z^2$$

de unde constanta lui Rydberg capătă expresia:

$$R = \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^3 c}$$

Bohr găsește prin calcul R = 109700, valoare în excelentă concordanță cu aceea dedusă prin experiență. Aceasta a fost prima verificare cantitativă a teoriei lui Bohr.

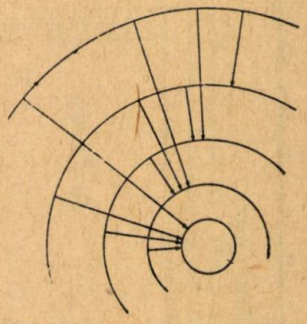


Fig. 11. Reprezentare schematică a orbitelor electronice.

Fig. 11 ne arată schematic orbitele electronice posibile, care corespund diferitelor valori de linii precum și modul în care tranzițiile de pe o orbită pe alta produc liniile spectrale ale atomului de hidrogen. Tranzițiile care se termină pe orbita $n=1$ dau naștere liniilor din seria Lyman; cele care se termină pe orbita $n=2$ dau naștere liniilor din seria Balmer, etc.

Un alt mod de a indica tranzițiile energetice care produc linii spectrale este arătat în fig.12. Nivelele de energie sînt reprezentate prin linii orizontale așezate la înălțimi diferite și depărtate unele de celelalte după o scară reprezentată la marginea figurii. Nivelul cel mai de jos reprezintă energia atomului cu electronul pe orbita $n=1$. Energiile sînt proporționale cu termenii spectrali și ca atare nivelele sînt separate prin distanțe proporționale cu aceștia.

Tranzițiile electronului de pe orbitele cu $n > 1$, pe orbita cu $n=1$ produc liniile din seria Lyman, etc. Liniile verticale ce unesc diferitele nivele de energie ale atomului reprezintă liniile spectrale emise cînd electronul trece de pe un nivel pe altul. Cînd prin cionire cu un electron exterior atomul este excitat astfel încît electronul său trece pe orbita $n = 2$. prin revenire la starea normală el emite prima linie din seria Lyman. Fenomenul se numește *rezonanță* lina emisă se numește *linie de rezonanță*, iar diferența de potențial necesară ca electronul care ciocnește atomul să producă acest

fenomen, se numeşte *potenţial* de *rezonanţă* al atomului de hidrogen. Acest potenţial este de 10,55 volţi.

Dacă electronul care ciocneşte este supus unei diferenţe de potenţial din ce în ce mai mare el transportă electronul atomului pe orbite din ce în ce mai depărtate de nucleu. Cînd diferenţa de potenţial este suficient de mare ca să transporte electronul atomic la o distanţă infinită de nucleu, să-l rupă din atom, se spune că atomul este *ionizat*, iar diferenţa de potenţial corespunzătoare este ceea ce se numeşte *potenţial de ionizare* al atomului. Pentru atomul de hidrogen acest potenţial este de 13,53 volţi. Radiaţia emisă cînd electromul unui atom ionizat revine pe orbita $n = 1$ dă naştere unui spectru continuu atomic situat dincolo de limita seriei Lyman. Dacă electronul atomului ionizat revine pe orbita $n=2$ se obţine un spectru continuu situat dincolo de limita seriei Balmer, etc.

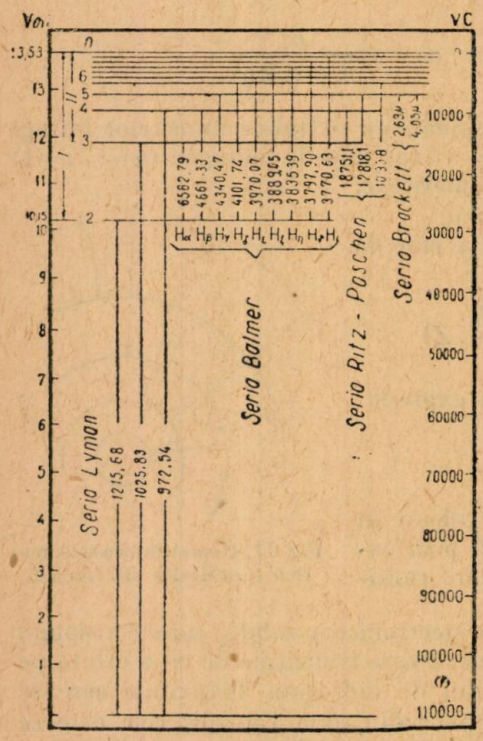


Fig. 12. Diagrama nivelelor de energie ale atomului de hidrogen.

Aceste spectre continue atomice, apar ca o continuare a spectrelor de linii şi se explică teoretic odată cu acestea. In adevăr, limita unei serii este dată de primul termen din formula tip Balmer, cu alte cuvinte, se obţine pentru $n = \infty$, şi reprezintă linia cea mai depărtată din ultraviolet, care aparţine seriei respective. Dacă electronul trece dincolo de orbita extremă, deci se desparte de atom, el va da naştere radiaţiilor luminoase de lungime de undă şi mai scurtă decît aceea a limitei seriei. Energia unui electron despărţit de atom nu mai poate fi cuantificată, deci, nici radiaţia emisă nu va mai apare sub forma de linii discrete, ci va fi continuă.

Numărul n care caracterizează orbita se numeşte *număr cuantic principal*. O orbită care are un număr cuantic principal egal cu 1 se numeşte orbită din stratul K. Electronii cu numere cuantice principale 2, 3, 4 etc. formează stratul L, M, N, etc. Studiul spectrelor de raze X a arătat că toate aceste straturi de orbite sînt multiple afară de stratul K. Pentru a arăta această multiplicitate este necesară introducerea unui al doilea număr cuantic l numit *număr cuantic azimutal*. Valorile lui l sînt: 0, 1, 2, .. n—1. In stratul K electronii sînt determinaţi prin $n=1$, $l=0$, stratul K este deci, simplu. In stratul L pot fi două feluri de electroni: $n=2$, $l=0$, şi $n=2$, $l=1$; stratul L este deci separat în două substraturi L_0 şi L_1. La fel în stratul M sînt trei substraturi M_0, M_1, M_2, etc. Numărul maxim de electroni într-un substrat caracterizat prin $l=l$ este de $2(2l+1)$. In stratul K nu pot fi deci, decît 2 electroni, în stratul L cel mult 8, adică (2+6), în stratul M pot fi cel mult

18, adică (2+6+10), etc.; deci, în stratul cu $n=n$ pot fi cel mult $2n^2$ electroni. Se regăseşte astfel, numărul atomilor din fiecare perioadă a tabloului periodic al elementelor.

Studiul razelor X a arătat că această împărţire în substraturi trebuie completată prin legarea de fiecare electron al unui al treilea număr cuantic care depinde de mişcarea lui de rotaţie în jurul unei axe, ce-l străbate. Acest număr cuantic S are, oricare ar fi electronul, valoare 1/2.

Emisia spectrelor optice este datorită numai electronilor stratului exterior. Sub influenţa unei cauze externe care dă atomului energie, unul sau mai mulţi din aceşti electroni trec pe orbite mai depărtate de nucleu decît acelea pe care le ocupau în stare normală şi revenind, emit energie sub formă de radiaţie luminoasă. Electronii externi oferind în tabloul periodic al elementelor o periodicitate, este evident că şi spectrele optice vor oferi o astfel de periodicitate. Spectrele metalelor alcaline vor fi analoage între ele, ale alcalino-pămîntoaselor la fel, etc.

Dacă electronul exterior este cel care dă naştere spectrului optic fără îndoială că un atom cu doi electroni în stratul exterior va emite un spectru analog cu cel emis de atomul de hidrogen dacă reuşim mai întîi să-i îndepărtăm unul din cei doi electroni. De exemplu dacă îndepărtăm unul din cei doi electroni ai atomului de heliu, ceea ce rămîne este heliu ionizat, (He^+) iar spectrul lui va fi analog cu al atomului de hidrogen.

La fel putem spune despre ionul de litiu de două ori ionizat (Li^{++}) apoi, ionul de beriliu de trei ori ionizat (Be^{+++}), etc. adică despre *ionii hidrogenoizi*, ioni cărora li s-au îndepărtat 1, 2, 3 electroni din stratul exterior, pentru a le rămîne numai unul, aşa cum are hidrogenul.

Experienţa a arătat că în cazul atomilor cu structură mai complexă, deci, cu un nucleu a cărui sarcină pozitivă este mult mai mare decît a nucleului de hidrogen, comportarea electronului optic se deosebeşte de aceea a electronului din atomul de hidrogen, deoarece în acest caz, electronul se află într-un cîmp electric mult mai complicat. Numai cînd electronul optic este foarte departe de ceilalţi electroni astfel încît nucleul cu toţi electronii interiori se comportă aproximativ ca o singură sarcină punctiformă, putem vorbi de un spectru asemănător celui de hidrogen.

O altă particularitate spectrală a atomilor de structură mai complexă decît a atomului de hidrogen o constituie existenţa unor linii complexe (multipleţi): linia spectrală reprezintă un ansamblu de cîteva linii de frecvenţe foarte apropiate care apar datorită trecerii atomului de la o stare energetică la alta apropiată din punct de vedere energetic. Un exemplu tipic pentru asemenea multipleţi sînt cele două linii D ale sodiului (dublet) a căror existenţă dovedeşte prezenţa a două niveluri energetice apropiate în atomul de sodiu.

Numărul nivelurilor apropiate şi deci, şi multiplicitatea liniei poate fi foarte diferit, în funcţie de gradul de complexitate al atomului.

Scindarea liniilor spectrale în mai multe componente provocată prin aplicarea unor cîmpuri magnetice şi electrice exterioare (efect Zeemann şi efect Stark) se reduce deci, la scindarea nivelurilor datorită suplimentului de energie condiţionat de interacţiunea cîmpului exterior cu părţile atomului.

4. *Spectrele de bandă ale moleculelor (în domeniul vizibil).*

Am văzut că spectrele atomice sînt formate din linii distanţate între ele, care se strîng însă spre limita seriei unde de obicei sînt şi mai puţin intense.

Spectrele moleculare se caracterizează prin existenţa unui şir de grupe formate din linii separate dar strînse. Aceste linii se strîng aşa de mult în cadrul grupelor încît dacă se lucrează cu un aparat de putere rezolutivă obişnuită ele se confundă, astfel că toată grupa capătă forma unei bande (fig. 13); de aci şi numele de *spectru de bandă.*

Bandele *a,b,c,* se aranjează în sisteme. *A,B,C, ...* iar în sistemele moleculare pot fi mai multe grupe de acelaşi fel.

In concluzie putem spune că în spectrele moleculare apar trei fenomene: 1) gruparea liniilor separate în bande, 2) aranjarea bandelor în sisteme, 3) prezenţa în spectru a cîtorva sisteme de bandă.

Pentru producerea spectrelor de bandă trebuie să se evite excitările prea puternice care ar putea duce la disocierea moleculelor şi deci la dispariţia însăşi, a sursei spectrelor moleculare.

Spectrele moleculare biatomice sînt cele mai bine cercetate, deoarece se pot excita mai uşor. Moleculele poliatomice avînd multe posibilităţi de descompunere, excitarea unor spectre intense ale unor astfel de molecule este dificilă. In afară de aceasta, spectrele moleculelor poliatomice sînt mai complicate şi de aceea pentru distingerea detaliilor sînt necesare aparate spectrale cu mare putere rezolutivă. Pentru aceste două motive adică, intensitatea slabă a spectrelor şi necesitatea unor aparate spectrale cu putere rezolutivă deosebit de mare, cercetarea spectroscopică a moleculelor poliatomice nu a putut să înainteze îndeajuns.

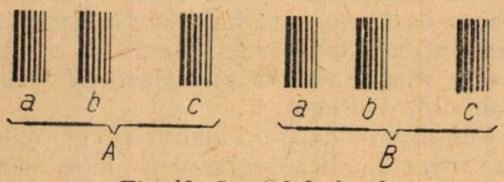


Fig. 13. Spectul de bande.

Noi ne vom ocupa numai de moleculele biatomice a căror cercetare spectroscopică este mai bine pusă la punct acestea prezentînd o mai puternică legătură între atomi.

Energia totală a unei stări oarecare a moleculei este determinată de energia datorită rotaţiei nucleelor (*Wr*), de energia de oscilaţie a moleculelor în jurul poziţiei lor de echilibru (*Wv*) şi de energia condiţionată de configuraţia electronică *(We).* Putem deci scrie, că energia totală *(W)* este dată de relaţia:

$$W = W_e + W_v + W_r$$

Relaţia lui Bohr

$$h\nu = W_1 - W_2$$

referitoare la legătura dintre frecvenţa radiaţiei de emisie sau absorbţie şi energia celor două stări ale atomului se aplică şi în cazul moleculei, adică:

$$h\nu = (W_e - W_e') + (W_v - W_v') + (W_r - W_r')$$

In adevăr, comparînd spectrele determinate de această formulă cu cele observate experimental, ne convingem de faptele arătate mai jos:

a) fiecare din liniile benzilor corespunde unei variaţii a lui $(W_r - W_r')$ dacă $(W_v - W_v')$ şi $(W_e - W_e')$ rămîn constante.

b) succesiunea benzilor *a,b,c,* adică un sistem oarecare, se obţine cînd variază $(W_r - W_r')$ şi $(W_v - W_v')$, iar $(W_e - W_e')$ rămîne constant.

c) dacă la celelalte variaţii de energie se adaugă şi variaţia lui $(W_e - W_e')$, adică se modifică şi starea electronică, atunci se obţin diferite sisteme de benzi A,B,C, adică tot grupul de sisteme de benzi.

Trebuie subliniat că variaţia de energie corespunzătoare celor două stări electronice este cu mult mai mare decît variaţia energiei de oscilaţie a nucleelor şi aceasta la rîndul ei, este cu mult mai mare decît variaţia energiei de rotaţie a nucleelor. Aceasta rezultă din faptul că deosebirea dintre frecvenţele diferitelor linii ale unei benzi este foarte mică faţă de diferenţa dintre frecvenţele care determină poziţia diferitelor benzi în sistem, iar acesta din urmă este cu mult mai mică decît diferenţa frecvenţelor, care determină poziţia sistemelor în serie.

IV. Aplicaţiile spectroscopiei.

Faptul că există legătură între spectrul de emisie şi individualitatea chimică a atomului a permis lui Kirchhoff şi Bunsen să pună bazele *analizei spectrale.*

Prima aplicaţie a acestei noi metode de analiză a fost descoperirea de către Bunsen (1860) a două elemente noi din grupul metalelor alcaline: *rubidiu* şi *cesiu* în produsele naturale care conţin litiu, sodiu şi potasiu. Existenţa noilor elemente a fost constatată prin noile linii spectrale care se deosebeau de cele cunoscute anterior pentru litiu, sodiu şi potasiu. Curînd după aceasta tot cu ajutorul analizei spectrale, au fost descoperite alte elemente noi: *taliu* (1862), *indiu* (1863), *galiu* (1875) şi *heliu* (1895).

Cu ajutorul analizei spectrale calitative, care este de o extremă sensibilitate, se poate determina prezenţa unei substanţe în concentraţii de sutimi şi miimi la sută, cantitatea absolută de substanţă necesară pentru analiză fiind de ordinul $10^{-9} - 10^{-10}$g. Sensibilitatea analizei spectrale depinde foarte mult de natura elementului studiat şi de metoda de cercetare.

Determinarea cantitativă a compoziţiei unei substanţe prin ajutorul analizei spectrale *cantitative* este o problemă mai complicată. Principiul acestei metode se bazează pe legătura dintre intensitatea liniilor emise şi fracţiunea din amestec a substanţei care le emite. S-a văzut însă, că intensitatea unei linii spectrale date depinde foarte mult de condiţiile de excitare. In afară de aceasta, intensitatea liniei spectrale poate fi uneori considerabil modificată prin absorbţie, la trecerea luminii printr-un strat de vapori ai elementului care înconjoară atomul emiţător. Aceste motive precum şi altele au făcut ca multă vreme să nu se poată aplica analiza spectrală cantitativă. Astăzi aceste dificultăţi sînt în mare măsură rezolvate şi analiza spectrală cantitativă se aplică cu succes în multe probleme de producţie.

Metodele analizei spectrale atomice sînt deosebit de necesare în toate stadiile producţiei pieselor metalice începînd de la căutarea filonului de minereu şi terminînd cu controlul compoziţiei metalului în piesele finite; ele sînt folosite la producţia preparatelor pure din punct de vedere chimic; sînt necesare ca metodă auxiliară geologului, biologului, medicului, astrofizicianului, precum şi multor altor specialişti şi oameni de ştiinţă din diferite domenii ale tehnicii şi ştiinţei.

Tehnica actuală a făcut considerabil mai rapide metodele analizei spectrale şi le-a simplificat în aşa măsură încît ele pot fi efectuate de către tehnicieni fără pregătire specială.

Instalaţiile automate (fig. 14), permit efectuarea deplină a analizei unei substanţe în mai puţin de 1 minut, asigurînd în felul acesta, o mare economie de timp în lucru.

Asemenea automate sînt aparate complicate ce pot efectua zilnic sute de analize şi ca atare ele nu pot fi raţional utilizate decît în laboratoarele marilor uzini, în special în cazurile cînd cu ajutorul analizei spectrale se controlează piesele turnate, sau funcţionarea cuptoarelor.

Spectroscopia moleculară a dat un ajutor la fel de substanţial în clasificarea constituţiei moleculelor, ca şi spectroscopia atomică în problemele structurii atomilor.

Analiza spectrală moleculară se deosebeşte de cea atomică printr-o varietate mai mare de metode şi prin precizia lor. La analiza moleculară trebuie să avem o deosebită grijă ca moleculele să nu se descompună, să nu-şi schimbe forma structurală şi componenţa în timpul analizei, deoarece aceasta poate să influenţeze puternic rezultatele ei.

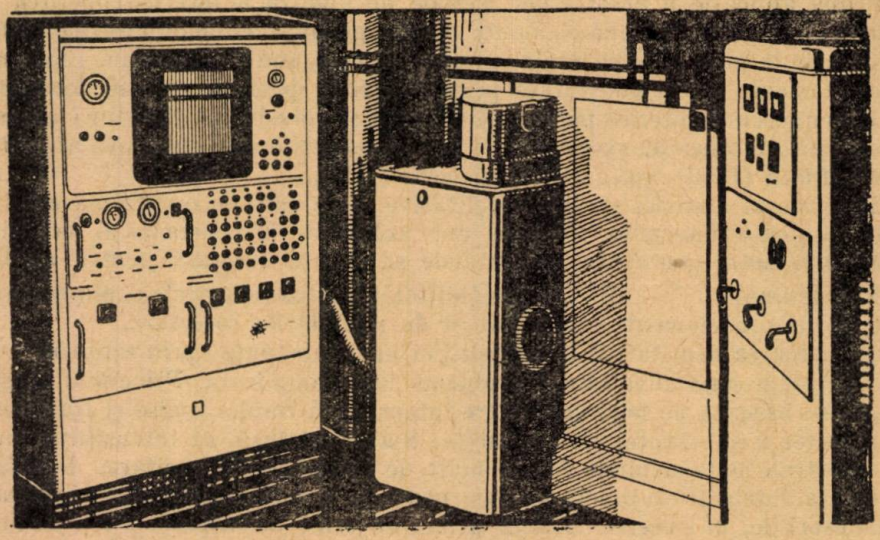


Fig. 14. Instalaţie automată pentru efectuarea analizelor spectrale.

Metodele analizei spectrale moleculare pot fi folosite nu numai pentru stabilirea proprietăţilor individuale sau a compoziţiei amestecului, dar şi pentru determinarea elementelor de structură a moleculelor substanţelor care se analizează: a formei lor izomerice, a prezenţei legăturilor multiple, iar în unele cazuri şi a prezenţei în moleculă a unei anumite grupe de atomi. In cazul formării unor grupări mai complexe de atomi, de ex. la polimerizarea nelimitată a hidrocarburilor, la formarea unor ioni complexi, spectroscopia moleculară permite identificarea şi determinarea structurii lor.

Utilizarea analizei spectrale moleculare permite rezolvarea multor probleme analitice care nu pot fi rezolvate uneori prin nici o altă metodă.

Din cele expuse în cadrul acestui articol în care nu se tratează decît foarte sumar domeniul optic spectral vizibil, se poate totuşi întrevedea deosebita

importanţă a studiului spectroscopiei. Spectroscopia a dat posibilitate aprofundării cunoştinţelor referitoare la structura materiei, este de un sprijin real pentru dezvoltarea tuturor celorlalte ştiinţe, este un auxiliar de prim rang în majoritatea ramurilor tehnicii — pentru laboratoarele uzinelor respective, deoarece pune la dispoziţie mijloacele cele mai subtile, cele mai precise şi cele mai rapide de cercetare, de cunoaştere.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICI

ASUPRA VALORILOR REALE ALE UNOR FUNCŢII DE VARIABILĂ REALĂ

C. IONESCU-ŢIU

STUDIUL unor funcţii prezintă interes deosebit, dînd posibilitatea înţelegerii operaţiilor, arată intuitiv rezultatele prin grafice, sistematizează cunoştinţele prin discuţiile ce se impun şi face apoi accesibilă dezvoltarea cunoştinţelor în urma fixării treptate a rezultatelor obţinute.

In exemplele de funcţii ce urmează se arată unele rezultate obţinute şi discuţia respectivă. Forme diferite de funcţii iau aceleaşi valori în unele intervale ale variabilei, ţinîndu-se seamă că rădăcina patrată a expresiei de sub radical să aibă acelaş semn cu cel dinaintea radicalului, radicalii fiind socotiţi cantităţi reale.

1. Fie funcţia $y = \sqrt{(x-a)^2}$ unde a este o constantă *reală*. Radicalul este socotit cu semnul dinaintea lui, adică *pozitiv*. Pentru ca funcţia y să fie *reală* şi *pozitivă*, se impune $y = x - a$ dacă $x \geqslant a$ şi $y = a - x$ dacă $x \leqslant a$.

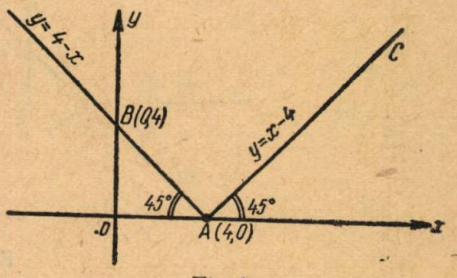


Fig 1

In exemplul $y = \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{(4-x)^2}$, avem reprezentarea grafică din figura 1. Funcţia y este mereu pozitivă deoarece semnul radicalului este luat pozitiv. In cazul funcţiei

$$y = -\sqrt{(2x-3)^2},$$

pentru $2x - 3 \leqslant 0$, funcţia este reprezentată de porţiunea de dreaptă $y = 2x - 3$; iar pentru $2x - 3 \geqslant 0$ funcţia este $y = -2x + 3$. In figura 2 se vede că y este mereu *negativ* aşa cum cere semnul minus dinaintea radicalului.

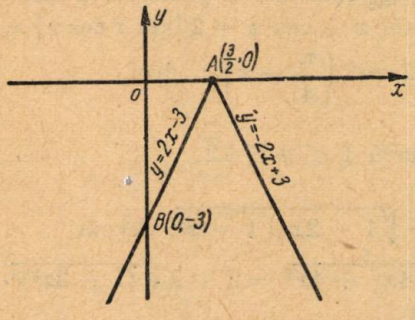


Fig. 2

2. Fie funcţia $y = \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-3)^2} = y_1 + y_2$

unde $y_1 = +\sqrt{(x+2)^2}$ şi $y_2 = -\sqrt{(x-3)^2}$.

In figura (3) funcția y_1 este *mereu pozitivă* și y_2 *mereu negativă*, iar compunerea lor $y = y_1 + y_2$ este reprezentată de porțiunea dreaptă $y = -5$ (const) pentru $x \leqslant -2$; apoi, pentru $-2 \leqslant x \leqslant 3$ funcția y ia valoarea $y = x + 2 - (3 - x) = 2x - 1$ și în fine pentru $x \geqslant 3$ avem

$$y = x + 2 - (x - 3) = 5.$$

De aici, deducem următoarele *identități parțiale între cantități reale*:

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = -5, \text{ pentru } x \leqslant 2.$$

$$\sqrt{x^2 + 4x - 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1, \text{ pentru } -2 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{și}$$

$$\sqrt{x^2 + 4x - 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5, \text{ pentru } x \geqslant 3.$$

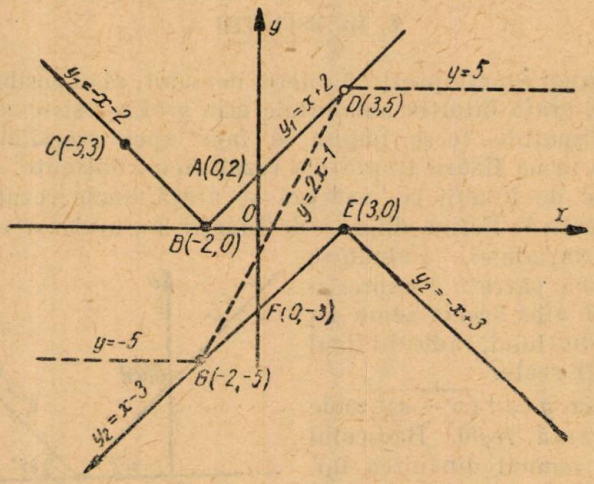


Fig. 3

3. Funcțiile $y_1 = \sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x|$ și $y_2 = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$ sînt mereu pozitive, de asemenea, $y = y_1 + y_2$ este mereu pozitivă. Pentru a-i afla intervalul de variație, scriem $y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2|\sin x \cos x| = 1 + |\sin 2x| = 1 + \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right| = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; deci,

$$y = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \text{ și rezultă } 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}.$$

4. Fie funcția $y = \sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}$. Avem $y^2 = 2 + 2\sqrt{1 - 4x^2(1 - x^2)} = 2 + 2\sqrt{1 - 4x^2 + 4x^4} = 2 + 2\sqrt{(1 - 2x^2)^2}$. Pentru $1 - 2x^2 \geqslant 0$, adică pentru $|x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ avem $y^2 = 2 + 2(1 - 2x^2) = 4(1 - x^2)$; prin urmare, $y^2 + 4x^2 = 4$ sau $\frac{y^2}{2^2} + \frac{x^2}{1^2} = 1$ care reprezintă o elipsă (fig. 4).

Pentru $2x^2 - 1 \geqslant 0$, adică $|x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ avem $y^2 = 2 + 2(2x^2 - 1) = 4x^2$ sau $y = 2|x|$ deci în acest caz y este funcție lineară de x.

In cazul cînd $|x| > 1$ avem, $y = \sqrt{1 + 2ix\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{1 - 2ix\sqrt{x^2 - 1}}$. Notăm $\sqrt{1 + 2ix\sqrt{x^2 - 1}} = A + Bi$; $|x| > 1$; ridicăm la pătrat: $1 + 2ix\sqrt{x^2 - 1} = A^2 - B^2 + 2ABi$. Rezultă $A^2 - B^2 = 1$; $AB = x\sqrt{x^2 - 1}$

deci $A = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{B}$;

$$A^2 = \frac{x^2(x^2 - 1)}{B^2}$$

de unde $\frac{x^2(x^2 - 1)}{B^2} - B^2 = 1$;

$$x^4 - x^2 - B^4 - B^2 = 0.$$

Deci,

$$B^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x^4 - 4x^2}}{2} = \frac{-1 \pm (2x^2 - 1)}{2} > 0.$$

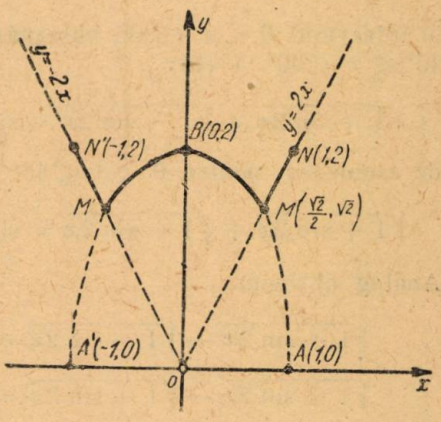


Fig. 4

Şi $x^2 > 1$, deci $B^2 = \frac{2x^2 - 2}{2} = x^2 - 1 > 0$ sau $B = \sqrt{x^2 - 1}$;

$$A^2 = 1 + B^2 = 1 + x^2 - 1 = x^2.$$

$A = |x|$, deci $\sqrt{1 + 2ix\sqrt{x^2 - 1}} = x + i\sqrt{x^2 - 1} = x + \sqrt{1 - x^2}$ şi

$$\sqrt{1 - 2ix\sqrt{x^2 - 1}} = x - i\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{1 - x^2},$$

rezultă că pentru $|x| > 1$ avem $y = 2|x|$, funcția fiind simetrică față de oy; aceiaşi formă a rezultat pentru $\frac{\sqrt{2}}{2} < |x| < 1$.

Reprezentarea funcției y este dată în figura 4.

Şi de aici deducem următoarele *identități parțiale*:

$$\sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}} = -2x, \text{ pentru } x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}} = 2\sqrt{1 - x^2}, \text{ pentru } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

şi $\sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}} = 2x$, pentru $x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

unde pentru $-1 \leqslant x \leqslant 1$, toți radicalii sînt reali

5. Să considerăm funcţia

$$y = \sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}$$

Fiecare radical fiind *pozitiv*, avem

$$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = |\sin x + \cos x| \text{ şi}$$

$$\text{şi } \sqrt{1 - \sin 2x} = |\sin x - \cos x|$$

în intervalul $0 < x < 90°$, observăm că pentru $\sin x > \cos x$ adică pentru $45° \leqslant x < 90°$ avem:

$$\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x + \cos x + \sin x - \cos x = 2 \sin x$$

de asemenea, pentru $0 < x \leqslant 45°$ avem:

$$\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x + \cos x + \cos x - \sin x = 2 \cos x$$

Analog obţinem:

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = 2 \sin x, \text{ pentru } (0 < x < 45°), \ldots$$

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} = 2 \cos x, \text{ pentru } (45° < x < 90°), \ldots$$

In celelalte cadrane, studiul se face la fel.

6. Funcţia $y = \sqrt{\sec^2 x + 2 \operatorname{tg} x} + \sqrt{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}$ ia valoarea 2 pentru $|\operatorname{tg} x| \leqslant 1$ şi valoarea $2 |\operatorname{tg} x|$ pentru $|\operatorname{tg} x| \geqslant 1$. (Se ţine seamă că $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$).

Dacă notăm $\operatorname{tg}^2 x = a$, se obţin identităţile:

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}} = 2, \text{ pentru } (1 \leqslant a \leqslant 2)$$

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a \quad 2\sqrt{a - 1}} = 2\sqrt{a - 1} \text{ pentru } a \geqslant 2$$

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} - \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}} = 2, \text{ pentru } a \geqslant 2$$

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} - \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}} = 2\sqrt{a - 1}, \text{ pentru } a \leqslant 2$$

iar pentruca fiecare radical să fie *real* trebuie $a \geqslant 1$.

7. In mod analog se poate arăta că pentru $x \geqslant 1$ avem:

$$\frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} \sqrt{4 + \left(\frac{x - 1}{x + 1} - \frac{x + 1}{x \quad 1}\right)^2} = 0;$$

iar pentru $x < 1$ avem:

$$\frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} + \sqrt{4 + \left(\frac{x - 1}{x + 1} - \frac{x + 1}{x - 1}\right)^2} = 0$$

8. Stabilirea unor identităţi analoage se poate face şi folosind *transformarea radicalilor suprapuşi*, de pildă, pentru identitatea

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2},$$ unde $(x \geqslant 1)$. Obţinem:

$$\sqrt{\frac{x+|x-1|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|x-1|}{2}}-\sqrt{\frac{x+|x-1|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|x-1|}{2}}=\sqrt{2}$$

9. Ca *aplicaţie*, să se arate pentru care valori reale ale lui x avem între cantităţi reale identitatea:

$$\sqrt{x+2a\sqrt{x+a^2}}+\sqrt{x-2a\sqrt{x-a^2}}=2a$$

şi pentru care valori avem:

$$\sqrt{x+2a\sqrt{x-a^2}}-\sqrt{x-2a\sqrt{x-a^2}}=2a$$

Alte aplicaţii sînt propuse în G.M.F. sub diferite aspecte pentru a da posibilitatea rezolvitorilor prin *studiu individual*, să se deprindă cu discuţia calculelor în vederea obţinerii şi interpretării rezultatelor şi dezvoltarea gîndirii atît de necesară în rezolvări de probleme caşi în orice studiu.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUIREA UNUI POLARISCOP

Conf. Univ. **N. STĂNESCU**

SE poate uşor construi un polariscop cu ajutorul căruia se pun în evidenţă proprietăţile luminii polarizate. Orice polariscop constă din două dispozitive identice: unul serveşte la polarizarea luminii şi se numeşte polarizor, al doilea serveşte la observarea luminii polarizate şi se numeşte analizor. Vom arăta cum se poate construi cu destulă uşurinţă un polariscop prin reflexie şi altul prin refracţie.

Polariscop prin reflecţie. Construim din carton gros, ori din placaj, două prisme drepte avînd baza un triunghi dreptunghic (Fig. 1). Catetele bazei sînt dimensionate în aşa fel încît lungimile lor să fie în raportul $BE/ED = 3/2 = \text{tg}\ 56°30'$, adică unghiul $B = 33°30'$. Faţa $ABDC$ corespunzătoare ipotenuzei se acoperă cu hîrtie neagră, peste care se fixează o lamă pentru preparate microscopice. De la început faţa este dimensionată în aşa fel ca să depăşească cama cu 4—5 cm. de jur împrejurul ei. Dacă lumina vine pe lama de sticlă paralel cu cateta mare BE, va avea unghiul de incidenţă $i = 56°30'$ şi prin urmare raza reflectată IR va fi polarizată total, cu oscilaţiile paralele cu muchia DC. Una din aceste prisme va servi ca polarizor, iar cealaltă ca analizor. Este bine ca uneia din ele să i se fixeze un mîner GH în mijlocul feţei catetă $EFCD$, de care va fi prinsă într-un stativ şi va putea fi astfel rotită în jurul lui GH ca ax. Demonstrăm polarizaţia

luminii aşezînd polarizorul P pe o măsuţă, astfel ca sticla să fie verticală şi fasciculul de lumină paralelă să vină paralel cu cateta mare (fig. 2). Fasciculul reflectat în I_1 va ieşi polarizat şi va cădea pe analizor, fixat cu mînerul orizontal H într-un stativ, aşa ca fasciculul I_1I_2 să fie paralel cu cateta mare a analizorului A. Rotind analizorul A cu 360° în jurul mîne-

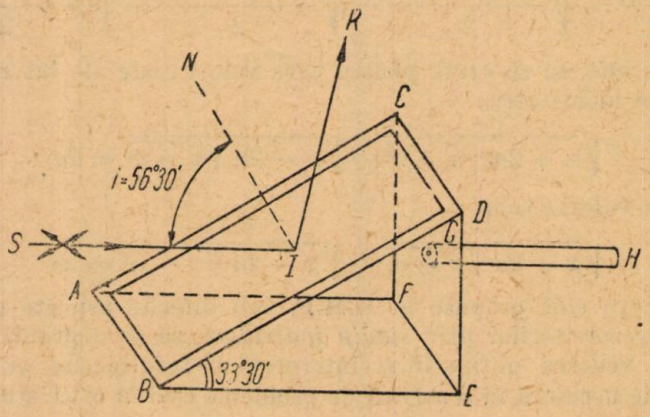


Fig. 1

rului H, observăm treptat cum raza reflectată I_2 R iese intensă cînd cele două feţe de sticlă sînt paralele şi se stinge treptat, cînd cele două feţe se

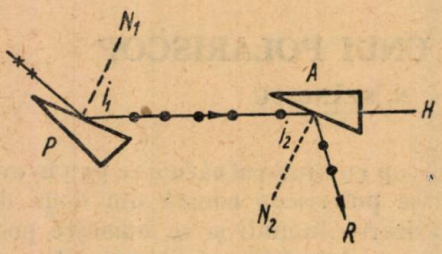
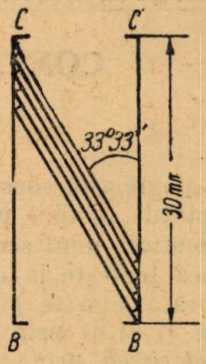


Fig. 2



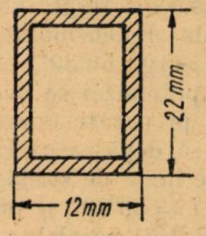


Fig. 3

apropie de 90° una faţă de alta. Cele două prisme astfel construite şi montate alcătuiesc un polariscop prin reflecţie.

Polariscop prin refracţie. Se ştie că lumina reflectată este polarizată total cînd unghiul ei de incidenţă pe sticlă este de 56°30′. Lumina refractată prin sticlă este polarizată la maximum cînd unghiul ei de incidenţă este tot de 56°30′, numit unghi de incidenţă brewsteriană (dat de legea $\text{tg} \cdot i = n$, unde n este indicele de refracţie al sticlei). Dacă refracţia este repetată de 10—15 ori printr-un bloc de lame paralele, lumina emergentă este polarizată aproape total. Pe baza acestui fenomen construim două dispozitive de polarizare prin refracţie, care vor alcătui polarizorul

şi analizorul unui polariscop. Pentru aceasta alegem 10 15 lamele microscopice, pe care le ştergem foarte bine de praf. Este bine să fie cu dimensiunile cît mai mari, de ex. 22×22 mm. Facem din carton, tablă sau placaj un tub prismatic, avînd baza dreptunghiulară, cu dimensiunile interioare de 12×22 mm. şi înălţimea de 30 mm. În partea lui de jos se fixează un brîu transversal BB' (fig. 3), care va sprijini lamelele, pe care le aşezăm una cîte una, aşa ca să stea înclinate de la un perete la altul şi bine alăturate una de alta. Al doilea brîu transversal CC', le fixează în această poziţie. La dimensiunile date fiecare lamelă face cu axul tubului un unghi de 33°30′, adică o rază de lumină care va trece paralel cu axul tubului va avea o incidenţă de 56° 30′, polarizîndu-se maximum. Menţionăm că dimensiunile date aici se referă la lamele de 22×22 mm. Pentru alte lamele se potrivesc dimensiunile tubului după dimensiunile lamelelor, respectînd cu stricteţe numai condiţia de înclinare dată mai sus. Facem două asemenea dispozitive, un polarizor şi un analizor. Polarizaţia luminii prin refracţie o demonstrăm fixînd unul din dispozitive P, într-un stativ (fig. 4), şi

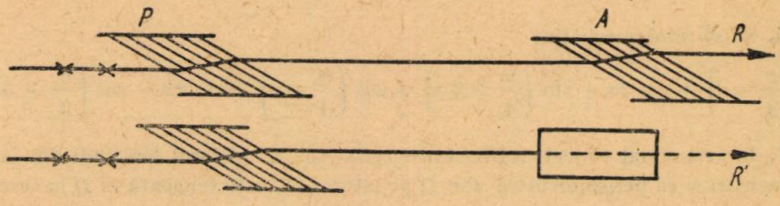


Fig. 4

trecînd prin el, orizontal şi paralel cu axul tubului un fascicul de lumină. Al doilea dispozitiv A este aşezatpe un alt stativ, la fel cu primul. Fasciculul emergent din P este polarizat şi trece prin A, dacă aşezările lor sînt identice. Cînd însă A este rotit cu 90° faţă de P, lumina nu mai iese din A, deşi ambele dispozitive sînt transparente luate în parte. Cu alte cuvinte lumina este polarizată.

CHESTIUNI DE EXAMEN *)

PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL DE CĂI FERATE, BUCUREŞTI, AUGUST 1954

1372. Să se simplifice fracţia

$$F = \frac{x^2 + y + 1 - 2x\sqrt{y} + 2x - 2\sqrt{y}}{x^2 - y - 1 + 2\sqrt{y}}.$$

1373. Să se rezolve sistemul:

$$\cos x + \sin 2x = \cos 3x$$

$$\cos(x + y) + \sqrt{3}\sin(x + y) = 1.$$

---

*) Se primesc soluţii pînă la data de 1 martie 1955.

1374. In triunghiul ABC se duce MP paralelă cu AC. Din punctul M situat pe AB se duce o paralelă la BC care întîlneşte pe AC în N iar din punctul P situat pe BC se duce o paralelă la AB care întîlneşte pe AC în Q. Să se arate că:

a) punctele N şi Q sînt respectiv egal depărtate de punctele A şi C;

b) dacă $\frac{MA}{MB} = K$, să se calculeze segmentul NQ cu ajutorul laturei AC şi al raportului K;

c) în ce caz punctele N şi Q se confundă.

PROBLEME DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL DE PETROL ŞI GAZE, BUCUREŞTI, AUGUST 1954

Grupa I-a

1375. Să se găsească soluţiile sistemului:

$$x^2 + 24 = 2xy$$
$$6x^2 - y^2 = -25.$$

1376. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right).$$

1377. In triunghiul isoscel $ABC\,(AB = AC)$, fie D piciorul înălţimii din A pe BC. Să se demonstreze că perpendiculara din D pe latura AC este tangentă în D la cercul ABD.

Grupa II-a

1378. Se dau trei termeni ai unei progresii:

$$(a + x)^2; \quad (a^2 + x^2); \quad (a - x)^2.$$

Să se demonstreze că progresia este aritmetică, să se calculeze suma primilor n termeni.

1379. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin^3 x\,(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x\,(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

1380. Intr-un trunchi de con este înscrisă o sferă cu raza r. Generatoarea conului este înclinată cu unghiul α faţă de planul bazei.

Să se găsească aria laterală a trunchiului de con.

Grupa III-a

1381. Se dă sistemul.

$$x^3 + x^2y + xy^2 = a$$
$$x^2y + xy^2 + y^3 = b.$$

Se cere: *a)* să se calculeze expresiile rădăcinilor x şi y, *b)* să se calculeze valoarea algebrică a expresiei

$$E(x; y) = \frac{x\sqrt{y} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$$

şi să arate că este egală cu $E(a; b)$.

1382. Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}\,(\cos^4 x - \sin^4 x).$$

1383. Fie $ABCD$ un trapez având baza mică $AB = a$ și baza mare $DC = b$. Pe latura AD se ia un punct M astfel ca $\frac{MA}{MD}$ să fie egal cu $\frac{p}{q}$. Prin M se duce paralelele MN la cele două baze. Să se calculeze MN în funcție de a, b, p, q.

Grupa IV-a

1384. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{xyz}{y+z} = a; \quad \frac{xyz}{z+x} = b; \quad \frac{xyz}{x+y} = c$$

unde $a \neq 0$, $b, \neq 0$, $c \neq 0$.

1385. Să se dovedească identitatea

$$\cos^2 2a + \cos^2 (a-b) - 2\cos (a-b)\cos (a+b)\cos 2a = \sin^2 (a+b).$$

1386. Fie cercul O și un punct exterior C. Ducem secanta CBA și tangenta CD la cercul O. Cercul CBD taie pe AD în E. Să se arate că *a)* dreptele CD și CE sînt egale, *b)* dreapta CE este tangentă cercului ABE.

PROBLEME REZOLVATE

Problema E: 413

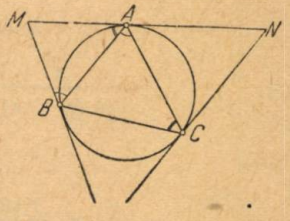
Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul (O). Paralelele duse prin B și C la AC și AB, intersectează tangenta în A la cercul (O), respectiv în M și N. Să se demonstreze relațiile:

$$BC^2 = AM \cdot AN \quad \text{și} \quad \frac{MB}{NC} = \frac{AB^3}{AC^3}.$$

Mihail I. Popescu, student, București

Soluție. Avem: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MAB$; $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABM$ și deci triunghiul ABC și triunghiul ABM sînt asemenea. Analog avem triunghiurile ABC și ACN asemenea. Rezultă:

$$\frac{BC}{AM} = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{MB} \quad \text{și} \quad \frac{BC}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{NC}.$$



Din relațiile:

$$\frac{BC}{AM} = \frac{AC}{AB} \quad \text{și} \quad \frac{BC}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

deducem prima relație a enunțului, iar relațiile:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{MB} \quad \text{și} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{NC}$$

conduc la cea de-a doua relație din enunț.

Problema 284

Un rîu din emisfera nordică, curge de la Nord la Sud cu o astfel de pantă încît pe măsură ce curge se apropie de axa polilor. Mai este valabilă legea: « Toate rîurile din emisfera nordică bat în malul drept? » Explicație.

* * *

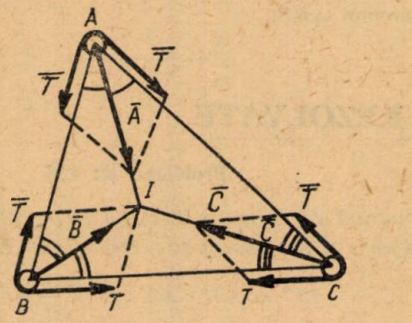
Soluție. Legea mai sus enunțată este legea lui Beer și se explică prin acțiunea forței de inerție Coriolis (Curs de Fizică Generală de Friș și Timoreva, vol. I, pag. 84). Pentru direcția de curgere Sud—Nord legea este explicată în cursul mai sus menționat; în cazul cînd direcția de curgere este de la Nord la Sud sensul forței de inerție Coriolis se schimbă întrucît se schimbă sensul vitezei de curgere v'. Rezultă deci, că *legea rămîne valabilă* rîul erodînd și în acest caz malul său drept, dacă scurgerea se face la suprafața pămîntului cu pante mici. Pentru anumite pante mari de scurgere se poate arăta că în unele cazuri legea lui Beer nu mai rămîne valabilă.

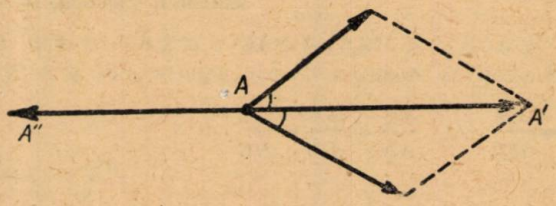
Problema 1136

Trei bare articulate la capete formează un triunghi oarecare ABC. Pe arcele articulațiilo r, din vîrfurile A, B, C sînt fixați cîte un scripete. Peste acești scripeți este trecut un cablu închis și care prin strîngere este supus la o tensiune T. Frecarea în arcul scripeților fiind neglijabilă, Să se afle forțele de reacțiune din articulații.

C. Ionescu-Țiu

Soluție dată de eleva *Constantinescu Ioana* (București). Cablul fiind sub o tensiune T, asupra fiecărei articulații vor acționa două forțe egale îndreptate după laturile triunghiului ABC. Luînd separat punctul A și forțele care acționează asupra lui, observăm că: forța de reacțiune $\overline{A}$ din articulația A este egală și de semn contrar cu rezultanta celor două forțe $\overline{T}$. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ATA' avem:





$$\frac{A}{\sin(\pi - A)} = \frac{T}{\sin\frac{A}{2}} \quad \text{sau} \quad \frac{A}{\sin A} = \frac{T}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$|\overline{A}| = \frac{T \sin A}{\sin\frac{A}{2}} = T\,\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 2T\cos\frac{A}{2}.$$

In mod analog obținem și pentru celelalte unghiuri:

$$|\overline{B}| = 2T\cos\frac{B}{2} \quad \text{și} \quad |\overline{C}| = 2T\cos\frac{C}{2}.$$

Problema 1141

Intr-un etaj de amplificare lucrează lampa de radio sovietică 6 JZ cu parametri: factorul de amplificare $\mu = 1500$ *şi panta* $S = 0{,}0012$. *Ştiind că rezistenţa anodică de sarcină* $R_a = 180.000\ \Omega$, *se cere coeficientul de amplificare al etajului.*

Ion Şerban, elev, Piteşti

Soluţie. Folosim relaţia internă a lămpii care face legătura dintre parametrii ei şi avem $\mu = R_i \cdot S$. De unde $R_i = \dfrac{\mu}{S}$. Inlocuind, obţinem $R_i = \dfrac{1500}{0{,}0012}$. Deci: $R_i = 1.250.000$ ohmi.

Relaţia care ne dă coeficientul de amplificare al unui etaj este $K = \dfrac{\mu \cdot R_a}{R_i + R_a}$. Înlocuind avem: $K = \dfrac{1500 \cdot 180.000}{1.250.000 + 180.000} \cong 190$.

Deci coeficientul de amplificare al etajului este $K = 190$.

Problema 1155

Dacă $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ *sînt numere reale şi nu toate nule şi există egalităţile:*

$$a_1 = b_2 c_3 - c_2 b_3 \ ; \quad b_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3 \ ; \quad c_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3$$

$$a_2 = b_3 c_1 - c_3 b_1 \ ; \quad b_2 = c_3 a_1 - a_3 c_1 \ ; \quad c_2 = a_3 b_1 - b_3 a_1$$

$$a_3 = b_1 c_2 - c_1 b_2 \ ; \quad b_3 = c_1 a_2 - a_1 c_2 \ ; \quad c_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

să se deducă şi egalităţile:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. — Din expresiile lui b_2, c_2 scoatem

$$a_1 = \frac{b_2 + a_3 c_1}{c_3} = \frac{a_3 b_1 - c_2}{b_3} \quad \text{de unde} \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$$

$$a_3 = \frac{c_3 a_1 - b_2}{c_1} = \frac{b_3 a_1 + c_2}{b_1} \quad \text{de unde} \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

La fel găsim şi relaţiile $a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$

Din expresiile lui b_2, b_3 scoatem:

$$a_1 = \frac{a_3 c_1 + b_2}{c_3} = \frac{a_2 c_1 - b_3}{c_2} \quad \text{de unde} \quad b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \text{ şi}$$

$$c_1 = \frac{c_3 a_1 - b_2}{a_3} = \frac{a_1 c_2 - b_3}{a_2} \quad \text{de unde} \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

La fel găsim şi: $a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0$

Apoi,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)^2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 =$$

$$= \left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)\left(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2\right) - (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3)^2 =$$

$$= \left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)\left(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2\right).$$

Obţinem analog:

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2\right)$$

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right).$$

de unde rezultă:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$

Apoi,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (b_2 c_3 - c_2 b_3)^2 + (b_3 c_1 - c_3 b_1)^2 + (b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 =$$

$$= \left(b_1^2 + b_2^2 + b_2^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right) - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)^2 =$$

$$= \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)$$

Obţinem analog:

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2\right)$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$$

de unde rezultă:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2.$$

Problema 1157

Să se afle bazele x, y, z ale sistemelor de numeraţie în care există relaţia:

$$1111_x + 3333_y = 1324_z \qquad (1)$$

ştiind că $x = y - z = z - 4$.

Elemer Kiss

Soluţie dată de elevul Cîmpu Eugen, l. b. 10, Bucureşti. — Inlocuind pe y şi pe z din relaţia (1), obţinem

$$1111_x + 3333_{(x+2)} = 1324_{(x+4)} \quad \text{sau}$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 + 3(x+2)^2 + 3(x+2)^2 + 3(x+2) + 3 =$$

$$= (x+4)^3 + 3(x+4)^2 + 2(x+4) + 4.$$

Efectuînd ridicările la putere şi reducînd termenii asemenea, avem:

$$3x^3 + 7x^2 - 22x - 78 = 0 \quad \text{sau} \quad x^3 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{22}{3}x - 26 = 0$$

Se observă că pentru $x = 3$ polinomul se anulează, deci este divizibil cu $(x - 3)$. Se obţine ecuaţia:

$$(x - 3)(3x^2 + 16x + 26) = 0$$

de unde $x - 3 = 0$, $x = 3$ şi $3x^2 + 16x + 26 = 0$, $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 76}}{3}$.

Cum baza unui sistem de numeraţie nu poate fi decît un număr real, pozitiv şi întreg, soluţia problemei este $x = 3$; $y = 5$; $z = 7$.

Problema 1160

Să se arate că în vîrful A al unui stîlp AB ridicat în prelungirea razei pămîntului, de înălțime

$$AB = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\omega^2 \cos^2 \lambda}} - R$$

accelerația gravității (datorită atracției pămîntului și forței centrifuge) are direcția perpendiculară pe stîlp; prin urmare un fir cu plumb atîrnat în A este orizontal în loc de a fi vertical. Mărimea accelerației gravitației în A este

$$g = \sin \lambda \sqrt[3]{g_0 R^2 \omega^4 \cos \lambda}$$

În aceste formule, g_0 = accelerația gravității la suprafața pămîntului datorită numai atracției pămîntului; R = raza pămîntului; ω = viteza unghiulară de rotație a pămîntului; λ = latitudinea stîlpului AB.

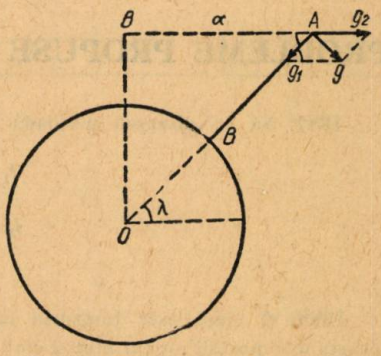
Aplicație pentru $\lambda = 45°$. Se va lua: $g_0 = 10$ m/s², $R = 6400$ km, $\omega = 0{,}000073$ rad/s.

Alexandru Stoenescu

Soluție dată de *M. Iosifescu.* — În punctul A mărimea accelerației gravitației datorită numai atracției pămîntului este dată de relația $g_1 = \frac{g_0 R^2}{(R + AB)^2}$. Accelerația centrifugă g_2 în același punct va fi

$$g_2 = \omega^2 d = \omega^2 (R + AB) \cos \lambda.$$

Pentruca rezultanta accelerațiilor g_1 și g_2 să fie perpendiculară pe direcția AB este necesar și suficient ca $g_1 = g_2 \cos \lambda$. De aci obținem prima relație din enunț.



Mărimea accelerației în A, rezultanta accelerațiilor g_1 și g_2 va fi $g = g_2 \sin \lambda$. De aci obținem a doua formulă.

Aplicație. — În cazul numeric dat, $AB = 53570 - 6400 = 47170$ km. $g = 0{,}1427$ m/s². (Aceste valori au fost calculate cu ajutorul logaritmilor).

Problema 1162

Cîte molecule se află într-un cm³ de azot aflat la presiunea de 10^{-6} torr și temperatura de 27°C (1 *torr* = 1333 *dyne/cm²*).

N. Stănescu

Soluție. — Avem $\mu = \frac{P}{KT}$ unde μ este numărul de molecule, p = presiunea, K = constanta lui Boltzman ($K = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{crg}}{\text{grad}}$), T = temperatura absolută.

$$p = 10^{-6} \text{ torr} = 10^{-6} \cdot 1333 \text{ dyne/cm}^2$$

$$T = 273° + 27° = 300° = \frac{10^{-6} \cdot 1333 \text{ dyne/cm}^2}{1{,}38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}} \, 300 \text{ grade}} 1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \cdot 1333 \cdot 2{,}42 \cdot 10^{13}$$

$$= 3221{,}86 \cdot 10^7 \text{ molecule}$$

Problema 1165

Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \sin^2 b \cos^2 c +$$
$$+ \cos^2 a \cos^2 c \sin^2 c + \cos^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \sin^2 a \cos^2 b \sin^2 c +$$
$$+ \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1.$$

N. Mihăileanu

Soluție: Grupînd convenabil termenii și ținînd seama de identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, avem:

$$\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 a \sin^2 b \cos^2 c +$$
$$+ \cos^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 c =$$
$$= \cos^2 a [\cos^2 c (\sin^2 b + \cos^2 b) + \sin^2 c (\sin^2 b + \cos^2 b)[= \cos^2 a \text{ analog:}$$
$$\sin^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \cos^2 b \sin^2 c +$$
$$+ \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = \sin^2 a$$

PROBLEME PROPUSE *)

1387. Să se găsească perioada funcțiilor:

$$f_1(x) = \cos \frac{3x}{s} - \sin \frac{x}{3}$$
$$f_2(x) = \cos 2x - \operatorname{tg} x$$

L. Ghibș (Moscova)

1388. O sferă este tangentă la toate muchiile unui tetraedru. Să se demonstreze că aceasta este posibil numai atunci cînd sumele muchiilor opuse ale tetraedrului sînt egale.

P. Erdniev (Reg. Altai)

1389. Un ceasornicar la montarea ceasului, din greșeală, a pus pe axa minutarului limba ce arată ora, iar pe axa ce arată ora a pus minutarul. După cît timp ceasul mergînd regulat, situația limbilor va corespunde timpului real. De cîte ori în 12 ore și în ce momente va avea loc această potrivire, limbile arătînd inițial ora 12.

R. Melnicov (Leningrad)

1390. Un proiectil sferic de plumb cu diametrul de 1 cm este aruncat în sus pe verticală cu o viteză inițială de 490 m/s. Neglijînd rezistența aerului, care este înălțimea maximă de urcare? Care ar fi temperatura pe care ar căpăta-o proiectilul dacă la jumătatea drumului în timpul urcării, energia cinetică s-ar transforma în căldură?

Virgil Atanasiu

---

*) Se primesc soluțiile pînă la 1 martie 1955.

1391. Să se calculeze suma:

$$S_n = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + \ldots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}.$$

H. Hamzin (Sterlitamak)

1392. Să se rezolve sistemul

$$a(ax + by + cz) - kx = A$$
$$b(ax + by + cz) - ky = B$$
$$c(ax + by + cz) - kc = C$$

Indicație: Înmulțim ecuațiile cu a, b, c și le adunăm.

N. N. Mihăileanu

1393. Să se reprezinte grafic funcțiile

$$y_1 = \sqrt{x + 2a\sqrt{x - a^2}} + \sqrt{x - 2a\sqrt{x - a^2}}$$
$$y_2 = \sqrt{x + 2a\sqrt{x - a^2}} - \sqrt{x - 2a\sqrt{x - a^2}}.$$

Caz particular $a = \frac{1}{2}$.

C. Ionescu Țiu

1394. Dacă a, b, c sînt trei numere reale și pozitive, există inegalitatea

$$(\Sigma a^5)\left(\Sigma \frac{1}{a}\right) \geqslant (\Sigma a^3)(\Sigma a) + 2\Sigma[(a^2 - b^2)^2 + 2(a - b)^4].$$

Mihail I. Popescu, student, București

1395. Fie β și γ unghiurile făcute de medianele BB' și CC' ale triunghiului oarecare ABC, cu latura BC. Să se arate că:

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)}.$$

Florin Torjescu, elev, Pitești

1396. Să se construiască triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) cunoscîndu-se $a + b = m$, $h_a + h_b = n$; m, n fiind mărimi date.

Matei I. Nazarie, elev, București

1397. Să se calculeze cîte grame de zinc și acid sulfuric trebuie să intre în reacție pentru a obține 16,128 grame de hidrogen.

Dacă reacția are loc la 17°C și presiune normală (760 mm) să se calculeze volumul hidrogenului la temperatura de 27° și presiunea de 1000 mm.

Marin I. Matescu, elev, Tîrgoviște

1398. Se descompun 0,87 g de MnO_2 cu HCl concentrat la cald. Clorul ce se degajă este prins într-o eprubetă cu o soluție concentrată de amoniac și se prinde 55,8 cm^3 gaz măsurat la 0° și 760 mm. Se cere procentajul de mangan natural în bioxid de mangan. Mn = 55; O = 16; H = 14; Cl = 35,5. Volumul molecular = 22,32 l.

Willy Parascheiv, student, București

1399. In ciocnirea elastică dintre un foton incident și un electron, fotonul este difuzat în direcția θ și electronul deviat cu viteza v. Să se afle lungimea de undă a razei incidente (fotonul incident) și lungimea de undă a razei difuzate (fotonul difuzat). Se consideră cunoscute m, h, c.

S. V. Ionescu, elev, Pitești

1400. Un corp de greutate $G = 200$ kgf este lăsat să cadă liber pe verticală. Rezistența aerului este forța verticală ascendentă $F = \frac{1}{4c} S v^2$ (F în kgf, S suprafața maximă transversală a corpului în m^2, v viteza corpului în $\frac{m}{s}$). Să se arate că viteza corpului nu poate să întreacă o viteză maximă limită și să se calculeze această viteză pentru un corp cu secțiunea transversală maximă un cerc cu diametrul $D = 0{,}2$ m. Ce se întîmplă dacă corpul păstrîndu-și secțiunea transversală își mărește greutatea de $n = 4$ ori?

Alexandru Stoenescu

1401. Să se arate că funcția

$$y = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}$$

la valoarea $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 90°$; $180° \leqslant x \leqslant 270°$; $360° \leqslant x \leqslant 450°$; $630° \leqslant x \leqslant 720°$ și valoarea $\operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ pentru $90 \leqslant x \leqslant 180$; $270 \leqslant x \leqslant 360$; $450 \leqslant x \leqslant 630°$; apoi să se reprezinte grafic funcția y în intervalul $(0{,}720°)$.

C. Ionescu-Țiu

1402. Să se găsească valorile lui x pentru care ave m,

$$\sqrt{x + \sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - \sqrt{x - 1}} = a$$

unde a ia pe rînd valorile 1, $\sqrt{2}$ și 2; apoi, pentru fiecare caz să se facă verificarea.

C. Ionescu-Țiu

1403. In patratul $ABCD$ prelungim latura DC cu $CE = DC$. Cercul de centru E' rază ED taie pe AB în I și I'; EI și EI' taie pe BC în J și J'. Să se arate că triunghiul EJJ' este echilateral.

N. Mihăileanu

1404. Intr-un triunghi oarecare ABC ducem înălțimea AD și fie E și F mijloacele laturilor AB și AC. perpendicularele duse din D respectiv pe DE și DF taie laturile AC și AB respectiv în M și N. Să se arate că patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil și ortodiagonal.

L. Mănescu, R.-Vîlcea

1405. Fie cercurile O și O' secante în A și B de raze R și R'.. Prin A și B se duc două secante paralele MAM' și NBN'. *a)* Să se arate că dacă secantele variază rămînînd paralele, punctele M și N fiind pe cercul O iar M' și N' pe cercul O', figura $MNN'M'$ este un paralelogram. *b)*. Coardele MN, $M'N'$ și AB sînt egale. *c)* Coroana circulară cuprinsă între cercul O și locul geometric al mijlocului coardei MN, coroana circulară cuprinsă între cercul O' și locul geometric al mijlocului coardei $M'N'$, precum și cercul cu diametrul AB, au aceiași arie.

Marta Marini

1406. Pe axa unei oglinzi sferice concave se află un punct luminos la distanţă de 40 cm. de vîrful oglinzii. Dacă punctul luminos se apropie de oglindă cu 7 cm, imaginea sa se formează la o distanţă de oglindă de două ori mai mare. Care este distanţa focală a oglinzii?

* * *

1407. Luna face un ocol complet în jurul pămîntului în 27 zile, descriind aproape un cerc cu raza medie de 400.000 km.

Să se afle viteza liniară a mişcării lunii în jurul pămîntului şi acceleraţia ei normală în raport cu pămîntul.

* * *

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI [1]

E: 550. Drumul între două localităţi A şi B este, o parte AC orizontal şi o parte CB coborînd este uniform înclinată. Un pionier cu bicicleta pleacă din A şi face 10 km pe oră pe drumul orizontal şi 16 km pe oră la coborîre făcînd în total 30 minute. In acelaşi timp, un alt pionier pleacă pe jos din B şi face 3 km pe oră la urcare şi 5 km pe oră pe drum orizontal şi ajunge în A după 100 minute. Să se afle care este distanţa între cele două localităţi, locul unde s-au întîlnit cei doi pionieri şi după cît timp de la plecarea lor.

C. I. Ţ.

E: 551. Să se demonstreze că dintre toate patrulaterele care au diagonalele respectiv egale, aria cea mai mare este aceea a patrulaterului cu diagonalele perpendiculare între ele. *Indicaţie*: prin vîrfuri se duc paralele la diagonale.

C. I. Ţ.

E: 552. Să se arate că numărul π care exprimă raportul între lungimea cercului şi diametrul cercului, este cuprins între 3 şi 4 considerînd perimetrul exagonului înscris şi pătratul circumscris cercului.

* * *

E: 553. In care sistem de numere există relaţia

$$\left(\frac{2}{12}+\frac{1}{10}\right)\frac{120}{102}=1.$$

Numărul abc în baza x se scrie ax^2+bx+c.

Kiss Elemer, profesor

E: 554. Baloanele cu care se joacă copii se urcă în aer. Care este mai mare, greutatea balonului împreună cu aerul din interior sau un volum de aer înconjurător egal cu volumul balonului? Dece se ridică balonul?

* * *

---

[1]) Soluţiile se primesc până la 1 aprilie 1955.

Repartizarea problemelor clasa a V-a (550, 552, 561); VI (553, 554, 555, 560, 562); VII: (551, 556, 557, 558, 559).

E: 555. De ce un om culcat pe o pernă nu suferă nici o durere; iar dacă se culcă pe o pardoseală de beton nu este tot așa de plăcut?

— Există oare un corp încît o bucată din el să cîntărească 100 grame; iar introdus în apă să cîntărească 99 grame?

* * *

E: 556. Să se arate că

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+y}+4(x+y+z)=\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)(x+y+z)$$

Simon St. Petre

E: 557. Pentru ce roțile motoare ale unei locomotive au contra-greutăți?

— La ce servește indicatorul de nivel?

— La ce ser vește robinetul de jos și robinetul de sus de la țeava măsurătorului de nivel?

* * *

E: 558. Se dă $\frac{1-x}{1+x}=\frac{4}{9}$; $y^2=\frac{1}{x^2}-1$ și $z=\frac{2y}{1-y^2}$.

Să se calculeze x, y și z.

* * *

E: 559. In triunghiul echilateral ABC, paralela din C la AB taie perpendiculara în A pe AB, în punctul D. Să se arate că CD este jumătate din latura triunghiului echilateral.

N. M.

E: 560. Pentru 10 manuale de geografie și 15 manuale de biologie necartonate o școală a plătit 52,50 lei. Manualul de geografie cartonat costă cu 20% mai scump, iar cel de biologie cu 30 % mai scump și în acest caz manualele ar fi costat 66 lei. Cît costă un manual de geografie și unul de biologie necartonate?

(Olimpiada matematică Moscova 1953)

E: 561. Intr-un bazin sînt două robinete. La început s-a deschis primul robinet; după trei ore, bazinul s-a umplut pînă la jumătate cînd s-a deschis și al doilea robinet. După două ore s-a umplut întreg bazinul.

Care este capacitatea bazinului știind că prin al doilea robinet curge 20 l de apă pe oră.

(Olimpiada matematică Moscova 1953)

E: 562. Un magazin a vîndut o bucată de stambă de o calitate în 4 zile și a încasat 754 ruble și 65 copeici cu un beneficiu de 7,5%. In prima zi s-a vîndut $\frac{1}{6}$ din bucată și încă 5m., în a doua zi 0,2 din rest și încă 10 m., a treia zi $\frac{1}{4}$ din noul rest și încă 9m., iar în a patra zi $\frac{1}{3}$ din ceea ce a rămas după a treia zi și restul de 13 m.

Cît a plătit magazinul pe 1 m. de stambă?

(Olimpiada matematică Moscova 1953)

POŞTA REDACŢIEI

Corespondenţe primite pînă la 15 septembrie 1954

Ioan A. Rus, Oradea. Pentru a nu risca să rămîneţi cu numere lipsă din G.M.F. seria B din cauză că sosesc prea puţine în localitate, trebuie să vă abonaţi.

Waldhorn Gerhard, Gherla. Reclamaţiile de neprimirea revistelor trebuie făcute arătînd totodată şi numărul recipisei de plata abonamentului. Vînzarea revistelor cu numărul nu se face în toate localităţile.

Mendel Aron, Alba Iulia, şi alţi corespondenţi. Problemele date la examenele de admitere în facultăţi vor fi publicate pe măsura sosirii enunţului lor, deoarece ne-am adresat tuturor facultăţilor şi institutelor în acest sens.

Duduica C. Radu, Ploeşti. Nu v-a interesat personal articolul «Utilizarea sciotului»; însă prezintă interes practic. In planul redacţiei este trecută publicarea biografiei unor mari matematicieni şi articole de iniţiere în matematici moderne, aşa cum propuneţi şi d-voastră.

Gheorghe I. Mitroica, Calafat. Pentru cunoaşterea mai completă a teoriei electronului, trebuie cunoscute chestiuni de matematici superioare şi de fizică modernă care se predau la facultatea de fizico-matematici.

Radu Petrovici, Focşani şi alţi corespondenţi. Am luat act de dorinţa dv. referitoare la publicarea articolelor de geometrie. Vom menţiona la publicarea soluţiilor de probleme şi numele elevilor care au dat soluţie aparte, bine redactată, clară şi riguroasă şi însoţită de desenele necesare.

Ioan Gidioi, Piatra Neamţ. Este bine ca numărul de minimum 10 soluţii trimise să fie aşezate în ordine numerică a problemelor aşa cum trebuie să apară la rubrica rezolvitorilor, iar enunţul problemelor să nu fi apărut cu mai mult de 4 luni în urmă.

Const. N. Rotaru, Suceava. Nu am publicat din probemele ce aţi propus ele fiind prea cunoscute. Aşteptăm să propuneţi cîte o problemă care să aibă un enunţ mai deosebit de problemele propuse, cu o rezolvare mai interesantă şi dacă se poate cu o aplicaţie practică. Nu publicăm numele rezolvitorilor care au trimis în grup rezolvări de probleme, scrise cu aceleaşi cuvinte, identice sau uneori cu greşeli comune, fiindcă se deduce că nu au fost redactate de fiecare şi că nu toţi au înţeles deplin, soluţia problemei.

Valeriu Cimponerescu, învăţător, Făget, Timişoara. O reeditare a revistei dela apariţia ei şi pînă în prezent nu este realizabilă în prezent.

Ieronim Mihăilă, Roman. Am primit articolul ce aţi trimis intitulat «Problema canalelor de pe Marte», însă nu aţi trecut şi bibliografia pentru a vedea ce cărţi sau reviste aţi folosit în acest scop pentru a face documentarea.

Dan Sămărescu, Piteşti, şi alţi numeroşi corespondenţi. Reclamaţiile referitoare la neprimirea unor numere de revistă deşi sînteţi abonaţi, precum şi acelea referitoare la primirea cu mare întîrziere, faţă de numerele apărute în librării, se vor adresa către «Centrul de Difuzare a presei din Bucureşti, str. Const. Mille nr. 14». Abonaţii vor arăta şi numărul chitanţei de abonament.

Dacă numărul de exemplare din G.M.F. seria B ce soseşte lunar la librării sau chioşcuri în localitatea dv. este insuficient faţă de cerinţe, trebuie să vă adresaţi tot Centrului de difuzare a presei arătînd cîte exemplare în plus ar mai fi necesare.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME *)

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 septembrie 1954 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Iosifescu V.Marius (Pitești), *Andreescu G. Radu* (București), *Buzuloiu Vasile* (Oradea), *Bocu Mircea* (Oradea), *Vrăjitoru Dan* (Aiud), *Iordache I.Dan* (Constanța), *Matei Nicolae* (Tîrgu Mureș), *Kestenband Barbu* (București), *Weszelly Tiberiu* (Tîrgu Mureș), *Guiașu Silviu* (Oradea), *Ionescu V.Savin* (Pitești), *Șerb Gabriel* (Pitești), *Stroe Radu* (Ploești), *Torjescu Florin* (Ploești), *Pandrea Nicolae* (*Focșani*), *Donescu St.Dragomir* (*Focșani*), *Corban Adrian* (Tecuci), *Lupuțiu Ioan* (Ploești), *Popescu Al.Dan* (*Reșița*), *Nan Stelian* (Orașul Stalin), *Alexa I.Ioan* (Predeal), *Zigulescu D.Marin* (Rîmnicu Vîlcea), *Oprea A.Aurelian* (Tîrgoviște), *Popa Gh.Stancu* (Corabia), *Colibaba V.Tiberiu* (Galați), *Marinescu Aida* (Ploești), *Epuraș Mircea* (Predeal), *Zaharescu Marius* (București), *Nicolae Șt.Alexandru* (București), *Uță Marin* (Predeal), *Brebenie P.Corneliu* (*Tîrgoviște*), *Bătinețu M.Dumitru* (Giurgiu), *Stepan Ionel* (Constanța), *Vlaga Marius* (*Arad*), *Berechet M.Oprea* (București), *Stanciu E.Mirel* (Giurgiu), *Silion Dinu* (Ploești), *Vidan P.Marius* (Giurgiu), *Gervescu M.Ion* (Piatra Neamț), *Ellenberg Manfred* (București), *Rus A.Ioan* (Oradea), *Vulpescu Dumitru* (Ploești), *Cristea Aurel* (Focșani), *Popovici I. Radu* (București), *Mazilu T. Constantin* (București), *Aldea Vasile* (București), *Oprea Gh. Constantin* (București), Vidra) *Hodiș Gheorghe* (*Zalău*), *Ivănceanu Tatiana* (București), *Cîmpu Demetra* (București), *Minuț M. Petru* (*P. Neamț*), *Opriș A. Ioan* (C.lung. Muscel), *Popescu Gh.Sergiu* (Slatina) *Ionescu I.Ioan* (Tîrgoviște) și *Mettler Martin* (Timișoara).

* * *

Pînă la 1 septembrie 1954 s-au primit cel puțin zece soluții bune de la următorii rezolvitori **), *după cum se arată în paranteză, probleme propuse* (*P*), *note* (*N*) *și articole* (*A*).

ACNITA, Comuna Cincul. Schauerman Nicolae (1157, 159, 167, E: 401, 403, 406, 408, 409, 411—418, 420, 447, 448, 452, 454—460, 462, 465, 466, 470, 471, 437, 474, 475, 477, 479).

AIUD. Clasa IX-a. *Vrăjitoru Dan* (1165, 166, 167, 169, 170, 173, 175, 180, 183, 199, 200, 201, 207, 209, 214, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 224, 230, 231, 232, 239, 240, 249, 252—256, 260, 261, 268, 273—277, 284—289, *P*).

ALBA IULIA. Absolvent. Torsan Ilie (1212, 296, 301, 312, E: 448, 471, 473, 475, 476, 479, 480, 482, 505, 508, 512).

ALEXANDRIA. Absolvent. Georgescu Emil (1149, 243, 245, 246, 247, 261, 286, E: 381, 398, 400, 451, 457, 463, 479, 480, 481, 482).

ARAD. Absolvent. *Vlaga Marius* (1165, 166, 167, 169, 171, 179, 181, 183, 185, 186, 187, 194, 195, 200, 201, 202, 203, 204, 214, 216, 218, 221, 222, 224, 239, 240—246).

BACĂU. Oneşti, clasa VII. Axinte Dumitru (E: 411, 415, 418, 426, 427, 443, 445, 447, 451, 452, 453, 455, 460, 470), Tofan V. Dumitru (E: 411, 412, 415, 416, 418, 420, 447, 454, 455, 458, 459, 460, 462, 464, 465, 471, 473, 474, 475, 476, 479, 480); clasa IX-a, Focșăneanu I. Ioan (E: 457—463, 465—470), Popa Virginia (E: 447, 449, 451, 458, 460, 462, 470, 476, 505, 512, 519); clasa X-a. Merticaru Vasile (1140, 143, 194, 216, 239, 242, E: 401, 402, 404, 414, 417, 447, 454, 455), Tofan V. Vasile (1219, 231, 243, 245, 246, 247, 252, 269, E: 418, 420, 459, 463).

BAIA MARE. Mustea Ionel (1165, 171, 173, 183, E: 411, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 420, 422, 424).

---

*) *La premierea rezolvitorilor pe anul 1954 se va mai ține seamă și de soluțiile bune primite la redacție pînă la 1 decembrie 1954.*

**) Nu se mai anunță numele rezolvitorilor care au trimis mai puțin de zece soluții bune, decît după completarea numărului cerut.

BEIUŞ. Clasa V-a. Micle Minerva (E: 370, 371, 376, 382, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433).

BÎRLAD. Clasa X-a. Bichir Ilie (1022, 29, 38, 40, 42, 61, 65, 69, 150, 152, 159, 171, 221, 227, 229).

BOTOŞANI. Clasa V-a. Manoliu Teodor (E: 418, 425—433), Aslan Gheorghe (E: 418, 425—433), Horia Ion (E: 418, 425—433), Ochişor Constantin (E: 418, 425—433); clasa VIII-a. Vasiliu Monica (E: 457, 458, 460, 465, 470, 471, 473, 475, 477, 479); clasa IX-a. Simion I. Emil (1069, 88, 118, 121, 126, 127, 128, 148, 152, 159, E: 391, 411, 418, 425, 426, 427, 428, 429), Absolventă Cuciureanu Dina (1218, 220, 221, 222, 240—247).

BUCECEA. Clasa VII-a. Mihăilescu Cornelia (1159, E: 401, 402, 405, 408, 413, 460, 474, 475, 479), Tofan Maria (1159, E: 401, 402, 408, 413, 460, 473, 474, 475, 477, 479).

BUCUREŞTI. *Liceul 1 fete*, clasa VI-a A. Sălăgeanu Simona (E: 481—488, 505, 506), clasa VIII-a. Nicolescu Z. Liliana (E: 481, 482, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504).

Liceul 2—10—13 fete clasa VII-a. Butoi Mihalea (E: 471, 473, 475, 476, 477, 478, 505, 507, 508, 510, 511, 514, 515, 518, 519, P) *Ivănceanu Tatiana* (1297, 301, 315, E: 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 465, 467, 468, 469, 471, 473, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 505, 507, 508, 510, 512, 514, 515, 516, 518, 519, 520, P); clasa IX-a, *Ellenberg Manfred* (1143, 166, 174, 175, 179, 183, 185, 186, 188, 189, 191, 192, 195, 204, 216, 218, 219, 224, 230, 240, 241, 243, 244).

Liceul 3 fete, clasa VIII. *Cimpu Demetra* (1189, 221, 241, 242, 243, 245, 246, 248, 252, 254, 274, 291, 293, 301, 306, 310, E: 471, 473, 479, 482, 490, 505, 508, 510, 511, 513, 519).

Liceul 6 fete clasa VIII-a. Nicolau A.Ileana (E: 413, 41, 4, 415, 416, 417, 420, 424, 425, 426, 428, 429, 441, 449, 457, 462, 464, P)

Liceul 9 fete. Clasa VIII-a. Dogaru D.Viorica (1221, 245, 274, E: 457, 459, 460, 465, 470, 474, 476).

Şcoala elementară 11 fete. Clasa VI-a. Păduret Victoria (1252, E: 408, 454, 457, 459, 460, 471, 474, 475, 479).

Liceul 1 băieţi. Absolvent. *Nicolae St.Alexandru* (1084, 85, 86, 86, 87, 88, 89, 90, 91. 93, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 112, 113, 118, 122, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 133, 137, 139, P).

Liceul 5 băieţi. Absolvent. Manea Marin (1143, 165, 216, 281, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 247, 252, 255, 256, 269, E: 457, 471, 478, 479, 480).

Liceul 6 băieţi. Clasa IX-a. Luzi Florea (1093, 113, 127, 148, 214, 221. 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, E: 413, 447, 452, 453, 460, 464, 465, 470), *Popovici I Radu* (1161, 173, 175, 181, 191, 192, 204, 211, 221, 239, 240, 241, 243, 244, 246, 247, 248, 252, 254, 276, 286, 316, 319, E: 448, 462, 471, 473, 474, 475, 476, 477, 479, 481, 482, 483, 484, 486, 487, 490, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 505, 509, 510, 513).

Liceul 7 băieţi. Clasa X-a. *Mazilu T. Constantin* (1118, 121, 122—123, 124, 126, 127, 128, 129, 134, 137, 138, 139, 140, 142, 149, 150, 151, 159, 164, 165, 166, 167, 169, 171, 172, 173, 174, 175, 183, 186, 187, 190, E: 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 395, 396, 397, 399—406, 408, 409—420, 422—433, 436—446, P).

Liceul 9 băieţi. Clasa IX-a. *Berechet M.Oprea* (1143, 152, 164, 166, 174, 175, 179, 181, 183, 184, 185, 186, 188, 189, 192, 195, 202, 204, 205, 211, 216, 218, 219, 221, 224, 230, 233, 240—249, P).

Liceul 10 băieţi, — «*Aurel Vlaicu*». Clasa VIII-a. Draica Constantin (E: 457, 458, 459, 460, 462, 463, 464, 465, 466, 469); clasa IX-a. Nistreanu N.Valeriu (1241, 243, 245, 252, 255, E: 454, 457, 458, 460, 462, 465, 466, 469, 471, 475, 477, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 497, 498, 499, 502).

Absolvenţi de Şcoli medii, deveniţi Studenţi în Bucureşti:

Studenţi: *Andreescu G. Radu* (1194—197, 201—206, 208, 209, 211, 214—229, 231, 233, 235—267, P), *Kestenband Barbu* (1161, 195, 204, 208, 216, 218, 221, 222, 224, 229, 230, 232, 240, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 254, 255, 256, 260, 261, 264, 266, 267, 268, 269, 273, 274, 276, 277, 278, 279, 280, 282, 284, 287, 289, 291, 292, 293, 294, 297, 299, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 310, 314, 315, 316, P), *Aldea Vasile* (1202, 211, 214, 219, 221, 229, 230, 231, 232, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 248, 252, 253, 276, 278, 287, 292, 304, 312, 315, 317, 319, E: 448, 449, 451, 452, 457, 460, 469, 479, 480, 505, 518, 519, 520, P), *Pandrea Nicolae* (1214, 216, 217, 218, 220, 221, 222, 224, 226, 227, 228, 230, 232, 237, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 249, 251, 254, 261, 301, P), *Stoleru Gheorghe* (1143, 214, 241, 242, 246, 252, 253, 255, 261, 288, 289, 292), *Zaharescu Marius* (1216, 220, 221., 223, 224, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 259, 261, 263, 266, 267, 269, 273, 275, 276, P), *Ene G. Apostol* (1053, 133, 143, 146, 184, 188, 190, 193, 195, 196, 201, 201, 204, 208, 221, 224, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 250, 251, 254, 256, 259, 260, 268), *Donescu St Dragomir* (1143, 146, 164, 165, 166, 167, 169, 170, 171, 175, 179, 181, 183, 185, 186, 188, 190, 195, 201, 202, 203, 204, 206, 209, 216, 218, 220, 221, 222, 223, 224, 226, 227, 230, 232, 233, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247, P), *Bătineţu M. Dumitru* (1140, 143, 148, 157, 159, 160, 162, 163, 165, 167, 168, 170, 172, 173, 179, 187, 188, 199, 200, 204, 207, 212, 214, 216, 218, 221, 224, 230, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 247, 252, 256, P, E: 402, 403, 404, 411, 412, 415, 416, 418, 447, 452, 457, 458, 465, 470, 473, 375, 39, *Nan Stelian* (1020, 88, 89, 121, 125, 126, 127, 128, 129, 137, 138, 139, 143, 149, 152, 159, 165, 167, 169, 171, 183, 187, 194, 212, 213, 214, 219, 221, 225, 232, 236, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 253, 254, 255, 261, 272), *Minuţ M.Petru* (1164, 166, 169, 170, 173, 181, 182, 186, 187, 188, 190, 194, 195, 200, 202, 203, 209, 212, 216, 219, 221, 224, 227, 239, 244, 246, 248, 249, 250, 252, 254, 255, 256, P, N), *Iosifescu V.Marius* (1157—178, 180—190, 192—202, 204, 205, P, A), *Vulpescu Dumitru* (1140, 143, 149, 154, 157, 159, 166, 165, 171, 175, 179, 183, 184, 185, 201, 202, 208, 215, 227, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247, 252, 254, 255, 261, 269, 274, 276, 284, 286, 288, 289, 292), *Zigulescu D.Marin* (1131, 176, 178, 179, 189, 202, 209, 214, 216, 218, 221, 222, 224, 227, 230, 233, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 252, 253, 254, 255, 256, P).

Şcoala medie de măsurători terestre, Bucureşti. Anul I. Popescu Paul (1167, 204, 221, 241, 245, 252, 255, 274, 288, 290, 292, E: 404, 405, 406, 408, 409, 411, 412, 413, 414, 415, 418, 419, 422, 423, 424, 441, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 490, 491, 493, 496, 497, 499, 500, 502, 503, 504), *Şcoala de 7 ani Chitila.* Clasa VI-a. Dinu V. Coralia (E: 437, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 449, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496), Dumitrescu A. Aurel (E: 385, 394, 396, 398, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441); clasa VII-a. Chiru Constantin (E: 370, 384, 385, 392, 394, 398, 442, 443, 444, 445, 446), Stan Gherghina (E: 386, 387, 388, 408, 411, 412, 442, 443, 444, 445, 446).

Şcoala medie tehnică « Iosif Rangheţ », anul II. Fulga Dumitrŭ (1143, 243, 247, E: 402, 418, 423, 446, 451, 453, 470).

Şcoala medie tehnică de mecanică nr. 2. Anul II. Butnaru Iacob (1152, 154, 159, 221, 241, 248, 245, E: 403, 411, 457, 460), Nica Nicolae (1219, E: 412, 447, 454, 457, 460, 462, 469, 470, 479), Scarpet Grigore (1152, 175, 240, 241, 242, 245, E: 406, 412, 447, 467), Pescaru Nicolae (1165, 175, 189, 190, 216, 221, 240, 241, 242, 243, 245, E: 447, 457, 459, 460), Radu N. Constantin (1183, 157, 159, 141, 241, 242, 245, E: 407, 412, 448, 457, 466), Văduva Ion (1175, 189, 190, 240, 241, 245, E: 406, 447, 460, 470); anul III. Caragea Gheorghe (1118, 143, 157, 159, 171, 183, 221, 241, 245, E: 407, 412, 431, 448, 457, 458, 459, 466), Gheorghiu Petre (1118, 121, 124, 126, 152, 159, 165, 183, 221, 240, 241, 242, 247, E: 447, 459), Grigoraş Aurel (118, 121, 124, 143, 157, 159, 190, 231, 241, 242, E: 396, 407, 309, 427, 431, 447, 457, 458,

460, 461, 466, 469), Niculescu Ion (1118, 124, 129, 157, 159. 165, 183, 241, 245, 246, 247, E: 402, 407, 411, 412, 421, 447, 460), Radu C. Constantin (1121, 124, 257, 259, 183, 241, 242, 245, E: 407, 428, 434, 447, 457, 459, 460, 466), Soare Constantín (1104, 143, 152, 157, 159, 165, 183, 241, 242, 245, E: 447, 460).

Şcoala medie Sinteşti — Vidra. — Oprea G. Constantin (1025, 37, 40, 42, 68, 69, 70, 78, 79, 81, 84, 88, 95, 102, 143, 151, 152, 157, 162, 163, 165, 179, 183, 221, 229, 240, 242, 245, 246, 247, E: 350, 358, 362, 364, 365, 402, 403, 404, 409, 411, 412, 416, 418, 457).

BUZĂU. — Clasa IX-a. Arhire Cornelia (1152, 183, E: 370, 373, 411, 412, 415, 418, 447, 448), Carpat Letiţia (1191, 278, 282, 304, 306, 315, 316, 317, 318, 319), Golianu Zoica (1126, 165, 179, 183, 185, E: 407, 411, 418, 421, 452), Ghiţă Marieta (1083, 88, 152, 154, 163, 201, E: 379, 402, 407, 412, 425), Ioniţă Aurelia (E: 425, 426, 428, 429, 431, 434, 436, 441, 442, 443, 444, 445, 446), Petrache Rodica (1165, 183, E: 411, 412, 415, 418, 419, 425, 428, 441, 447, 454), Olteanu Cristina (E: 411, 412, 413, 415, 418, 419, 425, 428, 447, 454); clasa X-a Cotor M. Constantin (1200, 207, 214, 217, 219, 231, 232, E: 422, 423, 447, 448, 449, 450, 451, 457, 458, 459, 460, 467, 469), Rusiu Gheorghe (1216, 218, 243, 245, 246, 249, E: 470, 508); clasa X-a. Popescu N. Ion (1240, 242, 244, 245, 247, 255, 256, 261, E: 471, 474, 476, 477, 479); clasa XI-a. Guţu Alexandru (1124, 126, 127, 128, 152, 170, 183, 190, 201, 204, 239, 242, 244, 245, 246).

CALAFAT. — Clasa X-a. Mitroaica I. Gheorghe (1239, 240, 241, 242, 243, 245, 247, 248, 249, 251, 252, 253, 254, 256, 257, 258).

CĂLĂRAŞI. — Clasa X-a. Vasilescu Aurel (1140, 152, 159, 165, 173, 174, 216, 239, 240, 241, 243, 244, 245, 246, 247), Simpăleanu Traian (1183, E: 411, 414, 418, 451, 454, 457, 460, 466, 475, 479).

CÎMPINA. — *S. m. t. petrol Moreni*, anul III. Enăchescu T. Stoian (1142, 165, 166, 167, 169, 175, 179, 181, 183, 190).

CÎMPULUNG MUSCEL. — *Şcoala medie tehnică de cărbuni*, anul IV. *Opriş A. Ioan* (1121, 124, 126, 128, 139, 143, 157, 165, 169, 179, 183, 188, 191, 193, 201, 208, 216, 219, 220, 221, 224, 230, 231, 232, 239—242, 244—247, E: 384, 387, 397, 400, 411, 412, 418, 447, 451, 457, 469, P), Savin I. Dan (1164, 165, 166, 168, 169, 170, 174, 175, 184, 188, 190, P).

CÎMPULUNG MOLDOVENESC. — Clasa VIII-a. Apetrei Nicolae (E: 426, 425, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446); *anul II Construcţii*, Boloca Ioan (1165, 166, 175, 181, 183, 184, 185, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247).

CARANSEBEŞ. — *Absolvent.* Cîmponerescu Valeriu (1239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, E: 457, 458, 460, 465, 469).

CLUJ. — Clasa VI-a. Mănăştureanu Florica (1252, 253, E; 457, 458, 460, 465, 469, 471, 475, 479).

Şcoala specială muncitorească. Anul II. Negoiţă Nicolae (1221, 243, 248, 252, E: 457, 470, 471, 473, 474, 475), Popescu Steliana (1230, E: 390, 412, 421, 447, 448, 457, 464, 465, 470), Pistol Nicolae (1230, 243, 246, E: 402, 404, 412, 421, 457, 458, 464, 465, 470), Sîngerean Gheorghe (1243, 248, 252, 284, 288, 290, 292, E: 448, 464, 465, 470, 473, 475 476, 477, 479, 497, 498, 499, 500, 502, 503, 504).

CONSTANŢA. — Clasa VII-a. Ştefan Mihai (1171, 173, 183, 202, 204, 209, 240, 247, E: 371, 372, 377, 378, 379, 380, 382, 411, 412, 438, 439, 440, 441, 443, 444, 445, 446, 457, 458, 460, 461, 462, 463, 466, 469); clasa X-a. *Iordache I. Dan* (1208, 248-261, 263—269, 273—280, 282, 284—294, P). *Şcoala hidrotehnică*, anul II. Alim Redvan (1216, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 247, E: 457, 458, 460, 462, 463, 467), Vanghelicescu Stere (1080, 82, 93, 124, 126, 165, 183, 185, 201, 204, E: 378), Vasiliev Lucia (1165, 171, 173, 183, 202, 204, 209, 213, 240, 247, E: 411, 412, 414, 415, 418, 419, 422, 423, 424, 447, 451, 454, 457, 458, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 468, 469, 470); anul III. *Stepan Ionel* (1090, 94, 96, 113, 148-151, 153-163, 168, 171,

173, 189, 191, 194, 195, 199, 200, 205, 206, 210, 211, 212, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 227, 231, 232, 233, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, E: 401, 403—407, 409, 411—424, 447—453, 455, 457, 458, 460, 462—467, 469, 470), *Tehnician*. Georgescu Mihai (1167, 252, E: 457—460, 462, 475, 479, 480).

CORABIA. — *Liceul mixt*, clasa VIII-a. Delu Stefan (1245, 254, E: 453, 457, 459, 460, 473, 474, 476, 478); clasa X-a. *Popa G. Stancu* (1182, 202, 203, 204, 208, 211, 214, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 224, 226, 228, 229, 230, 233, 237, 238, 239, 240—254, 256, 257, 260, 261, 263, 265, 266, 297, 300, 301, 302, 303, 306, 310, 311, 313, 314, E: 452, 453, 454, 470, 473, 478, P), *Absolvent* Ball N. Lucian (1165, 240, 243, 245, 246, 247, E: 411, 412, 415, 418).

CRAIOVA. — *Liceul 1 băieți*, clasa VIII-a. Ionescu N. Constantin (E: 462, 471, 473, 513, 520, 521, 523, 526, 528, 529, 533); clasa IX-a Bărbulescu I. Nicolae (1152, 169, 427, 431, 435, 457, 458, 460, 463, 470); Clim Sorin (1221, 230, 239, 241, 244, 245, 246, E: 457, 458, 460, 463, 470), Turlea Dorin (E: 402, 404, 406, 411, 412, 415, 417, 418, 424, 447, 452, 457 458, 459, 469); clasa X-a. Ion N. Matei (1079, 80, 98, 102, 124, 154, 159, 239, 240, 241 242, 243, 245, 246, 247, E: 373, 443, 444, 447), Truța Coriolan (1140, 142, 152, 154, 155, 157, 159, 165, 166, 167, 168, 175, 179, 183, 185, E: 401—410, 412, 413, 414, 415, 416, 418, 422, 424—446, *Liceul 2 băieți*, clasa X-a. Sandu Titu (1140, 143, 148, 149, 150, 165, 166, 169, 175, 183, 189, 216, 242, 243, 245, 248, 249, E: 454, 473, 475, 480), Trifan Vasile (1215, 216, 224, 239, 240, 243, 245, 246, 252, 268, 269, 274, 275, 276, 284, 290, E: 475, 478); *Liceul 1 fete*, clasa IX-a. Ionescu N. Marioara (E: 510, 513, 520, 521, 523, 526, 528, 529, 530, 531), *Școala medie electrotehnică* anul II. Chitucea Eugen (1087, 88, 126, 165, E: 380, 381, 411, 412, 418, 447); anul III, Bărbuică Nicolae (1070, 93, 154, 202, 209, 214, 218, 221, 243, 252, 255, 256, 261, P); *Școala de drumuri și poduri*, anul IV. Ghirlea Constantin (1252, 284, E: 447, 449, 452, 454, 455, 481, 482, 288); *Școala medie c. f. r.* anul III. Dincă D. Ion (1084, 85, 86, 87, 88, 98, E: 369, 370, 373, 376, 378, 380, 381, 382), Tudorache Nicolae (1239, 240, 242, 245, 246, E: 505, 508, 510, 519, 520); *Absolvenți*: Guran Marius (1078, 88, 101, 113, 129, 148, E: 389, 390, 395, 404), Florescu G. Mircea (1169, 174, 207, 215, 216, 219, 220, 224, 230, 239, 240, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 255, 261, 269, E: 434).

CURTEA DE ARGEȘ. — Clasa X-a. Dumitrescu I. Aurel (1217, 218, 219, 224, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, E: 373, 378, 380, 381, 453, 460, 465, 470), *Absolvent*. Ene St. Ion (1239, 240, 242, 243, 245, 246, 247, 250, 255, 261).

DEJ. — Clasa IX-a. Costin Margareta (E: 410, 411, 415, 421, 425, 427, 428, 429, 440, 447), Petrovan Eugenia (E: 405, 411, 413, 418, 425, 426, 427, 429, 434, 435, 449, 457, 459, 461, 468, 469, 471, 475, 478), Stein Maria (E: 411, 412, 425, 426, 427, 429, 431, 441, 448, 449), Lazăr Ana (E: 418, 426, 428, 429, 431, 440, 441, 446, 447, 449).

DRĂGĂȘANI. — *Școala tehnică agricolă, Voiceşti*. — Anul II. Constantinescu Evlampia (E: 370, 408, 411, 412, 418, 425, 428, 429, 44o, 447, 454).

FĂLTICENI. — Vioreno Rogis (1239, 240-249, 252, E: 457—430, 470, 471, 474, 475, 479).

FOCȘANI.— Clasa VI-a. Vasiliu Veturia (E: 447, 449, 450, 452, 454, 455, 458, 459, 460, 462, 463); clasa IX-a. Pascu Corneliu (1148, 149, 183, E: 390, 409, 411, 412, 427, 447, 452), *Cristea Aurel* (1154, 165, 166, 179, 195, 204, 216, 218, 219, 221, 230, 239, 240, 241, 242, 243, 246, 247, 248, 249, 252, 254, 273, 274, E: 413, 415, 417, 422, 427, 426, 428, 429, 431, 432, 433, 435, 436, 437, 441, 442, 443, 444, 445, 452, 453, 454, 458, 462, 463, 466, 471, 473 474, 475, 476, 478, 479, 480), Tăru G. Emil (1084, 93, 148, 162, 163, 183, E: 369, 370, 390, 452, 453); clasa X-a. Porumb G. (1053, 87, 148, 157, E: 370, 379, 382, 383, 454, 455); *Școala elementară Bordeștii de sus*, clasa VI-a. Cristea Rodica (1252, 1316, 1317, E: 457, 458, 460, 471, 473, 474, 479, 488, 489, 490, 499, 505, 519, 521); *Absolvent Petrovici Radu* (1143, 151, 152, 159, 164, 165, 167, 170, 175, 180, 183, 186, 188, 203, 204, 208, 220, 221, 224, 241, 242, 245, 246, 247, N. P).

GALAŢI. — Clasa X-a. *Colibaba V. Tiberiu* (1214, 216—219, 221, 229, 230, 231, 232, 236, 240—249, 252—256, 261, 268, 269, 273—278, 284—293, 299, 300, 303, 306, 310, 313, 315—319, P); *Şcoala medie tehnică mecanică*, anul III. *Ariton I. Vasile* (1081, 84, 87, 88, 98, 102, 124, 126, 128, 129, 134, 135, 138, 195, 202, 204, 227, 248, 250, 251, 266, 269, E: 378, 389, 398, 448, 450, 453, 460, 470, 471, 479), Calianu Oprea (1222, 243, 245, 247, 252, 287, 288, 292, E: 457, 482, 488, 490, 497, 499).

GHEORGHIENI. — *Absolvent*. Cilinghir Vladimir (1165, 175, 181, 183, E: 412, 411, 413, 414, 415, 416, 418, 423).

GIURGIU. — Clasa VII-a. Minu I. Marin (E: 411, 435, 436, 438, 439, 440, 449, 452, 457, 460, 461, 467, 469, 481, 483, 487); clasa VIII-a Stoenică St. Marin (E: 389, 391, 394, 398, 401, 405, 412, 415, 416, 417, 447, 451); clasa IX-a. Mişcol Mircea (1216, 224, 230, 233, 241, 243, 247, 248, 251, 255, 256, 261, 265, 268, 269, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 282, 284, 287, 290), Petcu T. Florian (1042, 61, 93, 118, E: 353, 354, 357, 362, 369, 372, 373, 382), Roşu M. Petrică (1141, 151, 152, 159, 162, 163, 165, 167, 183, 188, 191, 204, E: 402, 403, 404, 406, 407, 409, 411, 412, 414, 415, 416, 418, 447, P), Toda Traian (1142, 144, 148, 214, 243, E: 405, 412, 413, 415, 418, 424, 447, 457, 458, 460, 463) Slăvescu N. Alexandru (1194, 206, E: 387, 389, 391, 392, 396, 398, 399, 457); clasa X-a. Mateescu Doina (1165, 171, 174, 175, 179, 190, 191, 203, 209, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, E: 447, 452, 453, 454, 455, 481, 482, 484, 489, 490, 493, 494, 496), *Stanciu E. Mirel* (1200, 203, 212, 214, 216, 219, 231, 232, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 251, 253, 254, 255, 256, 261, 264, 265, 272, E: 447, 448, 449, 450, 451, 452, 454, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 466, 467, 468, 469, 478, P), *Vidan P. Marius* (1121, 127, 139, 149, 151, 152, 156, 159, 164, 165, 167, 168, 172, 174, 183, 202, 214, 219, 221, 239, 240, 241, 243, 245, 247, 250, 252, 253, 255, 256, 272, E: 422, 471, 479, 480, 482, 490, 491, 495, P); anul III. Negoi M. Ion (1084, 145, 152, E: 399, 405, 414, 421, 422, 423, 441).

IAŞI. — Clasa VII-a. *Hîrlău*. Tibuleac Florin (1217, 219, 231, E: 421, 448, 450, 452, 457, 458, 459, 460, 462, 463, 464, 465, 467, 466, 468, 469, 470, 471, 475, 477, 478, 479, 480, 505, 517, 519, 520, 521); clasa X-a. Geambaşu Lică (1078, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 90, 96, 97, 98, 99, 100, 113), Segal Zigu (1126, 240, 241, 242, 245, 247, 255, 303, E: 380, 406, 407, 447.

OCNA MUREŞ. — Clasa X-a. Horvath Ion (1047, 152, 171, 239, 240, 241, 242, 245, 246, 247).

ORADEA. — Clasa IX-a. Bocu Monica (1152, 154, 159, 165, 179, 183, 195, 204, E: 460, 470), *Guiaşu A. Silviu* (1140, 141, 142, 143, 145, 148, 149, 151, 152, 153, 154, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 170, 172, 173, 174, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 185, 187, 188, 191, 192, 194, 195, 199, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 211, 214, 216, 219, 220, 221, 222, 224, 227, 229, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 256, 261, P), *Rus A. Ioan* (1167, 174, 175, 176, 178, 181, 184, 190, 195, 201, 202, 204, 208, 209, 210, 213, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, VI; 1, VII; 1, VIII; 1, 2, 3, IX; 1, P), Şincai Radu (1240, 243, 245, 252, E: 447, 457, 459, 460, 470, 471, 473, 475, 476, 478, 479); clasa X-a. *Buzuloiu Vasile* (1140, 141, 142, 143, 145, 147, 148 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 169 170, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 190, 192), *Bocu Mircea* (1143, 147, 155, 193, 194, 195, 196, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 212, 214, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 228, 230, 233, 236, 237, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247).

ORAŞUL STALIN. — Clasa V-a. Barbu Ovidiu (E: 471, 474, 475, 479, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488), Popescu V. Horia (E: 454, 455, 457, 459, 460, 471, 472, 474, 475, 479), Gheorghe Ion (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 454); clasa VIII-a. Ciucu Aurora (E: 402, 447, 453, 454, 455, 459, 459, 460, 462, 477, 478); clasa IX-a. Ciobanu Ioan

(1251, 252, 288, E: 460, 470, 472, 478, 479, 497, 499, 502, 503), Minea Florian (1195, 216, 217, 218, 219, 220, 230, 231, 239, 241, 243, 246, E: 447, 448, 449, 450, 451, 452, 454, 455, 457, 458, 460, 461, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470), Păcurariu Dan (1252, E: 457, 458, 459, 460, 462, 463, 464, 465, 466, 470); *anul III, mecanică* Teutsch Ulrich (1218, 139, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247).

PANCIU. — Clasa VIII-a. Popovici St. Nicolae (E: 371, 397, 398, 401, 402, 404, 407, 408, 409, 410, 412, 421, 447, 448), *Absolvent* Cristian I. Gheorghe (1240, 242, 243, 246, 278, 284, 286, 288, 289, 306, 310, 315, E: 513, 515, 519, 520, 521).

PIATRA NEAMŢ. — *Şcoala elementară Roznov.* — Clasa VII-a. *Gervescu M. Ioan* (1252, 284, 286, E: 447, 449, 450, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 462, 463, 465, 471, 472, 474, 475, 476, 479, 481-500, P), Hodor D. Constantin (E: 447, 449, 452, 454, 455, 457, 458, 459, 560, 489, 490, 492, 493, 494, 495, 496); clasa VIII-a. Hărăbor Mihai (401, 402, 405, 406, 409, 410, 411, 412, 413, 415, 418, 424, 447, 449, 454).

PITEŞTI. — Clasa IX-a. Sămărescu F. Dan (1208, 214, 219, 222, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 254, 256, 257, 266, E: 471, 473, 474); clasa X-a. Bogaciu P. Valeriu (1165, 166, 168, 169, 175, 179, 180, 181, 183, 185, 186, 188, 194, 204, 205, 208), Sorescu Victor (1223, 229, 240, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 254, 261, 269, E: 473, 474, 476, 477, 478, 479), *Şerb Gabriel* (1248—256, 258—261, 263—265—269, 273—278, 280, 281, 283—292, P), *Absolvent Ionescu V. Savin* (1214, 216, 219, 221, 222, 223, 228—231, 233, 239, 240, 247, 273, 274, 277, 280, 287, (P).

PLOEŞTI. — Clasa VI-a. Timuş M. Dan (E: 460, 479, 481, 482, 483, 484, 487, 505, 515), Paraschiv G. Elena (E: 402, 403, 404, 406, 407, 408, 409, 410, 445, 447); clasa VIII-a Mezincescu Ana (1084, 93, E: 410, 411, 412, 441, 445, 447, 460, 481); clasa IX-a. *Lupuţiu Ioan* (1193, 201, 214, 220, 221, 227, 229, 233, 251-256, 261, 263, 265, 273-278, 285, 287-293), Ghiculescu Teodor (1025, 68, 118, 128, 149, 152, 159, 163, 167, 183, 199, 205, E: 364). Ariton Dan (E: 402, 405, 411, 412, 413, 418, 424, 447, 454, 457, 459), Kupferberg Albert (1087, 81, 84, 93, 96, 97, 98, 118, 127, 128, 140, 148, 151, 152, 154, 157, 159), Stroe Radu (1164, 166, 171, 207, 219, 220, 224, 241, 245, 248, 252, 253, 255, 256, 257, 260, 261, 263, 265, 269, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 281, 285, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 297, 301, 306, 310, 314, P), Văgăunescu Gheorghe (E: 402, 405, 411, 412, 413, 318, 424, 447, 454, 457, 459), Popovici G. Iulian (1214, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 230, 231, 233, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247); clasa X-a. Jipa G. Vasile (1216, 221, 229, 230, 231, 239, 240, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 254, 273, 274, 275, 276, 286), Parepa C. Grigore (1148, 149, 152, 159, 165, 181, 183, 239, 240-243, 245, 246, 247, P), Vulpescu Marcel (1157, 240, 242, E: 457, 460, 471, 473, 475, 478, 479); *Absolvenţi : Marinescu A. Aida* (1143, 154, 157, 184, 201, 209, 214, 219, 221, 229, 230, 232, 239—247, 252—256, 261, 265, 267, 274, 277, 278, 284, 286, 288, 289, 290, 291, 283), Ioan St. Alexandru (1250, 251, 252, 255, 256, 257, 261, 263, 265, 269, 271, 274, 275, 276, 277, 278, 284, 287, 289, 290, 292, 293), *Torjescu Florin* (1119, 123, 124, 126, 143, 149, 152, 157, 165, 166, 167, 169, 170, 171, 175, 176, 178, 179, 180, 181, 183, 185, 186, 188, 189, 190, 193, 194, 195, 196, 197, 199, 201, 203, 204, 207, 208, 209, 211, 212, P), Panăitescu Th. (1084, 93, 96, 97, 98, 149, 152, 159, 165, 167, 175, 183, 185), *Silion Dinu* (1249, 250, 251, 252, 255, 256, 257, 261, 262, 263, 265, 269, 271, 273-278, 281, 282, 284, 286, 287, 289, 290, 291, 292, 293, P), Vasilescu Minea (1098, 118, 124, 126, 127, 143, 152, 163, 165, 169, 175, 179, 183, 185, 201, 208); *anul III petrol.* Vlăsceanu Dumitru (1084, 102, 105, 106, 107, E: 369, 370, 374, 381, 382).

PREDEAL. — *Absolvenţi*: *Alexa I. Ioan* (1164, 167, 168, 169, 170, 173, 174, 179, 180, 184, 186, 188, 189, 203, 204, 207, 208, 212, 214, 217, 218, 219, 221, 238, 230, 231, 232, 237, 241, 248, 249, 250, 251, 252, 254, 255, 256, 261, 267, 268, 269, 273), Budin I, C. (1165, 167, 169, 171, 173, 175, 180, 183, 186, 188, 189, 190, 191, 207, 208, 209, 239, 241, 245), *Epuraş Mircea* (1164-175, 179, 180, 183-186, 188-190, 195, 201, 203, 208, 209, 211, 212, 214, 217,

218, 219, 221, 224, 228, 239, 240, 241, 242, 243, 245-259, 252, 255, 256, 261, E: 418, 422, 426, 427, 428, 429, 431, 433, 435, 441, 442, 446), *Pupăzan Nicolae* (1164, 167, 168, 169, 77, 178, 180, 188, 212, 222, 226, 227, 228, 237, 248—252, 254, 255, 256, 260, 261, 267, 268, 269, 273, 274, 275, 278), *Uță Marin* (1175, 177, 195, 196, 201, 202, 204, 205, 207, 208, 209, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 221, 226, 227, 228, 229, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P), Alexandru G. (1084, 87, 88, 93, 98, 118, 121, 126, 148, 152, 154, E: 389, 404).

PUCIOASA (Ploești). — Clasa VIII-a. Bucur D. Gheorghe (1222, 248, 252, 254, 273, 274, 284, 286, 288, 289, 290, 291, 293, E: 471, 473, 474, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 487, 488, 490, 491, 496, 497, 499).

REȘITA. Clasa IX-a. Weiss Adolf (1214, 222, 241, 242, 243, 245, E: 457, 458, 459, 460, 461, 463, 464, 465, 467, 469, 470), Absolvent. *Popescu Al. Dan* (1155, 161, 164, 193, 197, 214, 216, 218, 220, 221, 222, 224, 227, 229, 233, 234, 236, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 249, 250, 251, 254, 255, 256, 261, 262, 263, 265, 266, 267, 270, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 281, 284, 288, 289, 290, 291, 293, P, N).

ROMAN. Clasa IX-a. Stoica C.Constantin (1068, 78, 109, E: 395, 410, 411, 412, 418, 441, 447), *Absolvenți*: Calianu Nicolae (1194, 199, 202, 203, 205, 212, 214, 223, 233, 241, 242, 243, 246, 252, 261, 274, 284, 286, 288, E: 411, 412, 415, 416, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 454, 455, 457, 458, 459, 460, 462, 463, 464, 465, 466, 470, 471, 474, 480), *Cojocaru Vasile* (1140, 150, 152, 157, 171, 175, 183, 185, 190, 222, 228, 229, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 255, 256, 261, E: 443, 444, 457, 458, 460, 470, 471, 475, 477, 478, 497, 499), Mihăilă M.Jeronim (1180, 202, 212, 216, 219, 234, 248, 252, 253, 254, 255, 256, 261, 269, P, Canalele de pe planeta Marte).

SATU MARE. Clasa VIII-a. Luca G.Nicolae (1241, 245, E: 402, 414, 418, 447, 452, 457, 459, 470); clasa IX-a. Sălăgean Octavian (1243, 246, E: 448, 449, 451, 460, 465, 469, 480, 499).

SIBIU. *Școala medie tehnică de măsurători terestre*, anul II. Bîrsan Ion (E: 401, 407, 411, 412, 415, 418, 457, 458, 459, 460), anul III. Samoilă Mircea (1143, 159, 165, 174, 179, 183, 185, 189, 202, 203, 204, 230, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, P); anul IV. Chitu N.Virgiliu (1152, 154, 157, 165, 179, 183, 203, 240, 245, E: 415, 418, 447, 452, 470); clasa IX-a. liceu. Constantinescu Teodor (1152, 165, 243, 246, E: 406, 442, 443, 457, 458, 462, 463, 465, 470, 471), Schlessinger Toma (1165, 173, 183, 239, 240, 242, 243, 244, 245, 246).

SLANIC (Ploești). Clasa VIII-a. Ionescu Ioan (1231, 252, E: 447, 452, 461, 462, 463, 465, 469, 479, 505, 518, 519).

SLATINA. Clasa IX-a. Constantinescu Teodor (E: 380, 387, 402, 404, 411, 412, 415, 418, 447, 452); clasa X-a. Jaica Florea (1243, 245, 242, E: 415, 447, 448, 449, 451, 465, P), *Popescu G.Sergiu* (1143, 162, 163, 169, 171, 177, 199, 204, 207, 209, 218, 223, 228, 232, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 268, 269, P).

SFT. GHEORGHE. Clasa X-a. Zakarias Ștefan (1149, 152, 159, 161, 165, 167, 179, 181, 183, 185, 186, 195, E: 402, 411, 413, 416, 417, P).

SUCEAVA.- Clasa IX-a. Rotaru M.Constantin (1181, 188, 209, 221, 227, 246, 250, 251, 252, 255, 261, 263, E: 458, 471, 475, 476, 477, 479, P).

TÎRGOVIȘTE. Clasa V-a. Moșu M. Andrei (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 342, 433); clasa VI-a. Velicescu Mircea (1252, 253, 310, E: 471, 474, 479, 490, 493, 497, 499); clasa IX-a. *Brebente P.Corneliu* (1042, 89, 113, 115, 125, 127, 128, 130, 140, 142, 143, 148, 149, 152, 154, 159, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 169, 173, 179, 181, 183, 185, 186, 199), Martin Radu (1065, 68, 69, 76, 79, 84, 88, 107, 152, 165, 191), Stănciulescu Mihai (1252, 254, 273, 316, 317, 318, E: 316, 317, 318, 319, 461, 467, 469, 475, 479, 481, 482, 484, 486, 487, 488, 499, 505, 519, 520, 521); clasa X-a. Brebu I.Gheorghe (1216, 217, 219, 277, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 26, 247), Nica G. Ion (1216, 224, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247,

252, 255, 276, 303, 306), Popa Lucian (1078, 79, 80, 81, 84, 87, 88, 106, 117, 126, 137, 139, 149, 152, 162); Absolvenţi: Ionescu I.Ion (1161, 169, 193, 194, 199, 201, 202, 203, 204, 205, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 216, 217, 219, 224, 228, 231, 232, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 263, 265, 267, 272, P), Oprea Aurelian (1149, 175, 177, 195, 201, 202, 204, 207, 209, 211, 214, 219, 221, 229, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 243, 246, 247, P), Stănescu M. Gheorghe (1148, 149, 165, 216, 239, 240, 243, 245, 246, 247), Tache C. Ştefan (1062, 65, 66, 68, 70, 143, 148, 149, 152, 159, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 247, 246, E: 356, 358, 361, 362, 403, 404, 405, 462, 463); *Uzinele S.R.U.P.*, Tigănilă Visarion (1029, 30, 42, 48, 138, 170, 175, 202, E: 422, 423, 447, 448, 449).

TÎRGU JIU. — Clasa V-a. Velicescu Mircea (E: 379, 384, 394, 408, 416, 454, 455, 457, 458, 459, 460); clasa VIII-a. Amzulescu C. Liana (1273, 274, 302, E: 482, 483, 490, 499, 505, 511, 513).

TÎRGU OCNA. — Butucelea Alexandru (1088, 98, 127, 128, 129, 177, 207, E: 452, 454, 460).

TÎRGU MUREŞ. — Clasa V-a. Pop Augustin (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 447); clasa VIII-a. Hegedus Atila (1081, 98, 128, 140, 157, 179, 204, 211, 221, 222, 230, 239, 241, 242, 243, 245, 246, 252, 254, E: 369, 372, 373, 376, 378, 380, 384, 378, 389, 394, 396, 400, 403, 406, 414, 416, 417, 420, 424, 445, 447, 452, 457, 458, 460, 463, 465, 466, 470, 471, 475, 476, P), Petrő Istvan (E: 411, 412, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 435, 441, 440, 443); *Absolvenţi*: *Matei Nicolae* (1118, 130, 139, 140, 142, 143, 148, 149, 151, 152, 154, 155, 161, 162, 164, 165, 166, 167, 169, 170, 171, 172, 174, 175, 178, 184, 185,79, 181, 183, 1 186, 188, 190, 191, 193, 195, 201, 202, 203, 204, 207, 217, 218, 220, 221, 224, 227., 239, 240, 241 242, 243, 244, 245, 246, 247), *Wesezelly Tiberiu* (1214, 215, 216, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 228, 229, 230, 233, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 263, 265, 266, 267, 268, P).

TECUCI. — Clasa X-a. Sandu Stancu (1194, 230, 239, 240, 242, 243, 245, 246, 247, 261, E: 415, 422, 423, 448, 451, 457, 459, 460, 462, 463, 465, 469, 471, 473, 475, 476, 478, 479); *Absolvenţi*: *Corban Adrian* (1165, 167, 169, 171, 174, 175, 183, 185, 209, 217, 218, 219, 220, 231, 232, 240, 242, 245, 246, 247, 252, 261, 275, 276, 277, 284, 310, 315, 316, 317, 318, 319, P), Ivan N. Corneliu (1194, 245, 247, E: 447, 451, 452, 454, 459, 460, 466, 471, 479, 480, Lupaşcu Aurel (1121, 126, 194, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247, 255, 261, E: 466, 471, 479, 480).

TIMIŞOARA. — Clasa VIII-a. Mihăilescu N. Constantin (E: 413, 414, 416, 417, 452, 464, 465, 470, 473, 475); clasa IX-a. Arsenovici Tiberiu (1166, 167, 183, 200, 219, 274, E: 413, 414, 416, 420, 422, 423, 447, 448, 450, 451, 452, 454, 455, 456, 457, 459, 475, 479, 481, 482); clasa X-a. Braşovan Ion (1149, 202, 212, 214, 221, 231, 232, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, E: 450). *Şcoala medie tehnică financiară*, anul II. Popa Laurenţiu (1219, 221, 222, 224, 225, 243, 245, 247, E: 459, 465, 469, 470, 476, 477, 479). *Şcoala de energie electrică*, anul IV. Ganea M. Virgil (1191, 194, 208, 218, 250, 255, 259, 261, 264, 269, 276, 277, 278, 282, 315, 316, 317, 318, 319). *Şcoala de construcţii civile şi industriale*, anul II. Frederich Richard (1218, 221, 239, 240, 241, 242, 243, 245, 246, 247). *Şcoala pedagogică*, anul IV. Mettler Martin (1149, 152, 167, 169, 183, 191, 214, 219, 236, 239, 240, 243, 245, 246, 252, 273, 274, 277, 284, E: 405, 409, 411, 412, 416, 422, 423, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 439, 442, 443, 444, 447, 448, 451, 452, 454, 455, 465, 469, 470, 471, 473, 474, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 490, 492, 493, 495, 499).

TURNU SEVERIN. — Clasa V-a. Surdulescu Barbu (E: 457, 458, 459, 460, 479, 481, 482, 486, 487, 488).

TURNU MĂGURELE. — Clasa IX-a. Baltacliu Gică (1252, 266, E: 354, 358, 397, 454, 471, 472, 475, 479, 480).

VASLUI. — Clasa VIII-a. Lupu V. Dumitru (1194, 220, E: 447, 458, 449, 455, 458, 459, 460, 462, 463, 466, 470); clasa IX-a. Stănescu Viorel (1149, 154, 159, 163, E: 396, 400, 402, 403, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413); absolvent *Blosan E. Hölte* (1216, 217, 218, 219, 232, 242, 245, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 261, E: 401—405, 407, 409—412, 414, 415, 417—433, 437—441, 443—448).

ZALĂU. — *Absolvent.* Hodiş Gheorghe (1195, 203, 207, 221, 239, 247, 249, 250, 252, 254, 256, 273, 274, 276, 278, 286, 288, 289, 292, 293, P).

ZIMNICEA. — *Şcoala elementară Petroşani*, clasa V-a. Bătineţu M. Iulia (E: 418, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 457, 460, 475, 479, 481, 482).

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu toate calculele necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie; iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică, iar pe adresă menționați: *Redacției G.M.F. seria B.*

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele patru numere apărute.

— *Soluțiile ce se vor anunța* la rubrica rezolvitorilor în tot cursul anului 1954, se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1954.

— *După apariția numărului 11* al G.M.F. seria B, corespondenții evidențiați în cursul anului 1954 sînt rugați să-și întocmească cîte o fișă cuprinzînd numele, adresa lor actuală și tabelul cu toate problemele ce au rezolvat, *așezate în ordinea lor numerică și* care au fost anunțate la rubrica rezolvitorilor în numerele 1—11, apoi să o trimită redacției în plicul cu alte probleme rezolvate, în vederea *clasificării și premierii pe anul 1954.*

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme propuse, mai există publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *In redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clar, cu linii pline și punctate. De multe ori, aceste reguli îndeplinite conduc la soluția problemei. Adesea dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *Corespondentul nostru* care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate, a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă scoasă dintr-o observare făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele și în fine, cei mai avansați pot să ne trimită și cîte un articol cu o chestiune generală sau cu o apropiere originală între chestiuni cunoscute. Aceste note sau articole este bine să fie refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise pentru a evita ca în expunerea făcută să fie scrise vorbe fără rost, iar ideile trebuie să deștepte interes pentru cititor.

— *Ordinea și îngrijirea* în prezentarea unei idei pot fi îndeplinite dacă harnicul nostru corespondent a făcut mai multe rezolvări, dacă a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile și articolele publicate și dacă a studiat îndeajuns chestiunea de care se ocupă.

— *Tovarășii colaboratori* elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra activității cercurilor de matematică sau de fizică la care iau parte și asupra modului de desfășurare a « Olimpiadei matematice », pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceea reclamațiile sau comenzile de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu tirajul sau întîrzierea revistei se pot face Oficiului poștal local sau Centrului de difuzare a presei din București, str. Constantin Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

— *Fiecare cititor* al G.M.F. seria B mai este rugat a face cunoscută revista și altora și a ne trimite propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)

A APĂRUT

8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,70)

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ SERIA B PE ANUL 1954

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII.

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 10 (12 numere)

C. 1108. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1426
d

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Országos Műszaki Könyvtár

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul V — noiembrie 1954

11

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul V, Nr. 11 — noiembrie 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Dimitrie Pompeiu de Prof. Univ. N. Teodorescu*	409
2.	*Despre analiza luminiscentă de Acad. Eugen Bădărău*	412
3.	*Despre vectori (urmare) de Conf. Univ. N. Mihăilă*	419
4.	*Raportul anarmonic de Marius Iosifescu*	428
5.	*Construcţii de aparate cu mijloace proprii de Prof. Univ. T. Laszlo*	436
6.	*Chestiuni de examen (1408—1416)*	438
7.	*Probleme rezolvate (1159, 1166, 1175, 1177, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188)*	440
8.	*Probleme propuse (1417—1440)*	446
9.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E: 563—E: 575)*	450
10.	*Olimpiada de matematică şi fizică 1954—1955*	452
11.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	456

ANUL V — 11 — NOIEMBRIE 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Spiru Haret, 12 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi de fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

Országos Műszaki Könyvtár NAGYKŐRÖS

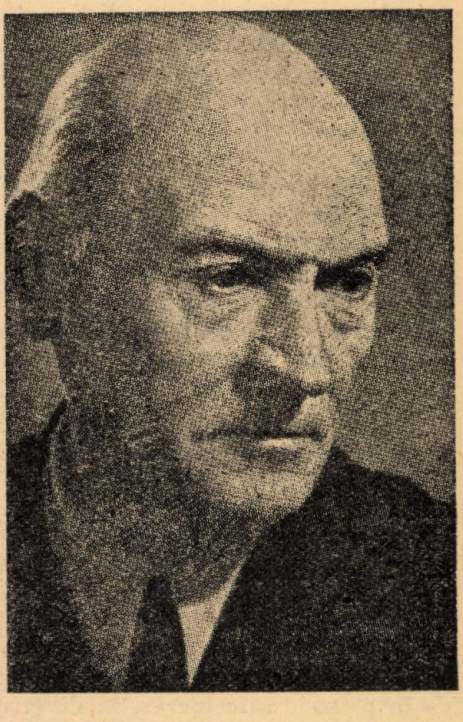
GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL V * Nr. 11 Noiembrie 1954

FIGURI DE MARI MATEMATICIENI ROMÎNI

DIMITRIE POMPEIU

Prof. Univ. N. TEODORESCU, Laureat al Premiului de Stat

CERCETAREA matetematică nu are în ţara noastră o tradiţie atît de veche ca în alte ţări. De-abia spre sfîrşitul secolului trecut au început să apară lucrări originale de matematici cu *Bacaloglu*, *David Emanuel* şi *Spiru Haret*, care şi-au făcut studiile superioare de doctorat, în Franţa, lucrînd alături de matematicieni străini şi publicînd primele rezultate romîneşti în revistele internaţionale de matematici.



În preajma anului 1900 însă, o puternică mişcare matematică a început să se formeze. Tineri cercetători romîni pornesc în străinătate unde trec teze de doctorat şi îşi înscriu numele printre matematicienii de seamă ai epocii. Astfel, în 1899, *G. Ţiţeica*, în 1900, prof. *A. Davidoglu*, la Paris, în 1906 *acad. A. Myller* şi *prof. Vera Myller-Lebedev* la Göttingen, *acad. S. Sanielevici* la Paris, iar în 1908 *acad. C. Popovici* şi *Traian Lalescu* de asemenea la Paris îşi încep activitatea ştiinţifică prin tezele lor de doctorat precedate şi urmate de alte lucrări care ulterior au fost citate şi utilizate de alţi matematicieni romîni şi străini.

Din această pleiadă de oameni de ştiinţă care au pus bazele şcoalei matematice romîneşti şi au dezvoltat-o puternic în epoca cea mai grea a începuturilor sale, face parte cu cinste şi *acad. Dimitrie Pompeiu*, stins din viaţă la 8 octombrie 1954.

Numele său era de zeci de ani cunoscut, respectat şi cinstit de ştiinţa universală, iar opera sa a rodit de nenumărate ori deschizînd noi drumuri de cercetare în variate domenii ale matematicii.

Născut la 22 septembrie 1873 în comuna Broscăuți, jud. Dorohoi, D. Pompeiu a urmat gimnaziul la Dorohoi, apoi școala normală de institutori din București, consacrîndu-se la început, carierii didactice în învățămîntul elementar, deoarece nu avea mijloacele necesare de a face studii superioare. A și funcționat cîtva vreme ca institutor la Ploești pînă cînd a obținut un concediu plătit și un sprijin material modest, cu ajutorul căruia a plecat la Paris în 1898, însuflețit de chemarea spre cercetarea matematică.

Acolo, căsătorit și cu copii, a terminat studiile secundare luîndu-și bacalaureatul și înscriindu-se apoi, la universitate unde a obținut diploma de licență care-i deschidea în sfîrșit, calea spre studiile superioare.

Luptînd din greu cu lipsuri materiale a trecut în 1905 o teză de doctorat la Paris, asupra singularităților funcțiilor analitice, ca elev al lui Poincaré. Lucrarea sa constituie o analiză profundă a proprietăților fundamentale ale funcțiilor de o variabilă complexă, analitice, o lucrare de maestru care dovedește pînă în cele mai mici detalii o putere de pătrundere neobișnuită chiar la un cercetător format. Între altele, el dă o nouă demonstrație a uneia din cele două teoreme fundamentale ale teoriei funcțiilor olomorfe, teoremei lui Morera, reciproca teoremei lui Cauchy. Scoțînd în evidență ceea ce este caracteristic în înțelesul larg al acestei teoreme, raționamentul său este aplicabil și în alte cazuri mai generale și care la prima vedere, nu au legătură cu teorema lui Morera, privind soluțiile unor sisteme de ecuații cu derivate parțiale cu mai multe variabile și funcții necunoscute.

Dar rezultatul cel mai de seamă este cel privitor la singularitățile funcțiilor analitice. Spre deosebire de convingerea unanimă a marilor matematicieni din acea vreme, el arată că dacă mulțimea punctelor singulare ale unei funcții analitice este destul de generală, funcția este continuă și în aceste puncte în loc de a fi discontinuă cum se și afirmase în același an într-o teză de doctorat trecută tot la Paris.

Rezultatul său surprinzător nu a fost primit cu entuziasmul sau măcar cu surprinderea meritată. El a rămas mulți ani acoperit de neîncredere, afirmîndu-se că exemplul său nu este decît o funcție identic nulă. A trebuit ca marele matematician francez *Denjoy* să-l reia atrăgînd atenția asupra importanței lui și asupra perfectei sale corectitudini pentru a-l impune lumii științifice. De atunci însă, el este clasic și se găsește citat și folosit în numeroase lucrări și tratate. În particular, matematicieni de seamă sovietici ca Uryson, Golubev și Fedorov, precum și școala poloneză au fructificat această descoperire de o valoare excepțională a lui D. Pompeiu.

Reîntors în țară, este pe rînd conferențiar de analiză și profesor de mecanică la Universitatea din Iași, apoi, din 1912, profesor de mecanică la Universitatea din București pînă în 1930 cînd prin pensionarea lui D. Emanuel trece la catedra de Teoria funcțiilor și la catedra de Geometrie analitică de la școala Politehnică din București unde funcționează pînă în 1940 cînd este pensionat.

Între timp, el desfășoară o activitate științifică de o calitate excepțională, îndreptîndu-și curiozitatea și acea forță de pătrundere pe care le afirmase de la primele sale lucrări în diverse domenii ale matematicii. Ceea ce este caracteristic pentru opera acestui mare gînditor este faptul că ea aduce o lumină surprinzătoare în diverse colțuri rămase în umbră. Uneori, D. Pompeiu nu face decît să atragă atenția asupra unei proprietăți simple pe care nimeni nu o observase și ca prin minune, apar cercetători dornici să adîncească această observație dînd la iveală noi rezultate. Alteori, el desco-

peră o noțiune nouă, cum a fost cea de distanță între două mulțimi. Această noțiune intră în circulație mai curînd sau mai tîrziu, și cu vremea se dovedește a fi esențială.

Spiritul său creator și original și-a lăsat pecetea specifică încă pe teza sa de doctorat care cuprinde, ca un preambul — program, caracterele esențiale ale creației sale (În 1912 el publică o notă scurtă prin care introduce noțiunea de derivată areolară, atrăgînd atenția că pe lîngă clasa de funcții complexe analitice, singurele considerate de toți matematicienii din lume mai poate fi studiată și alta mult mai cuprinzătoare. Funcțiile olomorfe au derivata areolară nulă și sînt față de funcțiile cu derivată areolară nenulă, cum sînt constantele față de funcțiile derivabile. Descoperirea sa a fost adîncită și dezvoltată mult mai tîrziu, fiind reluată de școala romînească prin prof. M. Nicolescu, prof. G. Călugăreanu, acad. Grigore Moisil și în special, prof. N. Teodorescu; ulterior, mulți matematiceni străini au extins cercetările lui D. Pompeiu, ale lui N. Teodorescu și Grigore Moisil. Printre aceștia se enumără în primul rînd, matematicieni de seamă sovietici, ca Fedorov, Vecua și Bițadze.

Înfluența exercitată de acest mare deschizător de drumuri asupra tinerilor matematicieni romîni a fost covîrșitoare. Mai mult decît oricare altul dintre maeștrii noștri el a atras în jurul său pe cei dornici să cerceteze, încurajîndu-i și susținîndu-i prin căldura simțirii sale.

Seminarul său a reunit între 1925 și 1940 majoritatea tinerilor matematicieni din București.

De asemenea, el a pus bazele școalei matematice din Cluj, pe care a condus-o pînă la începerea războiului din 1940.

În acest seminar, el punea probleme în timpul conversațiilor în care își dezvăluia preocupările din acel moment. Multe din observațiile sale au prilejuit dezvoltări teoretice date de ascultătorii săi care se pasionau de chestiunile ridicate de maestrul Pompeiu.

Continua iscodire a problemelor structurale din domeniile ce-i trezeau curiozitatea l-a împins adesea și spre cercetări de matematici elementare. Astfel, el a pus problema de a arăta că segmentele ce unesc un punct din spațiu cu vîrfurile unui triunghi echilateral pot forma laturile unui triunghi, precum și numeroase alte probleme de geometrie și aritmetică publicate în revistele de matematici elementare din țară.

Multe din aceste probleme au fost reluate și extinse sub diverse forme de tineretul matematic și chiar de matematiceni formați, atrași de originalitatea, de eleganța și de profunzimea lor.

Faima sa de mare matematician i-a adus o serie de distincții, fiind invitat să țină prelegeri la universități străine, să prezideze un juriu de teze de doctorat la Sorbona, să fie ales membru al multor societăți științifice. Este de observat însă, că în vechea Academie Romînească, D. Pompeiu n-a putut ajunge decît membru corespondent pînă la vîrsta de 61 ani cînd a fost în sfîrșit, ales membru titular.

La înființarea Academiei R.P.R. în 1948, el a fost numit membru titular activ, subliniindu-se prin aceasta recunoașterea sa ca respectat conducător al școalei matematice romînești. De asemenea, el a fost numit director al Institutului matematic al Academiei R.P.R. Pentru marile sale merite științifice și pentru deosebitele servicii aduse științei, a fost decorat cu „Steaua Republicii" și cu „Ordinul Muncii".

În amintirea celor care l-au cunoscut ca învăţat, ca profesor şi ca om, figura lui D. Pompeiu rămîne sigur neştearsă, deoarece impresia pe care o lăsa asupra celor ce-l apropiau era covîrşitoare. Forţă de pătrundere, abilitate, inspiraţie, orginalitate de concepţie şi prezentare se îmbinau cu o caldă dragoste pentru toţi cei ce veneau spre el să înveţe, să-i ceară un sfat.

Opera sa trebuie pusă în valoare, discutată în lumina rezultatelor actuale şi fructificată mai mult de tineretul cercetător din ţara noastră, care, ca şi generaţia actuală de matematicieni formaţi, îşi poate căuta izvoarele de inspiraţie în lucrările sale, în care se ascund şi alte rezultate deschizătoare de drumuri decît cele descoperite pînă în prezent.

DESPRE ANALIZA LUMINISCENTĂ

Acad. EUGEN BĂDĂRĂU

ESTE îndeobşte cunoscut, cît de repede se bronzează pielea în timpul excursiilor pe munţi. Cauza acestui fenomen se datoreşte faptului că la înălţimi mari, unde atmosfera este mai rarefiată, absorbţia razelor solare este redusă, şi în consecinţă, lumina solară este foarte bogată în raze ultraviolete.

Ce sînt aceste raze? De aproape un secol şi jumătate s-a stabilit că lumina solară poate fi descompusă cu ajutorul unei prisme de sticlă; spectrul rezultat este alcătuit din diferite culori începînd cu violetul într-o parte şi terminînd cu roşu în partea opusă. Deoparte, şi de alta a spectrului, s-a constatat că mai există şi alte radiaţii care nu sînt vizibile. Radiaţiile de dincolo de roşu se numesc *infraroşii* şi sînt în primul rînd, de natură termică; iar cele de dincolo de violet se numesc *ultraviolete*; de acestea din urmă ne vom ocupa mai depatre ceva mai detaliat.

Razele ultraviolete au multe proprietăţi caracteristice. Bunăoară, cum am văzut mai sus provoacă bronzarea pielii (un efect biologic), apoi ele impresionează puternic o placă fotografică, în anumite condiţii zmulg electroni din atomii unui gaz şi astfel atomii sînt desfăcuţi în părţi electrizate cu electricitate de sens opus (ionizarea gazului), şi de asemenea, produc şi multe alte efecte interesante şi importante.

Ne vom ocupa în mod special de o foarte interesantă proprietate a razelor ultraviolete şi anume, aceea de a produce *luminiscenţă.*

Trebuie să ştim că fiecare radiaţie, fie vizibilă, fie invizibilă, se caracterizează prin aşa numita *lungime de undă*; ne putem imagina lumina ca pe un fenomen ondulatoriu, cum ar fi de exemplu fenomenul care se produce la suprafaţa unei ape liniştite atunci cînd într-un punct al acestei suprafeţe se produce o perturbare, prin căderea unei pietre. Undele circulare, care se propagă în acest caz, din punctul de perturbare, păstrează o anumită distanţă între vîrfurile (dealurile) consecutive; această distanţă dintre două vîrfuri vecine este tocmai lungimea de undă. In cazul luminii, în loc de distanţa între două vîrfuri, avem distanţa între două maxime consecutive ale forţei electrice care se propagă sub formă de undă în spaţiu, deoarece lumina este un fenomen electromagnetic. Această distanţă între două maxime vecine reprezintă, după cum s-a arătat, lungimea de undă a radiaţiei luminoase.

Lungimile de undă pentru radiaţiile luminoase sînt extrem de mici; bunăoară, pentru lumina roşie lungimea de undă este numai de 0,8 μ (un micron (1 μ) fiind o miime dintr-un milimetru), pentru radiatia verde este cam de 0,5 μ, iar pentru cea violetă de la marginea spectrului, este numai de 0,4 μ şi devine din ce în ce mai mică cu cît pătrunde mai adînc în regiunea radiaţiilor ultraviolete.

Radiaţiile ultraviolete, invizibile, posedă o proprietate remarcabilă, şi anume aceea de a provoca emisia altor radiaţii de către multe corpuri organice şi neorganice atunci cînd pe ele cad razele ultraviolete; de regulă aceste radiaţii sînt vizibile. Acest fenomen se numeşte *fotoluminiscenţă.*

Se deosebesc două feluri de fotoluminiscenţă:

a) *fluroescenţa* care în general, durează atît timp cît durează iradierea corpului, încetînd imediat (sau după un timp mai scurt decît o miim de secundă), după încetarea cauzei care provoacă această luminiscenţă, — şi

b) *fosforescenţa,* fenomen care durează şi după încetarea iradierii corpului cîteodată timp de cîteva zile.

Fenomenul de fluorescenţă este fenomenul care stă la baza *analizei luminiscente,* care formează obiectul acestui articol.

Această analiză luminiscentă a fost dezvoltată de regretatul academician *S. I. Vavilov* şi în prezent, are o largă aplicaţie — după cum se va vedea mai jos — în multe domenii de cercetări ştiinţifice şi de economi naţională. Această metodă este aplicată cu succes în metalurgie, în industria chimică şi alimentară, în industria medicamentelor, în agricultură. Ea joacă un rol important şi în televiziune, medicină, biologie, în arta teatrală şi cinematografică, în arta militară şi arheologie, în medicina judiciară şi în multe alte domenii.

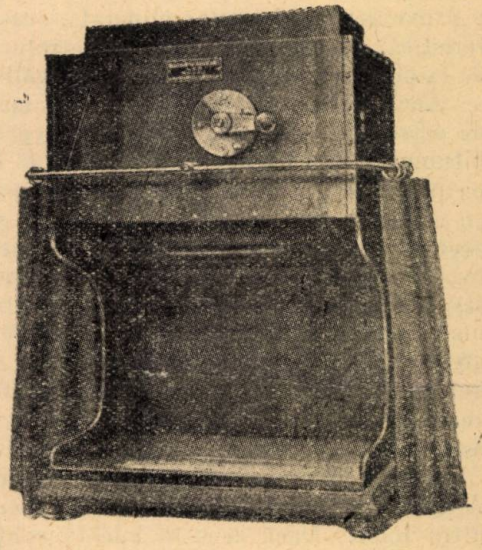


Fig. 1

Culoarea luminii fluorescente diferă în general, de la corp la corp şi reprezintă deci, o caracteristică a corpului după care acesta poate fi recunoscut.

Este clar deci, că în primul rînd, pentru a utiliza metoda de analiză lumiminiscentă este nevoie să avem un izvor puternic de radiaţii.

Un astfel de izvor se prezintă sub forma unui tub de descărcare electrică în vapori de mercur. Această descărcare este foarte bogată în radiaţii ultraviolete de mică lungime de undă (0,254 — 0,185 μ), adică radiatii destul de îndepărtate în regiunea ultravioletă; în afară de acestea mai sînt emise o serie de radiaţii cu lungimi de undă mai mari. Pentru ca aceste radiaţii să iasă din spaţiul descărcării în afară, trebuie ca tubul să fie de cuarţ, altfel radiaţiile cu lungime de undă mai scurtă (0,254—0,185 μ), vor fi absorbite de sticla tubului. Pentru a nu lăsa să iasă din aceste izvoare de raze ultraviolete şi radiaţiile vizibile, adică acele radiaţii care ar masca

lumina fluorescentă emisă de corpul ce se analizează, tubul de descărcare este de obicei acoperit cu așa numitul *filtru negru*, din sticlă specială, care are rolul de a lăsa să treacă radiațiile ultraviolete de lungime de undă de 0,66 μ și care nu lasă aproape de loc să treacă lumina vizibilă; în felul acesta, lumina de fluorescență emisă de corpul iradiat cu raze ultraviolete nu mai este acoperită de lumina vizibilă a izvorului. Figura 1 reprezintă un dispozitiv care servește acestui scop.

Cu un astfel de dispozitiv se poate face analiza luminiscentă. In acest scop se procedează astfel: se pune sub lampa izvor de raze ultraviolete corpul ce urmează să fie examinat. Dacă este cazul, corpul emite lumină de fluorescență care are o anumită nuanță de culoare

Se compară, apoi, această nuanță, cu nuanțele emise de diferite mostre din același material, dar a căror compoziție este cunoscută. Dacă se constată că nuanța corpului studiat coincide cu nuanța unei anumite mostre, corpul are aceiași compoziție ca și mostra respectivă. Această metodă care este în acest caz o metodă de sortare, se aplică cu mult succes, de exemplu la identificarea sticlei optice, care este utilizată în fabricile de aparate și instrumente optice. In loc de a se face determinări optice destul de complicate pentru a afla felul unei bucăți de sticlă optică cu compoziția necunoscută se face o simplă comparare a nuanțelor sale de fluorescență cu fluoreseența unor sticle optice de compoziții cunoscute, și avem astfel, posibilitatea să cunoaștem imediat sticla pe care o cercetăm. In același mod se determină și calitatea hîrtiei care dă o fluorescență diferită în funcție de calitatea ei Același lucru se poate spune și despre cercetarea diferitelor cauciucuri. Această metodă de sortare are un rol deosebit și în identificarea prin comparația cu mostre cunoscute a provenienței uleiurilor minerale, acestea producînd fiecare o nuanță caracteristică. De asemenea diferite petroluri produc diferite culori de fluorescență, de la culoarea albastră pînă la cea gălbuie-brună, în funcție de proveniență.

Analiza fluorescentă este de un mare folos în prospecțiuni de zăcămint de petrol și în general, de diferite bogății ale subsolului. Bunăoară, se știe că bitumurile dau fluorescență cu nuanță diferită în funcție de compoziția lor; de pildă, acelea care conțin smoală prezintă o fluorescentă galbenă, acelea cu asfalt — maron închis, bitumurile cu uleiuri — verde și albastru. Pentru aceasta se dizolvă în cloroform bitumurile scoase din rocile întîlnite în timpul forajului la diferite adîncimi; se analizează felul bitumului conținut în mostrele respective, și după anume criterii se fixează direcția după care trebuie continuat forajul. Altădată, această operație se făcea cu ajutorul analizei chimice grele și lungi, (analiza chimică poate să dureze și cîteva zile), pe cînd prin analiza luminiscentă operația se rezolvă în cîteva minute. Este evident că din acest motiv analiza luminiscentă a devenit în prezent, metoda preferată în astfel de prospecțiuni, ea fiind rapidă și foarte ieftină.

Analiza luminiscentă aduce un serviciu prețios și în prospecțiunile minerale. Aici se procedează astfel: o rocă din locul respectiv este supusă acțiunii razelor ultraviolete. Dacă această bucată conține minerale fluorescente fie chiar și în cantități extrem de mici, sub formă de încrustații, punctele acestea devin imediat vizibile datorită fluorescenței lor. In felul acesta se poate descoperi prezența wilemitului, (ortosilicat de zinc) sau a șeelitului (wolframat de calciu). Multe alte minerale, pot fi descoperite dacă roca respectivă este supusă unui foarte ușor tratament chimic, combinațiile chimice ale acestor minerale devenind fluorescente.

Urmele unor plante şi animale preistorice rămase pe roci, dar invizibile pentru ochi la lumina zilei, devin vizibile în lumina ultravioletă, deoarece aceste urme conţin materii (de exemplu, uleiuri), care au ramas infiltrate în roca respectîvă, ele fiind fluorescente.

Unele manuscrise vechi, şterse în decursul vremii, pot fi bine citite în lumina ultravioletă, din aceleaşi motive. Analiza, luminiscentă aduce deci, servicii de nepreţuit arheologiei, ştiinţă care se ocupă cu preistoria, precum şi cercetărilor istorice. Figura 2, arată fotografia: a) urmele fosilei unui rac în lumina obişnuită şi b) formele fosilei în lumina ultravioletă.

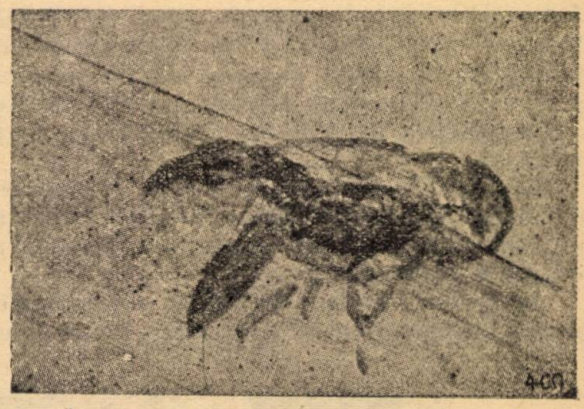


Fig. 2 a

De asemenea, cu ajutorul analizei luminiscente se poate constata foarte uşor falşurile în acte, produse prin ştersături care devin vizibile în lumina ultravioletă. Se poate chiar citi în această lumină, textele mînjite cu aceiaşi cerneală cu care au fost scrise. De asemenea, se pot descoperi petele de sînge de pe o ţesătură chiar dacă acestea au fost bine spălate. De aici, se vede cît de mare este aportul analizei luminiscente în practica judiciară.

Metoda luminiscentă aduce servicii de mare preţ şi în agricultură. In lumina ultravioletă se pot deosebi imediat, după culoarea fluorescenţei, fructele şi legumele proaspete şi de bună calitate de acelea care sînt atinse de vreo boală; se poate uşor constata începutul putrezirii, ceea ce nu poate fi în nici un fel constatat prin controlul vizual obişnuit. Acest fapt permite selecţionarea produselor agricole înainte de a le introduce în frigidere salvînd, în felul acesta legumele sănătoase de contaminare. De exemplu, lămîile de bună calitate fără defecte, prezintă o fluorescenţă de culoare albăstruie-galbenă, pe cînd acela cu un început de putrefacţie, de culoare albastră.

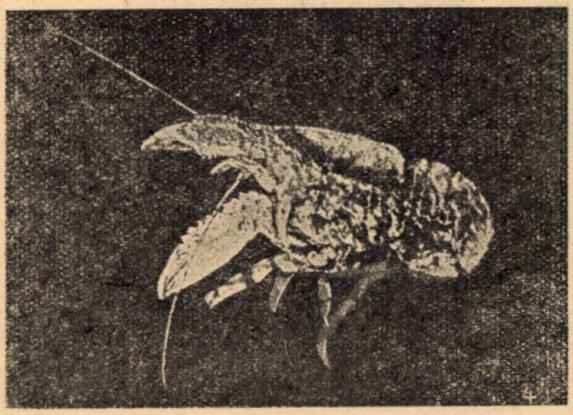


Fig. 2 b

Un deosebit ajutor îl dă analiza luminiscentă în recunoaşterea calităţii şi a diferitelor soiuri de grîu. De exemplu, grîul de anul trecut arată o fluorescenţă de culoarea albastră, grîul din recolta anului în curs, dă o fluorescenţă verde,

iar grîul care a început să se strice din cauza umezelii dă o fluorescenţă galbenă ; în orice caz, se poate uşor constata începutul îmbolnăvirii boabelor de grîu.

Metoda luminiscentă permite să se constate în cîteva secunde, după culoarea fluorescenţei, dacă făina este curată sau este amestecată cu tărîţe. La fel, se poate uşor determina dacă diversele produse agricole, cum sînt de exemplu ceapa, usutroiul, morcovul, varza, mazărea, fasolea, etc. sînt sănătoase sau nu.

Am văzut mai sus, că prezenţa multor substanţe, chiar în cantităţi foarte mici, în diferite corpuri, pot fi detectate datorită fluorescenţei acestor substanţe. Aşa se determină de exemplu, cantitatea vitaminelor în diferite produse şi ţesuturi. Introducînd de pildă, unele substanţe medicamentoase fluorescente în organismul omului, se poate observa mişcarea şi localizarea lor în diferite părţi ale organismului, precum şi viteza de circulaţie a sîngelui, dacă se cercetează probele de sînge luate din diferite părţi ale organismului, în diferite momente.

La fel se poate urmări — prin introducerea unor substanţe — apariţia circulaţiei sîngelui între corpul unui om bolnav şi un ţesut transplantat ceea ce prezintă un deosebit interes pentru medicină în aplicarea noilor metode de vindecare a bolnavilor.

In general, analiza în lumina ultravioletă prezintă un interes deosebit pentru biologie. In acest scop, foarte multe obiecte de observat cu microscopul

Fig. 3 a

sînt iluminate cu « lumina » ultravioletă. Această metodă de observaţie microscopică, permite să se descopere unele amănunte de structură a obiectelor ce nu puteau fi observate în lumina obişnuită.

Pentru aceasta obiectele se colorează cu unii coloranţi fluorescenţi care se propagă în mod diferit în diferite ţesături şi deci, dau în lumina ultravioletă,

o imagine foarte interesantă. Figura 3 reprezintă: a) sporangii fotografiate prin microscop în lumină obişnuită şi b) în lumină ultravioletă.

Diferenţa este bătătoare la ochi.

In practica medicală, iluminarea cu raze ultraviolete ajută mult. Orice sgîrietură, arsură sau bătătură pe pielea omului, poate fi imediat descoperită cu metoda luminiscentă, ţesuturile noastre dînd o fluorescenţă de

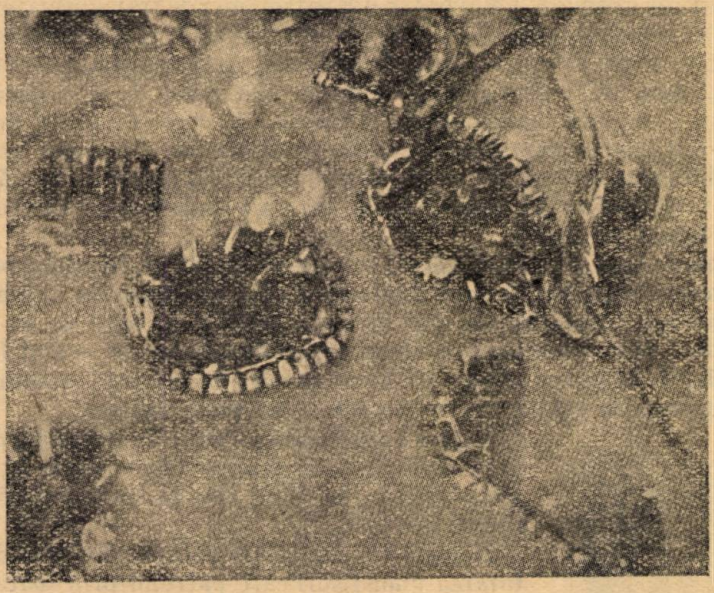


Fig. 3 b

altă culoare decît aceea a pielii sănătoase. Tot cu această metodă se poate constata începutul unei boli a părului sau a gurii. Se pare că în acest mod se poate stabili din timp în ţesuturi, prezenţa agenţilor cancerogeni, ceea ce desigur, prezintă un deosebit interes pentru profilaxia acestei teribile boli.

Analiza luminiscentă joacă un rol deosebit de mare în tehnică şi în industrie, adică, în economia naţională. In special, această metodă serveşte în defectoscopie, adică, serveşte, ca metodă pentru descoperirea unor defecte în diferite piese sau detalii ale maşinii.

Astăzi se cere de la instrumente sau maşini, o completă lipsă a defectelor interne sau externe (de exemplu, a golurilor din interiorul pieselor, sau a fisurilor) pentru a evita accidentele sau necesitatea de a opri maşina din mers pricinuindu-se dezavantaje mari economiei naţionale prin pierderea timpului, care este atît de preţios în economia planificată.

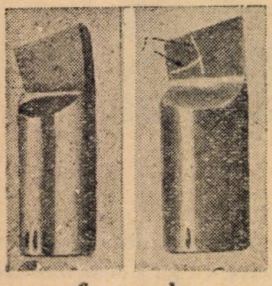
Există mai multe metode pentru descoperirea acestor defecte, de exemplu, prin ultrasunete, raze X, raze γ emise de substanţe radioactive, defectoscopie magnetică, etc. Această din urmă metodă serveşte pentru descoperirea defectelor superficiale, adică, a fisurilor superficiale şi poate fi aplicată numai la materialele magnetice: fontă, oţel. Metoda nu poate fi utilizată în cazul materialelor nemagnetice, cum sînt de exemplu, masele plastice, metalele neferoase, etc.

Metoda defectoscopiei bazată pe fluorescenţă, elaborată în ultimii ani în U.R.S.S. poate fi aplicată la descopeirea defectelor superficiale ale pieselor din orice material, fiind deci, o metodă universală.

Reţeta este următoarea: piesa de studiat este mai întîi bine spălată cu benzină pentru a scoate urmele de ulei sau grăsime de pe suprafaţa ei, şi apoi, se usucă.

După aceea, pe suprafaţa piesei se întinde un strat al unei soluţii speciale fluorescente, de exemplu, un amestec din petrol, ulei de transformator, benzină, conţinînd un colorant special. In cîteva minute această soluţie pătrunde în toate fisurile superficiale ale piesei ce se cercetează. Apoi, soluţia este îndepărtată cu ajutorul unui jet de aer comprimat sau de apă. Apoi, după ce piesa se usucă din nou este presărată cu nisip de cuarţ foarte fin, care este foarte poros. Acest praf suge din fisurile superficiale soluţia fluorescentă din locul respectiv şi apoi este îndepărtat uşor de pe suprafaţa cercetată, printr-o uşoară scuturare a piesei, rămînînd astfel numai acela care s-a îmbibat cu soluţia, şi care deci este situat în fisuri.

Iluminînd acum o astfel de piesă, cu raze ultraviolete, fisurile devin vizibile prin fluorescenta firelor de praf fluorescent care au rămas pe suprafaţă. Prin această metodă toate fisurile mici şi mari, precum şi porii de pe suprafaţa piesei — dacă adîncimea lor este chiar numai de un micron — sînt foarte bine observabile. Tehnica sovietică a elaborat în această privinţă metode de observaţie foarte uşor de realizat care dau cele mai bune rezultate.



a b

Fig. 4

Figura 4 reprezintă un cuţit de strung făcut dintr-un aliaj special: a) în lumina obişnuită şi b) în lumină ultravioletă. Se vede clar în acest din urmă caz, o fisură în cuţit.

Metoda luminiscentă permite de asemenea constatarea unor fisuri care pătrund prin toată grosimea pieselor, bunăoară, în ţevi. In acest caz se unge cu soluţie fluorescentă peretele interior al ţevii; observînd în lumină ultravioletă suprafaţa exterioară, se poate imediat constata prezenţa fisurilor care traversează peretele tubului, soluţia fluorescentă ajungînd din interior pînă la exterior datorită efectului de capilaritate.

Metoda fluorescentă permite deci, să se reducă în mod considerabil rebutul, ridicînd în acelaşi timp calitatea produselor.

Multe, foarte multe alte aplicaţii, mai are încă analiza luminiscentă. Dar şi din cele cîteva scurte informaţii expuse în acest articol se poate vedea toată importanţa acestei noi metode de analiză, precum şi diferitele ei aplicaţii, mai ales în agricultură, industrie, etc. Toate acestea ne dovedesc că nu există ştiinţă pur teoretică, că orice descoperire ştiinţifică mai devreme sau mai tîrziu dă roade de mare importanţă pentru practică, pentru producţie, pentru viaţa de toate zilele.

La noi, aplicarea acestei metode este abia la început. Dar tocmai simplicitatea ei, necesitatea foarte redusă în ceea ce priveşte aparatura, precum şi vastul ei domeniu de aplicaţii formează premizele necesare, pentru răspîndirea pe o scară largă a analizei luminiscente, ştiinţa contribuind şi pe această cale, la îndeplinirea marilor sarcini legate de construirea socialismului în ţara noastră.

DESPRE VECTORI

(urmare)

Conf. univ. N. MIHĂILĂ

8. *Produse cu vectori.* Operaţia înmulţirii cu vectori, operaţie complexă faţă de cea asemănătoare din algebră, prezintă aspecte foarte variate în cazul mărimilor vectoriale, depinzînd de factorul cu care se înmulţeşte, care poate fi o mărime scalară sau vectorială, de modul cum se înmulţeşte şi uneori, chiar de numărul factorilor şi ordinea în care se efectuează operaţia. Evident că tot observarea fenomenelor din lumea reală a îndrumat gîndirea în definirea operaţiilor respective. Denumirea *produse cu vectori* este îndreptăţită în ordinea operaţiilor, ordine împrumutată de la matematică; dar mai este îndreptăţită şi prin aceea că valoarea absolută a fiecărui fel de produs conţine, ca un prim aspect în definire, produse de mărimi algebrice. Totuşi sînt operaţii cu totul noi care ar fi putut îndreptăţi pe fondatorii calculului cu mărimi vectoriale să le dea orice altă denumire.

9. *Produsul dintre un vector şi o mărime scalară.* Fie un vector liber $\vec{V} = \vec{OA}$ (fig. 8) şi ne propunem să cercetăm aspectul expresiei $k \cdot \vec{V}$ în care k este un număr algebric putînd fi pozitiv sau negativ.

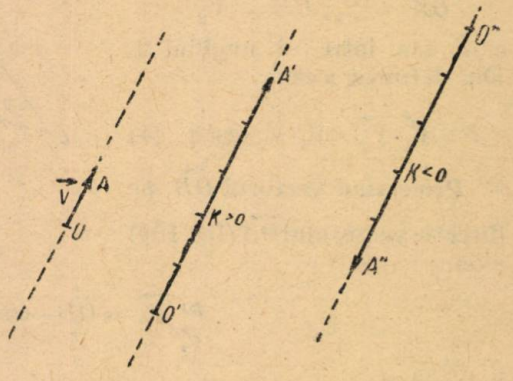


Fig. 8

Expresia $\vec{P} = k.\vec{V}$ este un vector de aceeaşi direcţie, cu acelaş sens sau sens contrar, după cum scalarul k este pozitiv sau negativ, avînd ca modul, produsul modulelor scalarului şi vectorului.

In fig. 8 avem reprezentat produsul,

$$+5\vec{V} = \vec{O'A'} \quad \text{şi} \quad -5\vec{V} = \vec{O''A''}$$

O axă, adică o dreaptă pe care se ia o origină, un sens şi o unitate se defineşte de obicei prin vectorul unitar numit şi *versorul axei* (vectorul $\vec{u}$, (fig. 9).

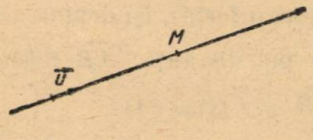


Fig. 9

Orice punct M de pe axă este definit cu ajutorul versorului astfel:

$$\vec{OM} = k \cdot \vec{u}$$

unde scalarul k poate lua toate valorile algebrice de la $-\infty$ pînă la $+\infty$. Scalarul k reprezintă *abscisa punctului M* pe axa considerată şi mai poate fi numit şi *masa* vectorului $\vec{OM}$ *).

*) Se observă că putem defini imediat *raportul a doi vectori paraleli* prin expresia $\frac{\vec{P}}{\vec{V}} = k$, unde scalarul k este pozitiv sau negativ după cum cei doi termeni sînt de acelaşi sens, sau de sens contrar.

10. *Produsul scalar a doi vectori. Se numeşte produsul scalar a doi vectori, scalarul dat de pro usul modulelor celor doi vectori şi cosinusul unghiului pe care îl formează.*

Vom nota produsul scalar a doi vectori, astfel:

$$\vec{P} = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

semnul operaţiei fiind semnul algebric al înmulţirii (punctul).

Fie doi vectori liberi $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ daţi (fig. 10 *a*).

Printr-un punct oarecare O din spaţiu ducem vectorii

$$\vec{OA} = \vec{V}_1, \vec{OB} = \vec{V}_2$$

care fac între ei unghiul θ. Din definiţie avem,

$$P = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 \cdot V_2 \cos\theta \quad (1)$$

Proiectînd vectorul $\vec{OB}$ pe direcţia vectorului $\vec{OA}$ (fig. 10*b*) avem:

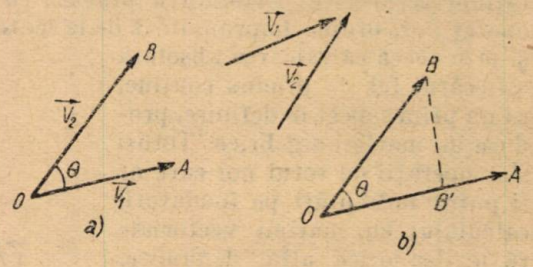


Fig. 10

$$\underset{\vec{V}_1}{pr}\ \vec{V}_2 = OB \cdot \cos\theta = V_2 \cos\theta$$

Inlocuind în expresia (1) avem:

$$P = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot \underset{\vec{V}_1}{pr}\ \vec{V}_2$$

adică, «*pro usul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unuia dintre ei şi proiecţia celuilalt pe direcţia primului.* Proprietăţile de comutativitate şi distributivitate a produsului scalar se pot arăta uşor.

Un produs scalar este nul cînd unul din cei doi factori este nul, sau cînd unghiul celor doi vectori este de 90°.

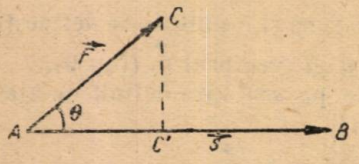


Fig. 11

11. *Aplicaţie. Lucru mecanic.* Un vector $\vec{F}$ constant (de exemplu, o forţă), îşi deplasează punctul de aplicaţie pe distanţa $\vec{AB}$ măsurată de vectorul $\vec{AB} = \vec{s}$ (fig. 11).

Lucrul mecanic efectuat este măsurat de produsul scalar al vectorului $\vec{F}$ *şi al vectorului deplasare* $\vec{s}$, adică $L = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Ţinînd seama de formele sub care se poate exprima un produs scalar rezultă următoarele:

a) $$L = F \cdot s \cdot \cos\theta$$

adică, *lucrul mecanic efectuat de un vector constant cînd deplasează rectiliniu un corp este dat de produsul dintre modulul vectorului, drumul parcurs şi cosinusul unghiului format.*

b) Lucrul mecanic este nul cînd $\theta = \frac{\pi}{2}$; este pozitiv cînd $\theta < \frac{\pi}{2}$ (lucrul mecanic motor); este negativ cînd $\theta > \frac{\pi}{2}$ (lucrul mecanic rezistent).

c) $$L = s \cdot pr_{\vec{s}} \vec{F} = F \cdot pr_{\vec{F}} \vec{s}$$

adică *lucrul mecanic este dat de produsul dintre deplasarea s şi proiecţia vectorului* $\vec{F}$ *pe deplasare, sau invers, de produsul dintre modulul vectorului* $\vec{F}$ *şi proiecţia deplasării pe vectorul* $\vec{F}$.

12. *Produsul vectorial a doi vectori. Se numeşte produsul vectorial a doi vectori, un al treilea vector perpendicular pe un plan determinat de direcţiile celor doi vectori, avînd ca mărime produsul modulelor celor doi vectori şi sinusul unghiului pe care-l formează direcţiile lor, iar ca sens e astfel orientat încît cei doi vectori daţi — într-o ordine fixată, completaţi cu vectorul căutat (produsul lor vectorial) să formeze un triedru cu orientare directă* *).

Se notează produsul vectorial a doi vectori $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$, astfel:

$$\vec{P} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2$$

semnul de operaţie fiind semnul aritmetic al înmulţirii.

Fie doi vectori liberi $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ daţi (fig. 12). Pentru a obţine vectorul $\vec{P}$ vom proceda în felul următor:

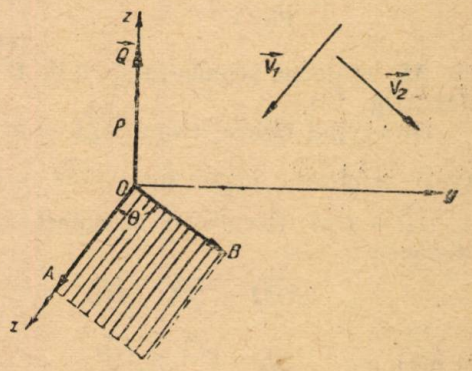


Fig. 12

Ducem printr-un punct oarecare O din spaţiu, vectorii $\vec{OA}$ şi $\vec{OB}$ echipolenţi cu $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$; apoi vectorul $\vec{OQ}$ perpendicular pe planul AOB avînd ca mărime $V_1 \cdot V_2 \cdot \sin\theta$, iar sensul astfel ales încît vectorii $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ şi $\vec{OQ}$ să aibă aceeaşi orientare între ei ca şi triedrul $Oxyz$. Un sistem direct de trei axe rectangulare care are axa Ox pe suportul vectorului $\vec{OA}$, axa Oy în planul vectorilor $\vec{OA}$ şi $\vec{OB}$, va avea axa Oz pe suportul vectorului $\vec{OQ}$.

Paralelogramul construit pe vectorii $\vec{OA}$ şi $\vec{OB}$ are ca mărime tocmai $V_1 V_2 \sin\theta$, deci, *vectorul* $\vec{P}$ *va avea ca modul aria paralelogramului construit pe cei doi vectori pe care-i înmulţim vectorial.*

*) Un tirbuşon rotindu-se de la primul spre al doilea vector, înaintează în sensul vectorului căutat.

Proprietăți. Produsul vectorial a doi vectori are ca modul expresia:

$$|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = V_1 \cdot V_2 \cdot \sin \theta$$

deci el este nul cînd unul din cei trei factori este nul și aceasta se întîmplă cînd unul din cei doi vectori este nul sau cînd cei doi vectori sînt paraleli: ($\sin 0° = 0$ și $\sin 180° = 0$).

Din definiție rezultă că dacă schimbăm ordinea celor doi vectori în efectuarea produsului, vom obține un vector de același modul, perpendicular pe același plan, dar de sens contrar, deci:

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$$

deci, într-un produs vectorial a doi vectori contează ordinea vectorilor, schimbînd ordinea se schimbă sensul, adică, *produsul vectorial este anticomutativ.*

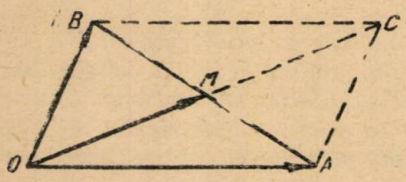


Fig. 13

Se poate arăta că produsul vectorial este distributiv față de o sumă de vectori, cu obligația de a menține ordinea factorilor.

13. *Aplicații diferite ale calculului vectorial.* 1. *Mijlocul unui segment.* Să considerăm doi vectori $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ și să determinăm vectorul $\vec{OM}$ care unește pe O cu M, mijlocul segmentului AB, O fiind un punct oarecare din spațiul dat (fig. 13).

Observînd figura, avem $\vec{AM} = \vec{MB}$ și această relație se mai poate scrie (vezi scăderea vectorilor): $\vec{OM} - \vec{OA} = \vec{OB} - \vec{OM}$. Rezolvînd în raport cu $\vec{OM}$, deducem:

$$2\,\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} \qquad (1)$$

și deci

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}.$$

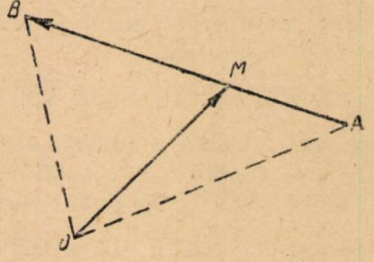


Fig. 14

Interpretarea relației (1) conduce la următoarea teoremă de geometrie elementară: *diagonalele unui paralelogram se taie în părți egale.*

Într-adevăr, membrul din stînga exprimă vectorul $\vec{OC}$ dublul lui $\vec{OM}$ care trebuie să coincidă cu diagonala $\vec{OC}$ a paralelogramului construit pe vectorii $\vec{OA}$ și $\vec{OB}$.

2. *Generalizare. Să considerăm doi vectori $\vec{OA}$ și $\vec{OB}$ (fig. 14) și să determinăm vectorul $\vec{OM}$ care unește pe O cu un punct M la segmentului AB, pe care îl împarte în raportul dat:*

$$\frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} = -k.$$

Relaţia dată se mai poate scrie: $\vec{MA} + k\vec{MB} = 0$. Dar observînd figura putem scrie $(\vec{OA} - \vec{OM}) + k(\vec{OB} - \vec{OM}) = 0$ de unde se deduce că:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1 + k}.$$

Observare. In cazul particular: $k = 1$, M este mijlocul lui AB şi formula precedentă devine:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}.$$

3. *Medianele într-un triunghi sînt drepte concurente.* Fie ABC un triunghi oarecare şi O un punct fix în planul lui (fig. 15). Dacă M este un punct al medianei AA', atunci $\vec{AM} = \lambda \vec{AA'}$, unde λ este un parametru variabil arbitrar.

Observînd figura, relaţia de mai sus devine (O fiind un punct oarecare),

$$\vec{OM} - \vec{OA} = \lambda(\vec{OA'} - \vec{OA})$$

şi ţinînd seama că A' e mijlocul lui BC, vom avea:

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda\left(\frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} - OA\right)$$

sau

$$\vec{OM} = (1 - \lambda)\vec{OA} + \frac{\lambda}{2}\vec{OB} + \frac{\lambda}{2}\vec{OC} \quad (1)$$

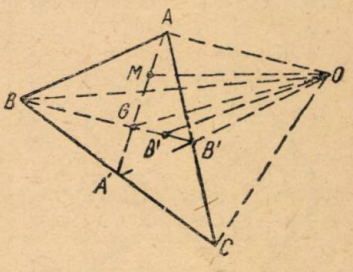


Fig. 15

Pentru un punct N al medianei BB', printr-un calcul identic avem relaţia:

$$\vec{ON} = (1 - \mu)\vec{OB} + \frac{\mu}{2}\vec{OC} + \frac{\mu}{2}\vec{OA} \quad (2)$$

unde μ e un alt parametru arbitrar.

Medianele AA', BB', se întîlnesc în punctul G. Există o valoare a lui λ pentru care M este în G şi o valoare a lui μ pentru care N este în G. Pentru aceste valori ale lui λ şi μ formulele (1) şi (2) devin identice şi prin urmare avem:

$$1 - \lambda = \frac{\mu}{2}, \quad \frac{\lambda}{2} = 1 - \mu, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2}.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii în λ şi μ, obţinem: $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$. Interpretarea acestui rezultat conduce la următoarea teoremă de geometrie elementară: *medianele într-un triunghi se întîlnesc la* $\frac{2}{3}$ *de vîrf.* Mediana CC' trebuie să întîlnească pe AA' tot la $\frac{2}{3}$ de vîrf şi deci, *medianele sînt concurente.*

Vectorul $\vec{OG}$ se află înlocuind în formula (1) parametrul λ cu $\frac{2}{3}$ şi obţinem,

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}.$$

Această formulă este valabilă şi dacă origina O nu este situată în planul triunghiului. Punînd-o alături de formula

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

o putem socoti ca o generalizare a ei. Ea răspunde la întrebarea: care este punctul G definit de formula

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

unde A, B, C sînt trei puncte date? Răspunsul este: punctul de intersecţie al medianelor triunghiului care are drept vîrfuri punctele date.

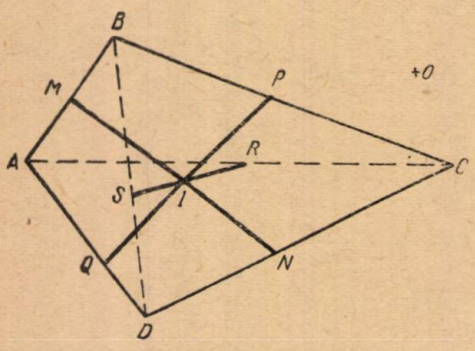


Fig. 16

4. *Dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater oarecare ABCD (fig. 16) şi cu dreapta care uneşte mijloacele diagonalelor sînt drepte concurente.*

Fie $ABCD$ un patrulater oarecare şi O un punct fix dat. Notînd cu M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor şi diagonalelor (cum arată figura) şi cu I, I', I'' respectiv, mijloacele segmentelor MN, PQ, RS, vom avea:

$$\vec{OI} = \frac{\vec{OM} + \vec{ON}}{2} = \frac{\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} + \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2}}{2} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{4}$$

$$\vec{OI'} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2} = \frac{\frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} + \frac{\vec{OA} + \vec{OD}}{2}}{2} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA} + \vec{OD}}{4}$$

$$\vec{OI''} = \frac{\vec{OR} + \vec{OS}}{2} = \frac{\frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2} + \frac{\vec{OB} + \vec{OD}}{2}}{2} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} + \vec{OD}}{4}$$

Valorile vectorilor $\vec{OI}$, $\vec{OI'}$, $\vec{OI''}$ sînt egale şi dau cele trei puncte I, I', I'' care coincid, adîcă *dreptele MN, PQ, RS sînt concurente.*

5. *Generalizare. Tetraedrul.* Luînd cele patru puncte în spaţiu, ele formează un tetraedru $ABCD$. Fie O un punct fix dat

Notăm cu I şi L mijloacele muchiilor opuse AB şi CD şi cu M mijlocul segmentului IL; avem:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OI} + \vec{OL}}{2} = \frac{\dfrac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} + \dfrac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2}}{2}$$

deci,

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{CO} + \vec{OD}}{4}.$$

Prin calcule identice vom obţine şi pentru mijloacele segmentelor ce unesc mijloacele celorlalte două perechi de muchii opuse, aceiaşi expresie vectorială. De aici rezultă teorema de geometrie elementară: *într-un tetraedru dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse sînt concurente.*

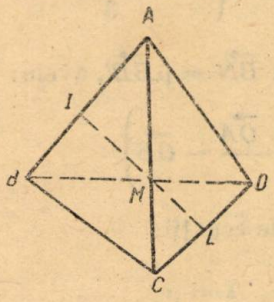


Fig. 17

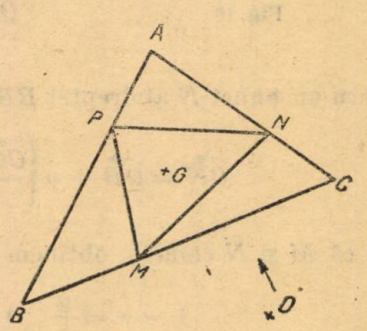


Fig. 18

6. *Dacă M, N, P împart laturile unui triunghi ABC în acelaşi raport şi în acelaşi sens, triunghiurile MNP şi ABC au acelaşi punct de întîlnire al medianelor* (fig. 18).

Din ipoteză avem:

$$\frac{\vec{MB}}{\vec{MC}} = \frac{\vec{NC}}{\vec{NA}} = \frac{\vec{PA}}{\vec{PB}} = -k$$

din care obţinem:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OB} + k\vec{OC}}{1+k}, \quad \vec{ON} = \frac{\vec{OC} + k\vec{OA}}{1+k}, \quad \vec{OP} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1+k}.$$

Fie G' punctul în întîlnire al medianelor triunghiului MNP. Poziţia lui este dată de relaţia

$$\vec{OG'} = \frac{\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}}{3} \quad \text{sau} \quad \vec{OG'} = \frac{(1+k)\vec{OA} + (1+k)\vec{OB} + (1+k)\vec{OC}}{3(1+k)}$$

de unde, dînd factor comun pe $1 + k$ şi simplificînd, obţinem:

$\overrightarrow{OG'} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$, expresie care dă şi poziţia punctului G ca intersecţie a medianelor triunghiului ABC.

7. *Intr-un tetraedru, dreptele care unesc vîrfurile cu centrele de greutate ale triunghiurilor opuse, sînt concurente.*

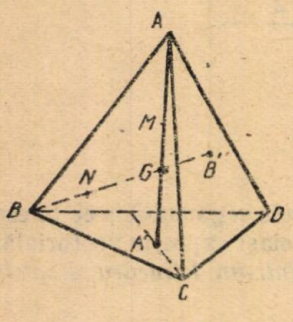


Fig 19

Fie $ABCD$ tetraedrul dat şi A' centrul de greutate al triunghiului BCD (fig. 19). Dacă O este un punct dat, avem:

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}$$

Pentru un punct M al dreptei AA' astfel ca $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AA'}$, avem:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\left(\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3} - \overrightarrow{OA}\right),$$

iar pentru un punct N al dreptei BB', astfel ca $\overrightarrow{BN} = \mu \overrightarrow{BB'}$, avem:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \mu\left(\frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}}{3} - \overrightarrow{OB}\right)$$

Scriind că M şi N coincid, obţinem sistemul de ecuaţii:

$$1 - \lambda = \frac{\mu}{3},\quad 1 - \mu = \frac{\lambda}{3},\quad \lambda = \mu$$

care rezolvat în raport cu λ şi μ dă:

$$\lambda = \mu = \frac{3}{4}$$

Deci, dreptele AA', BB' se taie într-un punct G definit de relaţia:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\left(\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3} - \overrightarrow{OA}\right),$$

sau

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$$

Simetria acestei formule spune că şi celelalte drepte, care unesc vîrfurile cu centrele de greutate ale triunghiurilor opuse vor trece prin punctul G.

8. *Să se stabilească formula de trigonometrie plană:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Elementele considerate privesc un triunghi oarecare ABC. Avem identitatea $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ pe care ridicînd-o la patrat scalar, obţinem:

$$\vec{BC}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\,\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

deci,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

9. *Teorema celor trei perpendiculare.* $\vec{OA} \perp P$, $\vec{CD}$ vector din plan, deci $\vec{OA} \cdot \vec{CD} = 0$ (1). Din ipoteza $\vec{AB} \perp \vec{CD}$, deci $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$ (2). Relaţia (2) se mai scrie $(\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot \vec{CD} = 0$. Dezvoltînd, avem: $\vec{OB} \cdot \vec{CD} - \vec{OA} \cdot \vec{CD} = 0$ In baza relaţiei (1) rezultă $\vec{OB} \cdot \vec{CD} = 0$, deci, $\vec{OB} \perp \vec{CD}$.

EXERCIŢII.

1. *Să se demonstreze că bisectoarele unui triunghi sînt drepte concurente.*

I fiind punctul de intersecţie al bisectoarelor se găseşte:

$$\vec{OI} = \frac{a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC}}{a + b + c}$$

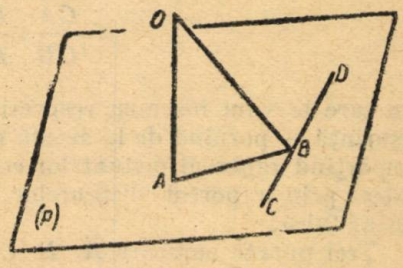


Fig 20

2. *Să se demonstreze că înălţimile unui triunghi sînt concurente.* H fiind ortocentrul triunghiului, se găseşte:

$$\vec{OH} = \frac{\operatorname{tg}A \cdot \vec{OA} + \operatorname{tg}B \cdot \vec{OB} + \operatorname{tg}C \cdot \vec{OC}}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C}$$

3. *Să se demonstreze că mediatoarele unui triunghi sînt concurente.* ω fiind punctul de intersecţie al mediatoarelor, avem:

$$\vec{O\omega} = \frac{\sin 2A \cdot \vec{OA} + \sin 2B \cdot \vec{OB} + \sin 2C \cdot \vec{OC}}{4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

4. *Se consideră un triunghi oarecare ABC şi se notează cu H, G, ω, respectiv punctul de concurenţă al înălţimilor, medianelor şi mediatoarelor. Fie O un punct oarecare din planul triunghiului.*

a) *Să se deducă formula* $\vec{OG} = \dfrac{\vec{2O\omega} + \vec{OH}}{3}$

b) *Să se arate că cele trei puncte H, G, ω, sînt colineare.*

RAPORTUL ANARMONIC

1. NOȚIUNEA de raport anarmonic a patru puncte A, B, C, D situate în linie dreaptă (sau biraport), noțiune fundamentală pentru geometria de poziție—geometria proiectivă, a fost introdusă în geometrie de către Möbius (1790—1868). Proprietatea fundamentală a raportului anarmonic a fost cunoscută însă din antichitate. Ea se găsește în «Colecțiile matematice» ale lui Pappus care a trăit în Alexandria la sfîrșitul secolului al IV-lea.

2. Numim raport anarmonic (sau biraport) a patru puncte A, B, C, D situate în linie dreaptă cîtul rapoartelor distanțelor a două puncte oarecare la celelalte două. Astfel sînt de exemplu, cîturile:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \; ; \quad \frac{DA}{DC} : \frac{BA}{BC}$$

pe care le vom însemna respectiv prin $(ABCD)$, $(ACDB)$. Se observă cu ușurință că pornind de la acestă notație, cîtul celor două rapoarte se obține împărțind raportul distanțelor celui de al 3-lea punct la primul și cel de al 2-lea prin raportul distanțelor celui de al 4-lea punct la primul și cel de al 2-lea.

Trei puncte oarecare A, B, C fiind date pe o dreaptă putem determina pe aceeași dreaptă un singur punct D astfel ca raportul anarmonic al punctelor A, B, C, D să aibă o valoare dată λ în mărime și semn. In adevăr relația

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \lambda, \quad \text{sau} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{CA}{CB}$$

determină un singur punct D. Totodată, pentru ca punctul D să fie distinct de primele trei este necesar ca λ să nu aibă nici una din valorile $0, \infty$ sau $+1$, valori pentru care, cum se poate constata cu ușurință, D ar coincide respectiv cu B, A, C. Pentru $\lambda = -1$ avem un caz particular important: spunem că punctele colineare A, B, C, D formează un *sistem armonic*. (Vezi R.M.F. III pag. 210).

Presupunînd că unul din cele patru puncte ale unui raport anarmonic devine punctul impropriu (de la infinit) al dreptei (D, de ex.), raportul anarmonic,

$$(ABCD_\infty) = \frac{CA}{CB}$$

poartă numele de *raport segmentar* al punctelor colineare A, B, C. Un caz particular remarcabil este obținut din

$$(ABCD_\infty) = -1 \; ; \quad \frac{CA}{CB} = -1 \; ; \quad \overline{AC} + \overline{BC} = 0$$

care arată că armonicul punctului impropriu al dreptei față de punctele A și B este mijlocul segmentului AB.

Raportul anarmonic $(ABCD)$ nu își schimbă valoarea dacă permutînd două puncte, în ac laşi timp permutăm şi celelalte două. Astfel avem:

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA \cdot CB}{DB \cdot DA};$$

$$(CDAB) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC \cdot AD}{BD \cdot BC}$$

şi deci $$(ABCD) = (CDAB) \qquad (1)$$

Propunem ca cititorul să demonstreze relaţiile:

$$(ABCD) = 1 : (ABDC)$$

$$(ABCD) + (ACBD) = 1 \qquad (2)$$

$$(MNAB) \cdot (MNBC) \cdot (MNCA) = 1. \qquad (3)$$

Indicaţie. Se va ţine seamă că segmentele sînt orientate: $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Ultima relaţie se numeşte identitatea lui M ö b i u s .

Cu 4 puncte A, B, C, D se pot forma $P_4 = 24$ rapoarte anarmonice dintre care însă, în virtutea proprietăţii (1) numai şase sînt distincte. Dacă notăm $(ABCD) = \rho$, ţinînd seamă de relaţiile (2), vom obţine:

$$(ABCD) = \frac{1}{\rho}; \; (ACBD) = 1 - \rho; \; (ACDB) = \frac{1}{1-\rho}; \; (ADCB) = \frac{\rho}{\rho - 1};$$

$$(ADBC) = \frac{\rho - 1}{\rho}.$$

Cînd într-o teoremă vom vorbi despre raportul anarmonic a patru puncte, fără a indica special unul din aceste rapoarte, vom înţelege că teorema se aplică indiferent la oricare din ele.

3. Vom demonstra acum, că raportul anarmonic $(ABCD) = \rho$ se poate scrie sub forma

$$\frac{1-\rho}{CD} = \frac{1}{CB} - \frac{\rho}{CA}.$$

In adevăr $$\rho = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA} = \frac{CA\,(CB - CD)}{CB\,(CA - CD)}$$

sau $$\rho \cdot CB\,(CA - CD) = CA\,(CB - CD)$$ de unde rezultă

$$(1 - \rho)\, CA \cdot CB = CD\,(CA - \rho \cdot CB)$$

Divizînd prin produsul $CA \cdot CB \cdot CD$ găsim relaţia de mai sus.

Cititorul va demonstra cu uşurinţă că dacă $(ABCD) = \rho$, iar M şi M' sînt respectiv mijloacele segmentelor AB, CD avem relaţia

$$\overline{MA}^2 - \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 2\frac{1+\rho}{1-\rho}\overline{MA} \cdot \overline{M'C}.$$

Pentru $\rho = -1$, obţinem relaţiile cunoscute care caracterizează diviziunea armonică.

Se va arăta de asemenea că:

$$(ABCD) = \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{AB}\right) : \left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB}\right).$$

Această formă dată raportului anarmonic de către C h a s l e s îşi manifestă fecunditatea în special în studiul curburii conicelor şi cuadricelor.

4. Numim fascicul un sistem oarecare de drepte OM, ON, OP, OQ, ce pornesc dintr-un acelaşi punct O. Punctul O este centrul fasciculului; dreptele OM, ON, OP, OQ se numesc razele fasciculului.

Teoremă fundamentală. Raportul anarmonic a patru puncte A, B, C, D (fig. 1) determinate pe o transversală L de razele OM, ON, OP, OQ ale unui fascicul de patru drepte nu depinde de poziţia transversalei.

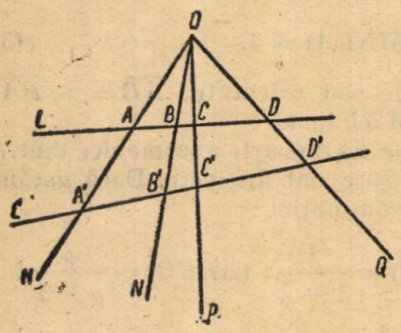


Fig. 1

Triunghiurile CAO, CBO dau

$$\frac{CA}{\sin \widehat{AOC}} = \frac{AO}{\sin \widehat{OCA}}; \quad \frac{CB}{\sin \widehat{BOC}} = \frac{BO}{\sin \widehat{OCB}};$$

de unde, divizînd membru cu membru obţinem

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin \widehat{COB}};$$

analog:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}.$$

Prin urmare

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin \widehat{COB}} : \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}.$$

Raportul anarmonic $(ABCD)$ nu depinde deci, decît de unghiurile fasciculului; el are aceeaşi valoare pentru o transversală L'.

Observaţie. Putem considera figura rectilinie $A'B'C'D'$ ca proiecţia concurentă a figurii rectilinii $ABCD$ făcută din centrul O şi urmînd razele proiectante OA, OB, OC, OD. De aici teorema fundamentală se poate enunţa comod: *Raportul anarmonic a patru puncte colineare este proiectiv.* Dacă centrul O este la infinit razele OA, OB, OC, OD sînt paralele şi teorema subsistă.

Folosind aliniatul 3 de la p. 2 şi teorema fundamentală observăm că teorema lui *T h a l e s* devine un caz cu totul particular al acestui teoreme. Aceeaşi teoremă ne arată că teorema lui M e n e l a u s este un caz particular al identităţii lui M ö b i u s (vezi demonstraţiile în G.M.F. IV, pag. 335–336).

5. Numim raport anarmonic al unui fascicul de patru drepte raportul anarmonic a patru puncte determinate de fascicul pe o transversală oarecare.

Astfel $(ABCD)$, $(ACDB)$, ... etc. sînt rapoarte anarmonice ale fasciculului format de dreptele OM, ON, OP, OQ. Desemnăm aceste rapoarte anarmonice ale fasciculului prin notaţia $(O \cdot ABCD)$, $(O \cdot ACDB)$, ... (fig. 1). In virtutea proprietăţii (1) raportul anarmonic al unui fascicul nu-şi schimbă valoarea dacă permutînd două raze permutăm în acelaşi timp şi celelalte două: $(O \cdot ABCD) = (O \cdot CDAB)$. Din demonstraţia dată teoremei fundamentale este evident că două fascicule care au aceleaşi unghiuri au aceleaşi rapoarte anarmonice. Iată două exemple importante:

1°. Dacă unim un punct oarecare O al unui cerc cu patru puncte fixe A, B, C, D de pe acelaşi cerc, raportul anarmonic al fasciculului astfel obţinut este constant, oricare ar fi poziţia lui O pe cerc. Proprietatea rezultă din proprietatea unghiurilor înscrise în cerc. Acest raport constant se numeşte *raportul anarmonic a patru puncte conciclice A, B, C, D, fixe.*

2°. Dacă unim centrul unui cerc cu punctele unde patru tangente fixe sînt tăiate de o a cincea tangentă, raportul anarmonic al fasciculului astfel obţinut este constant, oricare ar fi a cincea tangentă. Acest raport constant se numeşte *raportul anarmonic a patru tangente fixe.* Raportul anarmonic a patru tangente fixe la un cerc este egal cu raportul anarmonic al celor patru puncte de contact.

6. Iată două teoreme de mare importanţă în aplicaţii:

Teoremă

Dacă două fascicule de patru drepte OA, OB, OC, OD şi $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, $O'D'$ au acelaşi raport anarmonic şi o rază omoloagă comună OO', punctele β, γ, δ de intersecţie a celorlalte raze omoloage sînt colineare (fig. 2).

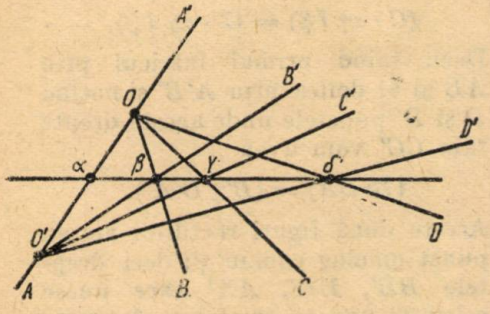


Fig. 2

Desemnăm respectiv prin α, δ, δ' punctele unde dreapta $\beta\gamma$ întîlneşte OO', OD, $O'D'$; prin ipoteză vom avea

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta')$$

deci, δ şi δ' coincid (vezi §, 2 al. 2) şi punctele β, γ, δ sînt colineare.

Teoremă

Dacă două figuri rectilinii de patru puncte A,B,C,D şi A', B', C', D', au acelaşi raport anarmonic şi un punct omolog comun A, dreptele BB', CC', şi DD' care unesc punctele omoloage sînt concurente într-un punct O (fig. 3).

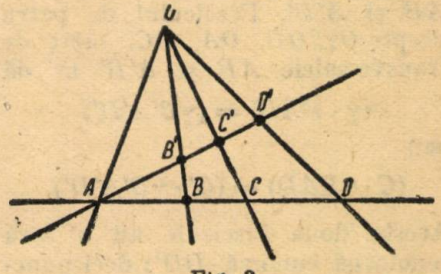


Fig. 3

Fie O punctul de intersecţie al dreptelor BB', CC'; fie δ punctul în care OD' taie dreapta ABC. Vom avea

$$(A'B'C'D') = (ABC\delta)$$

Insă, prin ipoteză

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

deci, $(ABC\delta) = (ABCD)$,

Prin urmare δ coincide cu D şi dreapta DD' trece prin O.

7. Triunghiuri omologice. Vom folosi teoremele care preced pentru a demonstra teoremele lui Desargues (1593—1663), baza geometriei proiective plane.

Dacă dreptele care unesc vîrfurile omoloage ale triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ sînt concurente într-un punct O, laturile omoloage ale acestor triunghiuri se intersectează în puncte colineare.

Dacă laturile omoloage ale triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ se intersectează în puncte colineare dreptele care unesc vîrfurile omoloage ale acestor triunghiuri sînt concurente (fig. 4).

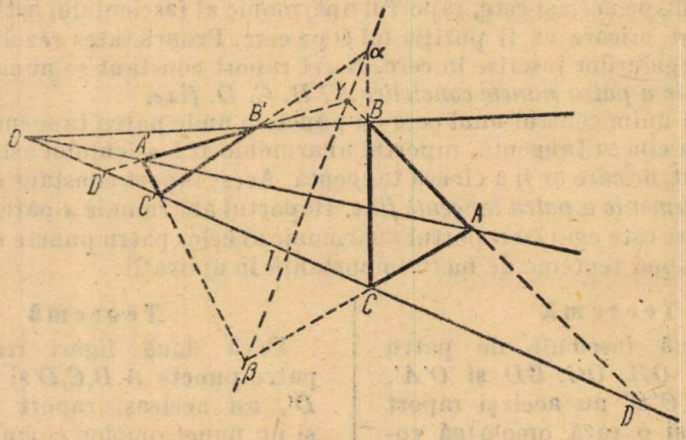


Fig. 4

Fie D şi D' punctele unde dreapta $OC'C$ întîlneşte respectiv laturile AB şi $A'B'$. Fasciculul de patru drepte $O\gamma$, OB, OA, OC, tăiat de transversalele AB şi $A'B'$ ne dă

$$(\gamma \cdot BAD) = (\gamma B'A'D')$$

sau

$$(C \cdot \gamma BAD) = (C' \cdot \gamma B'A'D').$$

Aceste două fascicule au o rază omoloagă comună DD'; deci punctele de intersecţie γ, α, β, a celorlalte cupluri de raze omoloage sînt colineare.

Fie I intersecţia dreptelor $\alpha\beta\gamma$ şi CC'. Vom avea,

$$(C \cdot \alpha\gamma I\beta) = C' \cdot \alpha\gamma I\beta).$$

Deci, tăind primul fascicul prin AB şi al doilea prin $A'B'$ şi notînd D şi D' punctele unde aceste drepte taie CC' vom avea

$$(B\alpha DA) = (B'\gamma'D'A').$$

Aceste două figuri rectilinii au un punct omolog comun γ; deci dreptele BB', DD', AA' care unesc celelalte puncte omoloage sînt concurente într-un punct O.

Triunghiurile ABC, $A'B'C'$ care satisfac condiţiile precedente se numesc omologice; punctul O şi dreapta $\alpha\beta\gamma$ se numesc *centrul* şi *axa de omologie*. Dacă ABC este omologic în acelaşi timp cu $A'B'C'$ şi $B'C'A'$ triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ se numesc biomologice. Tot aşa dacă ABC este omologic în acelaşi timp cu $A'B'C'$, $B'C'A'$ şi $C'A'B'$ zicem că triunghiurile sînt triomologice. Se poate demonstra că dacă două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ sînt biomologice ele sînt şi triomologice.

Observare. In general, cînd trecem de la geometria obişnuită în spaţiu la cea plană, ne aşteptăm la o simplificare a teoremelor şi a demonstraţiilor lor. Dacă de ex. vrem să cercetăm proprietăţile poligoanelor plane cu ajutorul poliedrelor, avem nevoie de un aparat demonstrativ şi reprezentativ mult mai complicat decît am cerceta aceste proprietăţi direct în plan. Nu totdeauna este însă aşa. Teoremele lui Desargues mai sus demonstrate, constituie un exemplu clasic citat ca model de simplificare de demonstraţie prin trecerea în spaţiu unde ele sînt evidente. Intr-adevăr (teorema I-a) presupunînd că cele două triunghiuri sînt aşezate în plane diferite care se intersectează după o dreaptă Δ, este evident că pe această dreaptă vor trebui să se întîlnească laturile AB şi $A'B'$ din planul OAB căci ele fiind continue respectiv în cele două plane ale triunghiurilor date, intersecţia lor se va găsi la intersecţia planelor. Pentru acelaşi motiv celelalte două perechi de laturi se vor întîlni tot pe Δ.

8. Vom aplica acum, observaţiile 1° şi 2° de la paragraful 5 la demonstrarea teoremelor lui Pascal şi Brianchon asupra exagonului.

Teorema lui Pascal. In orice exagon $ABCDEF$ înscris într-un cerc, punctele de intersecţie L,M,N al laturilor opuse AB şi DE, BC şi EF, CD şi AF sînt coliniare (fig. 5). Avem (§ 5—1°):

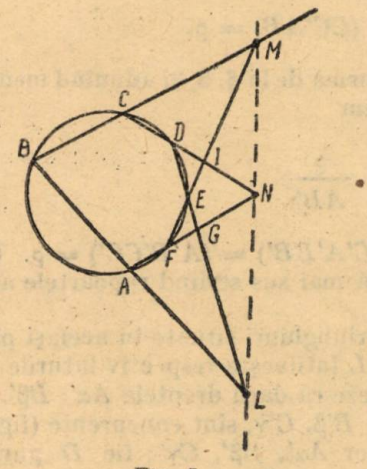


Fig. 5

$$(A \cdot BFED) = (C \cdot BFED).$$

Prin urmare intersectînd primul fascicul prin dreapta DE al doilea cu dreapta FE şi notînd

$$G \equiv (AF;\ DE),\ I \equiv (EF;\ CD)$$

vom avea $(LGED) = (MFEI)$.

Teorema lui Brianchon. In orice hexagon $ABCDEF$ circumscris unui cerc, diagonalele AD, BE, CF, care unesc vîrfurile opuse se taie în acelaşi punct O. (fig. 6).

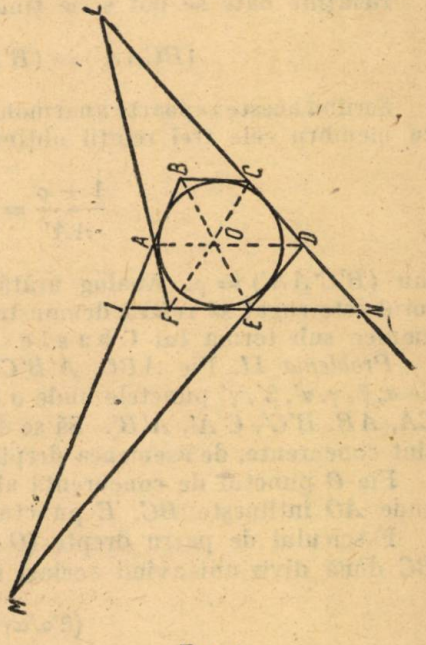


Fig. 6

Fie I şi M punctele unde AB întîlneşte FE şi DE şi L şi N punctele unde CD întîlneşte AF şi FE;

Aceste două diviziuni au un punct omolog comun E, deci dreptele LM, GF, DI se taie în același punct N. Punctele L, M, N, sînt deci coliniare.

vom avea (§ 5—2°) considerînd tangentele AB și CD intersectate de celelalte patru, avem:

$$(BAIM) = (CLND).$$

Prin urmare,

$$(E \cdot BAIM) = (F \cdot CLND).$$

Aceste două fascicule au o rază omoloagă comună IN; deci, punctele O, A, D intersecțiile celorlalte raze omoloage, sînt coliniare. Dreptele AD, BE, CF trec deci, prin același punct O.

Aceste teoreme subsistă chiar cînd hexagonul încetează de a fi convex și indiferent de mărimile laturilor lui. (O latură, de ex. poate deveni tangentă la cerc. De asemenea, teoremele subsistă cînd hexagonul este înscris sau circumscris unei conice).

9. *Aplicații. Problema 1.* Să se demonstreze că fiind date pe o dreaptă șase puncte A, B, C, A', B', C', astfel ca $(BCAA') = (CABB') = (ABCC') = \rho$. Vom avea de asemenea $(B'C'AA') = (C'A'BB') = (A'B'CC') = \rho$.

Relațiile date se pot scrie ținînd seamă de proprietatea (1),

$$(BCAA') = (B'BAC) = (CC'AB) = \rho.$$

Scriind aceste rapoarte anarmonice sub forma de la §. 3, și adunînd membru cu membru cele trei relații obținute, găsim

$$\frac{1-\rho}{AA'} = \frac{1}{AC'} - \frac{\rho}{AB'}$$

sau $(B'C'AA') = \rho$. Analog arătăm că $(C'A'BB') = (A'B'CC') = \rho$. Cititorul este rugat să refacă demonstrația dată mai sus scriind rapoartele anarmonice sub forma lui Chasles.

Problema II. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri situate în același plan; fie $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ punctele unde o dreaptă L întîlnește respectiv laturile BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Să se demonstreze că dacă dreptele $A\alpha'$. $B\beta'$, $C\gamma'$ sînt concurente, de asemenea dreptele, $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$, sînt concurente (fig. 7).

Fie O punctul de concurență al dreptelor $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$; fie D punctul unde AO întîlnește BC, E punctul unde $A'\alpha$ întîlnește $B'C'$.

Fasciculul de patru drepte $(O \cdot \beta'\alpha'\alpha\gamma')$ determină pe transversalele L și BC două diviziuni avînd același raport anarmonic:

$$(\beta'\alpha'\alpha\gamma') = (BD\alpha C).$$

Intersectînd fasciculul $(A \cdot BD\alpha C)$ cu transversala L avem:

$$(BD\alpha C) = (\gamma\alpha'\alpha\beta) \text{ de unde deducem } (\beta'\alpha'\alpha\gamma') = (\gamma\alpha'\alpha\beta).$$

Fasciculul $(A' \cdot \beta'\alpha'\alpha\gamma')$ determină pe dreapta $B'C'$ patru puncte C', α', E, B' astfel ca $(C'\alpha'EB') = (\beta'\alpha'\alpha\gamma')$ și deci $(C'\alpha'EB') = (\gamma\alpha'\alpha\beta)$.

Diviziunile $(C'\alpha'EB')$, $(\gamma\alpha'\alpha\beta)$ au un punct omolog comun şi acelaşi raport anarmonic, deci, dreptele $C'\gamma$, $E\alpha$, (sau $A'\alpha$), $B'\beta$, sînt concurente într-un punct O'.

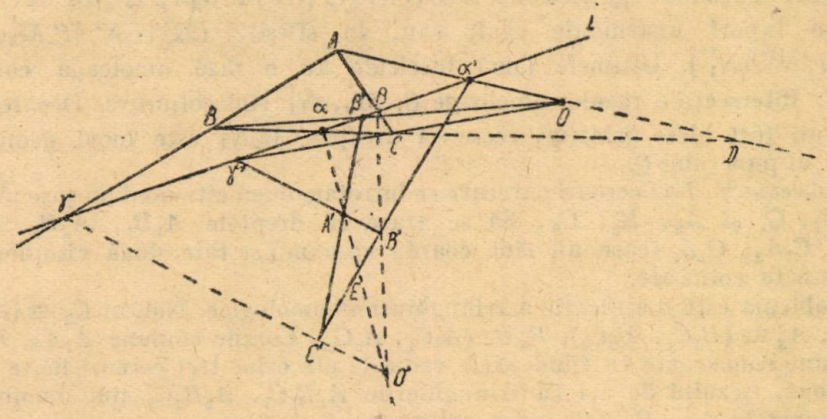


Fig. 7

Problema III. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri situate în acelaşi plan; fie $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, punctele unde o dreaptă L întîlneşte respectiv laturile BC, CA, AB, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Să se demonstreze că dacă dreptele $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, taie BC, CA, AB în trei puncte a, b, c colineare, dreptele $A'\alpha$, $B'\alpha$, $C'\gamma$ întîlnesc $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ în trei puncte a', b', c' colineare.

Problema IV. Fie N şi M două puncte de pe latura BC simetrice faţă de un punct fix A_1 de pe BC; fie P_1 şi P_2 două puncte fixe în planul triunghiului.

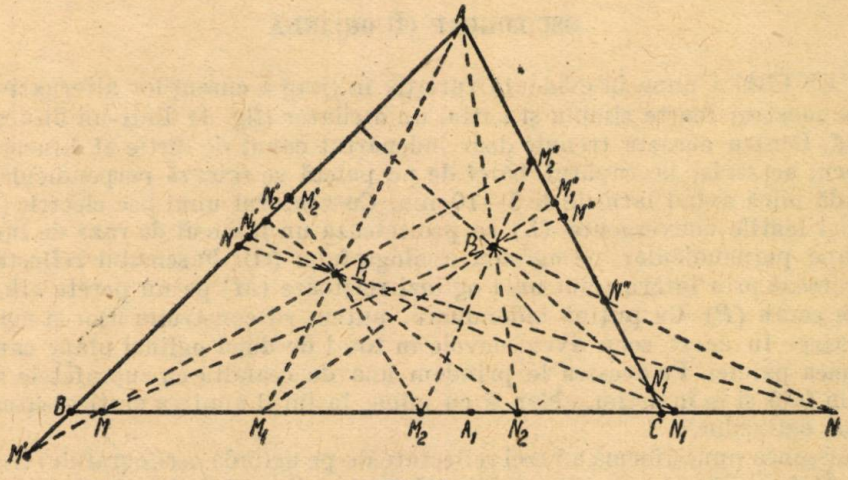


Fig. 8

Dreptele P_1M şi P_1N taie AB în M' şi N' iar P_2M şi P_2N taie latura AC în M'' şi N''. Să se găsească locul intersecţiei $Q(M'M''; N'N'')$ cînd N şi M variază.

Fie M_1N_1 poziţiile lui M şi N cînd P_1M_1 trece prin A. Fie M_2, N_2 poziţiile punctelor M şi N cînd P_2N_2 trece prin A. Din cauza simetriei punctelor M, N; M_1, N_1 M_2, N_2 faţă de A_1, rapoartele anarmonice (NMM_2M_1) şi (MNN_2N_1) sînt egale. Deci fasciculele $(P_1 \cdot NMM_2N_1)$, $(P_2 \cdot MNN_2N_1)$ au un raport anarmonic egal. Deci şi fascicolele $(P_1 \cdot N'M'M_2'A)$, $(P_2 \cdot M''N''AN_1'')$ au un raport anarmonic egal, sau, în sfîrşit, $(M'' \cdot N'M'M_2'A) = (N' \cdot M''N''AN_1'')$. Ultimele două fascicule au o rază omoloagă comună $M''N'$. Intersecţiile razelor omoloage Q, M_2', N_1'' sînt colineare. Deoarece M şi N au fost alese arbitrar, reese că dreapta $M_2'N_1''$ este locul geometric căutat al punctului Q.

Problema V. Trei cercuri oarecare se întretaie două cîte două în şase puncte A_1, B_1, C_1 şi A_2, B_2, C_2. Să se arate că dreptele A_1B_1, A_2B_2, B_1C_1, B_2C_2, C_1A_1, C_2A_2 (care nu sînt coarde comune) se taie două cîte două în trei puncte colineare.

Problema este o aplicaţie a triunghiurilor omologice. Notăm $C_3 \equiv (A_1B_1; A_2B_2)$, $A_3 \equiv (B_1C_1, B_2C_2)$, $B_3 \equiv (A_1C_1, A_2C_2)$. Corzile comune A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt concurente ca fiind axele radicale ale celor trei cercuri luate două cîte două. Rezultă de aci că triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sînt omologice; deci punctele A_3, B_3, C_3, sînt colineare.

Marius Iosifescu
student, Bucureşti

CONSTRUCŢII DE APARATE CU MIJLOACE PROPRII

T. LASZLO

Profesor la Universitatea «Bolyai», Cluj

OSCILOGRAF CU OGLINDĂ

PENTRU a pune în evidenţă variaţia în timp a curenţilor alternativi, se poate construi foarte simplu şi ieftin, un oscilator (fig. 1) dintr-un difuzor cu paletă. Pentru aceasta trebuie doar îndepărtat conul de hîrtie al difuzorului. In locul acestuia, la capătul barei de pe paletă se fixează perpendicular, o oglindă mică avînd laturile de 5—10 mm. Cu ajutorul unui bec electric (B) şi al unei lentile convergente (L) se proiectează un fascicul de raze de lumină aproape perpendicular pe oglinda oscilografului (O). Fasciculul reflectat se proiectează prin intermediul unei oglinzi rotitoare (M) pe un perete alb, sau pe un ecran (P). Cu puţină îndemînare, putem să construim uşor şi oglinda rotitoare. In acest scop avem nevoie în total de două oglinzi plane cam de mărimea palmei. Pe acestea le prindem una de cealaltă cu suprafeţele mate faţă în faţă şi le învîrtim, chiar şi cu mîna, în jurul unui ax vertical situat în planul oglinzilor.

Imaginea punctiformă a razei reflectate de pe oglinda oscilografului trebuie să cadă în mijlocul oglinzii rotitoare. La un oscilograf în funcţiune imaginea punctiformă se reflectă sub forma unei linii drepte luminoase, paralelă cu axa de rotaţie a oglinzii în repaos. Dacă oglinda se învîrteşte şi oscilograful nu funcţionează, pe ecran se observă o linie luminoasă orizontală. Să dăm oscilografului,

cu ajutorul unui transformator mic, o tensiune de 10—40 volţi (după sistemul difuzorului). Linia luminoasă dată de oglinda rotitoare se transformă într-o sinusoidă. Amplitudinea sinusoidei variază cu tensiunea. Cei care sînt mai rutinaţi în radiotehnică pot să experimenteze cu curenţi alternativi de frecvenţă sonoră. Legătura se poate face printr-un condensator de cîţiva microfarazi sau şi mai bine, printr-un transformator de ieşire.

PLĂMÎNUL CA MAŞINĂ DE RIDICAT

Se ştie că dacă suflăm cu gura într-o pungă de hîrtie şi apoi, după închidere o lovim, ea plesneşte făcînd zgomot. Mărimea forţelor ce intervin în această experienţă se poate demonstra astfel: aşezăm pe marginea mesei o pungă de hîrtie de 2—5 dm.^{3} cu pereţii groşi şi cu gura în afară (fig. 2). Punem pe ea cîteva cărţi. Dacă suflăm cu gura în pungă, aerul introdus ridică uşor cărţile. Se pot ridica astfel, chiar şi lucruri mai grele, cum ar fi de exemplu, lexicoane.

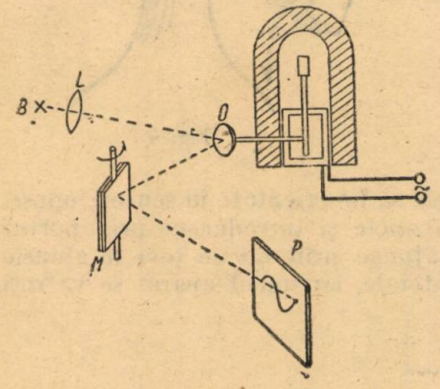


Fig. 1

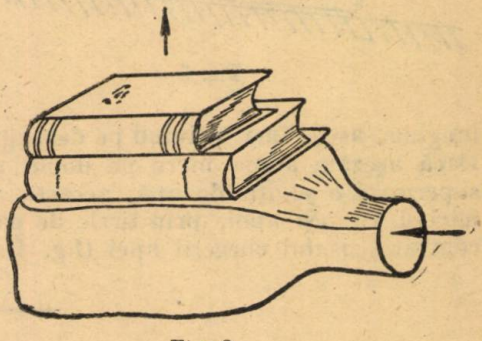


Fig. 2

NIVELA SIMPLĂ

Tăiem din carton două dreptunghiuri de cîte 20 cm lungime, unul de 6 cm iar celălalt de 10 cm lăţime, avînd grija ca laturile lor lungi să fie perfect paralele. La 5 mm distanţă de latura mai lungă a fiecăruia, facem cîte o gaură. In gaura cartonului mai mare fixăm perpendicular pe plan, un ac cu gămălie. Lărgim puţin în jos gura cartonului mai mic, îl aşezăm pe ac, lîngă cartonul mare şi pe amîndouă le ţinem cu latura lungă aşezată în poziţie verticală faţă de planul de cercetat. Pe o suprafaţă orizontală cele două laturi superioare sînt paralele, iar pe o suprafaţă înclinată ele formează un unghi ascuţit (fig. 3).

MORIŞCA HIDRAULICĂ (ROATA SEGNER)

Materialul necesar este un fir de paie, două alune mici şi una mai mare. Pilim vîrful alunei mai mari, îi scoatem miezul şi cu o sîrmă înroşită în foc îi facem două găuri aproape de vîrf, de mărimea diametrului firului de paiu. Facem de ase-

menea, cîte două găuri şi în alunele mici, una opusă vîrfului, iar una lateral. Prin găuri scoatem miezul. Aşezăm aluna mare vertical cu vîrful în jos. In găurelele laterale lipim oblic în jos cîte un fir de paiu de 10 cm lungime. Capetele inferioare ale firelor de pai le introducem în orificiile superioare ale alunelor mici. In orificiile laterale ale acetora fixăm cîte un fir mai subţire de 2 cm

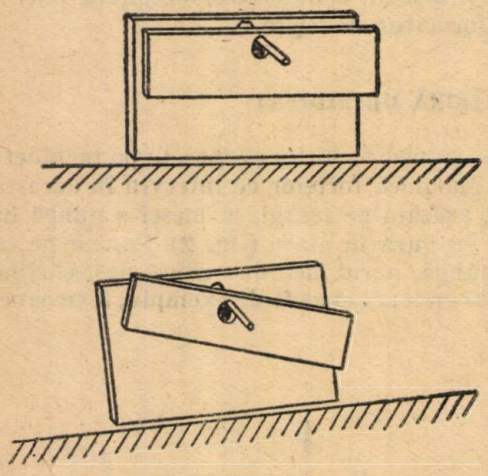


Fig. 3

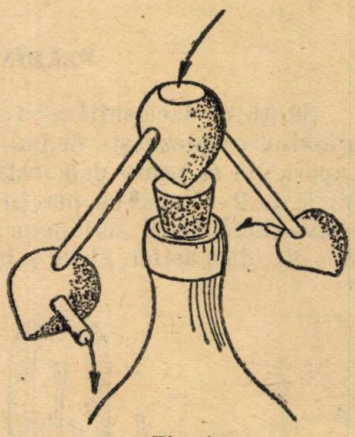


Fig. 4

lungime, astfel încît privind pe deasupra ele să fie orientate în sensuri opuse. Dacă aşezăm aluna mare pe dopul unei sticle şi introducem prin partea superioară o şuviţă de apă, aceasta va ajunge prin micile ţevi în alunele mici şi va ieşi apoi, prin firele de pai laterale, iar micul aparat se va roti contrar sensului curgerii apei (fig. 4).

CHESTIUNI DE EXAMEN *)

PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC TIMIŞOARA AUGUST 1954

1408. Se dă ecuaţia $4x^2 - 4x - a + 2 = 0$, ale cărei rădăcini le notăm cu u şi v. Se cere să se calculeze expresia:

$$E = \frac{\dfrac{u - v}{u^2 + v^2 + uv} + \dfrac{1}{u - v}}{\dfrac{u^2}{v(u - v)} - \dfrac{v^2}{u(v - u)}}$$

folosind valorile rădăcinilor şi apoi, să se verifice rezultatul cu ajutorul relaţiilor dintre rădăcini şi coeficienţi.

---

*) La aceste probleme se primesc soluţii pînă la 1 aprilie 1955.

1409. Ce devine expresia

$$x = \frac{\sqrt{3}\sin(a+b) - 2\sec\frac{\pi}{6}\cos(a+b)}{\sin a}$$

cînd $\sin b = \frac{4}{5}$ unghiul fiind ascuţit sau obtuz.

1410. In triunghiul ABC cunoaştem $BC = 4$; înălţimea $AH = \sqrt{3}$; $B = 30°$. O paralelă la latura BC taie pe AB şi AC respectiv în D şi E; iar DE taie înălţimea AH în I. Se cere:

a) Să se calculeze în funcţie de $IH = x$, lungimile segmentelor BD, DE şi EC.

b) Să se determine x, astfel ca suprafaţa totală a corpului rezultat din rotirea trapezului $BDEC$ în jurul BC să fie egală cu $3\pi(1+\sqrt{3})$.

Din cele două valori pentru x se va alege aceia pentru care punctul I este aşezat între A şi H.

1411. Să se determine valoarea expresiei:

$$E = \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

pentru $x = 2a^{\frac{1}{2}}(1+a)^{-1}$, $a > 1$.

Egalînd rezultatul aflat cu $a + 4\sqrt{a} - 3$ să se determine valoarea lui a.

1412. Intr-un trapez $ABCD$ înscris într-un cerc de rază R, laturile paralele BC şi AD sînt respectiv egale cu latura exagonului regulat şi cu latura triunghiului echilateral, înscrise în acest cerc. Să se arate că laturile AB şi CD sînt egale cu latura patratului înscris în cerc, iar diagonalele AC şi BD sînt perpendiculare.

In cazul cînd baza AD rămîne fixă iar BC variază cu poziţia dar păstrează lungimea figura devine un patrulater oarecare. Se cere locul intersecţiei Ma laturilor AB şi CD:

1413. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza a şi suma catetelor $b + c = s$. Discuţie.

PROBLEMELE DATE LA ADMITEREA ÎN INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI AUGUST 1945

1414. Se dă ecuaţia:

$$(m-2)x^2 - 2mx + 27 = 0$$

ale cărei rădăcini sînt x_1 şi x_2. Se cere:

a) Să se determine valoarea lui m pentru care, între rădăcinile ecuaţiei, avem relaţia

$$\frac{x_1-1}{1+x_2} = \frac{1-x_2}{1+x_1} = -\frac{10}{17}.$$

b) Pentru care valori ale lui m avem:

$$\frac{x_1-1}{1+x_2} + \frac{2}{3} > \frac{1-x_2}{1+x_1}.$$

1415. Se dau două cercuri tangente exterioare O şi O'. Tangentele comune exterioare punctele de contact S şi T cu cercul O, S' şi T' cu cercul O'. Se cere:

a) Să se calculeze raportul razelor celor două cercuri ştiind că cercul O' este cel mai mic şi că unghiul $S'O'T' = 150°$. Să se arate că:

$$\frac{R'}{R} = \operatorname{tg}^2 37°30'$$

b) Presupunînd că cercurile O şi O' nu sînt tangente, că unghiul $S'O'T' = 150°$, $R = R' = 2$ şi că ele reprezintă două roţi de transmisie, să se calculeze lungimea curelei de transmisie presupusă perfect întinsă.

1416. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}.$$

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1159

Să se transforme în fracţii ordinare următoarele fracţii periodice:

$$A = 0{,}141616\ldots = 0{,}14\,(16)$$

$$B = 0{,}31818\ldots = 0{,}3\,(18)$$

$$C = 0{,}459797\ldots = 0{,}45\,(97)$$

apoi să se arate că $A + B = C$.

* * *

Soluţie. $A = 0{,}14 + 0{,}0016 + 0{,}000016 + \ldots$

Dar 0,0016; 0,000016, etc. formează o progresie geometrică infinită cu suma S şi raţia $q = \frac{1}{10^2}$.

$$S = \frac{\frac{16}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{16}{(10^2 - 1)\,10^2} \quad \text{la fel pentru } B \text{ şi } C.$$

$$A = 0{,}14 - S = 0{,}14 + \frac{16}{(10^2 - 1)\,10^2} = \frac{1400 - 14 + 16}{10^2\,(10^2 - 1)} = \frac{1402}{9900} = \frac{701}{4950}$$

$$B = 0{,}3 + \frac{\frac{18}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 0{,}3 + \frac{18}{10\,(10^2 - 1)} = \frac{300 - 3 + 18}{990} = \frac{315}{990} = \frac{35}{110} = \frac{7}{22}$$

$$C = 0{,}45 + \frac{\frac{97}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 0{,}45 + \frac{97}{10^2\,(10^2 - 1)} = \frac{4500 - 45 + 97}{10^2\,(10^2 - 1)} = \frac{4552}{9900} = \frac{1138}{2475}$$

$$A + B = \frac{1402}{9900} + \frac{315}{990} = \frac{1402 + 3150}{9900} = \frac{4552}{9900} = C.$$

Problema 1166

Să se arate că dacă

$$x^2(x^4 + x - 4)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

avem:

$$x^{10} + 2x^7 - 8x^6 + 4x^5 + x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 1 = 0.$$

Reciproca este adevărată?

C. Ionescu-Ţiu

Soluție dată de elevul *Bocu Mircea*, Oradea: Avem:

$$M = x^{10} + 2x^7 - 8x^6 + 4x^5 + x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 1 =$$

$$= x^{10} + 2x^7 - 8x^6 + x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 4x^5 + 4x^2 - 16x + 1 =$$

$$= x^2(x^4 + x - 4)^2 + 4x(x^4 + x - 4) + 1 =$$

$$= [x(x^4 + x - 4) + 2]^2 - 3$$

Din relația de condiție avem:

$$[x(x^4 + x - 4)]^2 = (2 \pm \sqrt{3})$$

De unde:

$$x(x^4 + x - 4) = \pm (2 \pm \sqrt{3})^2$$

Inlocuind pe rînd în M aceste valori,

$$M_1 = (2 \pm \sqrt{3} + 2)^2 - 3 = (4 \pm \sqrt{3})^2 - (\pm\sqrt{3})^2 = (4 \pm 2\sqrt{3})\, 4 \neq 0$$

$$M_2 = (-2 \mp \sqrt{3} + 2)^2 - 3 = 3 - 3 = 0$$

Deci relația de demonstrat este valabilă numai pentru a 2-a soluție:

$$x(x^4 + x - 4) = -(2 \pm \sqrt{3})$$

Reciproc: dacă avem: $M = 0$,

$$[2 + x(x^4 + x - 4)]^2 - 3 = 0$$

de unde: $x(x^4 + x - 4) = (-2 \pm \sqrt{3})$ prin ridicarea la patrat:

$$x^2(x^4 + x - 2)^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

Deci, reciproca e adevărată.

Problema 1175

Se dă ecuația:

$$x^3 - (2 + m)x^2 + (3m - 4)x + 2m - 7 = 0$$

ale cărei rădăcini a_1, x_2, x_3 *sînt respectiv* $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ *și se cere să se afle* $\operatorname{tg}(a + b + c)$; *în cazul* $m = 3$ *să se afle unghiurile* a, b, c.

Mircea Bocu, elev, Oradea

Soluție. — Avem:

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}.$$

Ținînd seama de relațiile dintre rădăcini și coeficienți, găsim:

$$tg(a + b + c) = \frac{2 + m + 2m - 7}{1 - 3m + 4} = -1; \quad \left(m \neq \frac{5}{3}\right).$$

In cazul $m = 3$, ecuația este $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$ sau

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) - 5x(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

$x_1 = 1$; $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$, deci:

$$a = 180° K + 45°; \quad b = 180° K + 75°; \quad c = 180° K + 15°.$$

Problema 1177

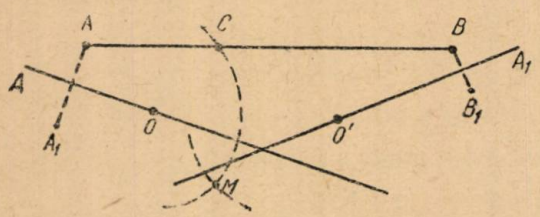
Se dau două puncte fixe A și B și pe dreapta AB un punct variabil C. Un cerc cu centrul O trece prin A și C, iar altul cu centrul O' trece prin B și C. Cercurile O și O' se intersectează a doua oară în punctul M. Știind că centrele O și O' descriu respectiv două drepte fixe Δ și Δ_1 se cere:

a) *locul punctului M;*

b) *să se arate că axul radical al cercurilor O și O' trece printr-un punct fix.*

* * *

Soluție dată de *Marius Iosifescu*. — Fie A_1 și B_1 simetricele punctelor A și B respectiv față de dreptele Δ și Δ_1, iar D intersecția dreptelor AA_1, BB_1. Patrulaterele $ACMA_1$ și $BCMB_1$ sînt inscriptibile. Deci, $\sphericalangle A_1MC = 180° - \sphericalangle CAA_1$, iar $\sphericalangle B_1MC = 180° - \sphericalangle CBB_1$, încît $\sphericalangle A_1MB_1 = 360° - (\sphericalangle CAA_1 + \sphericalangle CBB_1) = 180° - \sphericalangle A_1DB_1$. Punctul M se află prin urmare, pe cercul circumscris triunghiului A_1DB_1.



Fie N punctul în care coarda comună cercurilor O și O' taie a doua oară cercul A_1B_1D. Vom avea: $\sphericalangle B_1DN = \sphericalangle B_1MN = \sphericalangle CBD$. Deci, DN este paralelă cu AB și cum D este fix și N va fi fix.

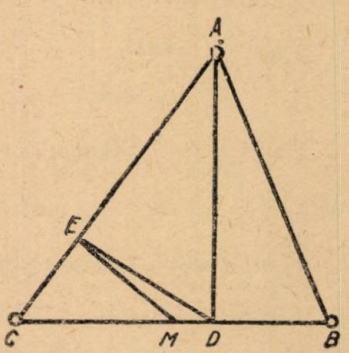
Problema 1181

Într-un triunghi ascuțitunghi ABC se proiectează mijlocul lui BC pe AC în E. Fie D piciorul înălțimii din A. Se notează $DE = a_1$ și b_1, c_1 segmentele formate analog. Să se arate că:

$$4\left(\frac{a_1^2}{\cos^2 C} + \frac{b_1^2}{\cos^2 A} + \frac{c_1^2}{\cos^2 B}\right) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Mircea Andreescu, elev București

Soluție. Fie M mijlocul lui BC; $CM = \frac{CB}{2}$ deci $CE = \frac{a\cos C}{2}$; $CD = b\cos c$ (din triunghiul ACD). Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul CED, avem:



$$a_1^2 = CE^2 + CD^2 - 2CE \cdot CD\cos C =$$

$$= \frac{a^2\cos^2 c}{4} + b^2\cos^2 C - \frac{2a\cos C}{2} \cdot b\cos^2 c$$

$$a_1^2 = \frac{a^2\cos^2 C + 4b^2\cos^2 C - 4ab\cos^3 C}{4}$$ De unde:

$$\frac{4a_1^2}{\cos^2 C} = a^2 + 4b^2 - 4ab\cos C = 3b^2 + c^2 - 2ab\cos C$$

conform teoremei cosinusului în triunghiul ABC

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Analog găsim:

$$\frac{4a_1^2}{\cos^2 C} = 3b^2 + c^2 - 2ab\cos C$$

$$\frac{4b_1^2}{\cos^2 A} = 3c^2 + a^2 - 2bc\cos A$$

$$\frac{4c_1^2}{\cos^2 B} = 3a^2 + b^2 - 2ac\cos B$$

Adunînd avem:

$$4\left(\frac{a_1^2}{\cos^2 C} + \frac{b_1^2}{\cos^2 A} + \frac{c_1^2}{\cos^2 B}\right) = 3(a^2 + b^2 + c^2) + a^2 + b^2 + c^2 - \\ - 2ab\cos C - 2bc\cos A - 2ac\cos B. \qquad (1)$$

Prin adunarea relațiilor:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C, \text{ obținem:}$$
$$0 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos C - 2bc\cos A - 2ac\cos B$$

care aplicată în (1) ne dă:

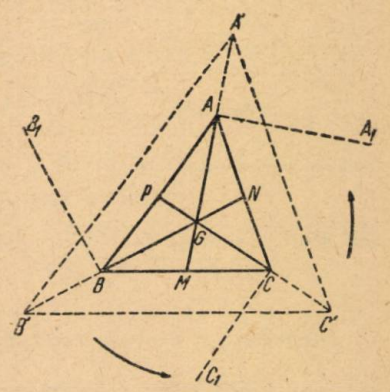
$$4\left(\frac{a_1^2}{\cos^2 C} + \frac{b_1^2}{\cos^2 A} + \frac{c_1^2}{\cos^2 B}\right) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Problema 1182

Ducem medianele AM, BN, CP într-un triunghi oarecare ABC. Din A, B, C ducem perpendicularele $AA_1 = AM$, $BB_1 = BN$, $CC_1 = CP$ respectiv pe cele trei mediane în același sens de parcurs. Să se arate că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea au același centru de greutate G, iar raportul de asemănare este $2:\sqrt{13}$.

N. Pupăzan, elev, Predeal

Soluție. Se Observă imediat că triunghiurile GAA_1, GBB_1, GCC_1 sînt asemenea. Rotind triunghiul $A_1B_1C_1$ în jurul punctului G de unghiul $BGB_1 = CGC_1 = AGA_1$ în sensul trigonometric, punctele $A_1B_1C_1$ se vor plasa pe prelungirile medianelor MA, NB, PC în A', B', C'. Vom avea egalitatea triunghiurilor $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$. Întrucît:



$$\frac{A'G}{AG} = \frac{B'G}{GB} = \frac{C'G}{GC}$$

triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt omotetice, deci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt asemenea.

Totodată am demonstrat că G este polul dublu al triunghiurilor ABC, $A_1B_1C_1$. El este deci și în triunghiul $A_1B_1C_1$ centrul de greutate.

Raportul de asemănare este

$$\frac{GA}{GA_1} = \frac{2/3}{\sqrt{1 + (2/3)^2}} = 2:\sqrt{13}.$$

Problema 1183

Să se rezolve ecuația: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin(a + x)}{\cos(a - x)}$

Matei I. Nazarie, elev, București

Soluția I-a. Desfăcînd parantezele obținem:

$$\operatorname{tg} x (\cos a \cos x + \sin a \sin x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$$

de unde $\operatorname{tg} x \sin a \sin x = \sin u \cos x$, deci, $\operatorname{tg}^2 x = 1$ sau $\operatorname{tg} x = \pm 1$. Rezultă, $x = 180°\mathrm{K} \pm 45°$.

Soluția II-a. Ecuația se poate scrie:

$$\sin(a - x) + \operatorname{tg} x \cos(a - x) = \sin(a + a) + \sin(a - x)$$

sau

$$\frac{\sin a}{\cos x} = 2 \sin a \cos x$$

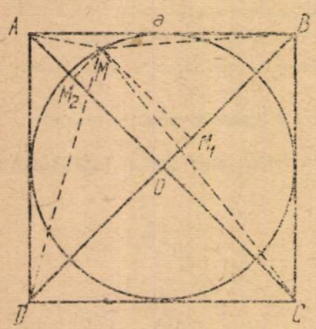
de unde $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ sau $\cos x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultă $x = 180°\mathrm{K} \pm 45°$.

Problema 1184

Dintr-un punct oarecare depe cercul înscris într-un patrat, diagonalele patratului se văd sub unghiurile x și y. Să se stabilească relația: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 8$.

Florin Torjescu, elev, Ploești

Soluție. Fie M punctul considerat. Fie $\sphericalangle BMD = x$; $\sphericalangle AMC = y$. Fie M_1, M_2 proiecțiile lui M pe diagonalele BD și AC. Vom avea:



$$\sin x = \frac{MM_1 \cdot BD}{MB \cdot MD};$$

$$\cos x = \frac{MB^2 + MD^2 - BD^2}{2\,MB \cdot MD}$$

Prin urmare,

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\,BD}{MB^2 + MD^2 - BD^2} \cdot MM_1.$$

Analog,

$$\operatorname{tg} y = \frac{2\,AC}{MA^2 + MC^2 - AC^2} \cdot MM_2.$$

Insă teorema medianei ne dă:

$$MB^2 + MD^2 = MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + \tfrac{1}{2}BD^2.$$

Mai ținînd seama că $MM_1^2 + MM_2^2 = MO^2$, obținem relația cerută.

Problema 1185

Dacă într-un triunghi avem relația $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}$ *să se arate că avem și relația* $2h_b = ha + hc$ *și reciproc. Suprafața este dată de formula*

$$S = \frac{b^2}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cos\frac{A - C}{2}.$$

Marcel Cotariu

Soluție dată de *M. Iosifescu* și *Florin Constantinescu*. Se știe că laturile sînt proporționale cu inversele înălțimilor,

$$\frac{a}{\frac{1}{ha}} = \frac{b}{\frac{1}{hb}} = \frac{c}{\frac{1}{hc}} = 2S.$$

Afirmația din enunț apare acum evidentă. Din relația de condiție avem:

$$ac = \frac{b}{2} \cdot (a + c) \quad \text{sau} \quad \frac{2S}{\sin B} = \frac{b}{2}\left(\frac{b \sin A + b \sin C}{\sin B}\right) \text{ deci,}$$

$$S = \frac{b^2}{4}(\sin A + \sin C) = \frac{b^2}{2} \sin \frac{A + C}{2} \cos \frac{A - C}{2} = \frac{b^2}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A - C}{2}.$$

Problema 1186

Notăm cu a', b', c' laturile triunghiului ortic al triunghiului de laturi a, b, c. Să se demonstreze relația:

$$(a' bc)^2 + (b' ca)^2 + (c' cb)^2 = (abc)^2 + 2\, abca' b' c'$$

(Semnul este + sau − după cum triunghiul ABC este ascuțitunghi sau obtuzunghi).

D. C. Panu

Soluție. — Se știe că $a' = a \cos A$; $b' = b \cos B$; $c' = c \cos C$, pentru triunghiul ascuțitunghi. De asemenea $a' = -a \cos A$; $b' = b \cos B$; $c' = c \cos C$, pentru triunghiul obtuzunghi $A > 90°$. Relația din enunț se reduce la relația cunoscută:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Problema 1187

Un obiect de 20 cm înălțime este așezat la 90 cm în dreapta unei lentile subțiri divergente a cărei distanță focală este de 30 cm. În stînga acestei lentile se așează o lentilă subțire convergentă cu o distanță focală de 20 cm.

a) *Cum trebuie să fie distanța dintre cele două lentile pentru ca imaginea obiectului să fie reală și situată la 30 cm în dreapta lentilei convergente?*

b) *Care este mărimea imaginei?*

Willy Paraschiv, student, București

Soluție. a) Imaginea dată de prima lentilă se formează la $p' = \frac{pf}{p + f} = 22{,}5$ cm în dreapta ei. Fie x cm distanța cerută. Va trebui să avem:

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{22{,}5 + x} + \frac{1}{30}$$

de unde $x = 37{,}5$ cm.

b) Înălțimea imaginei este:

$$20 \cdot \frac{p'_\alpha}{p_\alpha} \cdot \frac{p'_c}{p_c} = 20 \cdot \frac{22{,}5}{90} \cdot \frac{30}{60} = 2{,}5 \text{ cm}.$$

Problema 1188

Să se verifice relaţia

$$\sum_{k=1}^{n} \sin (2k-1)\, x = \operatorname{tg} nx \sum_{k=1}^{n} \cos (2k-1)\, x.$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie. In formulele

$$\sum_{k=0}^{n} \cos (a+kh) = \frac{\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right) \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}};$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin (a+kh) = \frac{\sin\left(a+\frac{n}{2}h\right) \sin \frac{n+1}{2} h}{\sin \frac{h}{2}}$$

facem $a = x$, $h = 2x$ şi înlocuim pe n cu $n-1$. Găsim

$$\sum_{k+1}^{n} \sin (2k-1)\, x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos (2k-1)x = \frac{\cos nx \sin nx}{\sin x}$$

PROBLEME PROPUSE

1417. Să se calculeze cît timp stă Soarele deasupra orizontului oraşului Tîrgovişte (latitudinea este $\varphi = 44°55'$) cînd declinaţia Soarelui este $\delta = 23°27'$.

Ce oră este la Bucureşti (longitudinea $= 26°8'50''$) cînd Soarele trece la meridianul oraşului Brăila ($L = 28°$).

Gh. Brebu, elev Tîrgovişte

1418. Să se arate că două tangente la un cerc şi coarda de contact împart în două părţi egale perpendiculara dusă dintr-un punct oarecare al coardei de contact pe diametrul ce trece prin acel punct.

* * *

1419. Produsul distanţelor unui punct oarecare luat pe un cerc la două laturi opuse ale unui patrulater înscris în acel cerc este egal cu produsul distanţelor aceluiaş punct la celelalte două laturi şi deasemenea egal cu produsul distanţelor punctului la diagonalele patrulaterului.

* * *

1420. Fie M, M' două puncte izogonale în raport cu triunghiul ABC iar X, X', Y, Y', Z, Z' proiecţiile acestor puncte respectiv pe laturile BC, CA, AB. Să se arate că:

1° Dreapta MX şi paralelele duse prin Z' şi Y' respectiv la BM, CM sînt concurente în X_1.

2° Dacă notăm cu X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 punctele analoage, atunci cele 12 puncte: X, Y, Z, X', Y', Z', X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 sînt pe acelaş cerc cu centrul în mijlocul lui MM'.

3° Patrulaterul XX_1X_2X' şi celelalte patrulatere analoage sînt dreptunghiuri.

Florin Constantinescu, elev, Cluj.

1421. Fie un patrulater convex $ABCD$. Notăm respectiv cu x, y, z, u, unghiurile ABD, ADB, BDC, DBC pe care diagonala BD le face cu laturile patrulaterului. Să se arate că este necesar şi suficient ca patrulaterul $ABCD$ să fie circumscriptibil dacă există relaţia

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Marius Iosifescu, Piteşti

1422. Să se arate pentru care valori reale ale lui x avem:

$$y=\frac{\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}}{\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}-\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}}=\frac{2a}{a-x}$$

şi pentru care valori reale avem $y=4-\dfrac{2a}{a-x}$ dacă radicalii sînt consideraţi cantităţi reale şi cu semnul respectiv dinaintea fiecăruia, a fiind un parametru diferit de zero.

C. Ionescu-Ţiu

1423. Se cere forma triunghiului în care

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{a-c}{a+c}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{a+c}{a-c}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}}=1$$

unde a, b, c, sînt laturile triunghiului.

Radu Stroe, elev, Ploeşti

1424. Fie H ortocentrul unui triunghi oarecare ABC; E şi F punctele în care înălţimile vîrfurilor B şi C întîlnesc cercul circumscris iar D punctul diametral opus lui A. Dreptele DE, DF, întîlnesc respectiv laturile AC, AB, în G şi I. Să se arate că punctele G, H, I sînt colineare.

Gabriel Şerb, elev, Piteşti

1425. Două oglinzi sferice concave sînt aşezate cu feţele concave faţă în faţă, axele lor fiind suprapuse. Distanţa între oglinzi este 60 cm, iar distanţele lor focale sînt respectiv 5 cm. şi 8 cm.

Să cere să se calculeze unde trebuie aşezat un punct luminos pe axă pentru ca imaginele reale produse prin reflexie pe oglindă să coincidă.

* * *

1426. Să se arate că

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)}+$$
$$+\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1,$$

unde, a, b, c, d, sînt numere diferite între ele.

Ion Cristea elev, Constanţa

1427. Se dă un triunghi echilateral ABC. Din vîrfuri ca centre se descriu cercuri care să fie tangente exterioare două cîte două.

Să se calculeze raza cercului înscris în unghiul A și tangent cercurilor cu centrele în B și C. Se cere și o construcție grafică.

C. Ionescu-Țiu

1428. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cunoscut, unghiul A este ascuțit și $AB > BC$. Dacă în sensul $ABCD$ se ia pe laturile AB, BC, CD, DA segmente egale $AE = BF = CG = DH = l$ se obține un paralelogram $EFGH$. Să se determine lungimea l astfel ca paralelogramul $EFGH$ să fie dreptunghiu sau romb și în acest caz să se exprime ariile acestora.

Andrei Dobrescu

1429. Calculînd rădăcinile ecuației $x^2 - 2x - 1 = 0$, să se demonstreze egalitățile

$$\operatorname{etg}\frac{\pi}{8} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{8}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{8} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} = 2.$$

G. Marinescu

1430. În cuptorul locomotivei ard 1,3 kg cărbuni pentru 1 CP/h. Consumul de abur la mașina de abur, în medie, este de 8 kg/CP/h. Să se calculeze randamentul cuptorului și al cazanului, dacă aburul sub presiune are temperatura de 200° ($r = 468$ kcal/kg). Temperatura inițială a apei este de 20°. Puterea calorifică a cărbunelui este de 7000 kcal/kg.

* * *

1431. *a*) Terasamentul căii ferate are o structură elastică. De ce șinele nu pot fi așezate pe un teren tare (dur), de ex. pe beton armat?

b) De ce la împușcătură glontele sparge în geam o gaură mică, iar aruncat cu mîna sparge geamul în bucăți?

c) Mișcarea caracatiței în apă este reactivă. Cum se explică aceasta?

* * *

1432. *a*) De ce la frînarea bruscă a unui automobil partea lui din față se lasă în jos?

b) Un pasager care șade lîngă peretele din dreapta al unui automobil ce se mișcă mai întîi uniform, s-a pomenit înghesuit în colțul canapelei? Ce schimbare s-a produs în mișcarea automobilului?

* * *

1433. *a*) Calul trage căruța, tractorul, plugul. Indicați corpurile și forțele cu acțiune reciprocă.

b) Omul merge pe pămînt. Indicați prin ce se manifestă în acest caz, acțiunea și reacțiunea.

* * *

1434. Un fluviu se varsă în mare prin două brațe. Pe fiecare braț la vărsarea în mare, este cîte un port. Lungimea brațelor este respectiv, de 96 și 75 km. O navă parcurge distanța de la un port la celălalt navigînd pe fluviu, atît la dus cît și la întors, în 9 ore. Viteza navei este 20 km/oră. Care este viteza curentului pe cele două brațe?

C. V. Costăchescu

1435. Să se rezolve ecuația,

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} + 2(x-1)\sqrt{x(x-1)} = 0$$

și apoi să se verifice soluțiile aflate.

C. Ionescu-Țiu

1436. Să se verifice identităţile,

$$\sin 4x + 2\sin 2x = 4\sin 2x \cos^2 x$$

$$-\sin 4x + 2\sin 2x = 4\sin 2x \sin^2 x$$

N. Mihăileanu

1437. Să se rezolve ecuaţia,

$$\frac{a}{b+x} + \frac{b}{a+x} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Verificare. Caz particular, $a = b$.

N. Mihăileanu

1438. Să se arate că pentru $0 < x < 45°$, avem:

$$\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x} = 2\cos x$$

şi pentru $45 \leqslant x \leqslant 90°$ avem

$$\sqrt{1+\sin 2x} + \sqrt{1-\sin 2x} = 2\sin x;$$

apoi să se reprezinte graficul funcţiei

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right)$$

pentru $-360° \leqslant x \leqslant 360°$.

C. Ionescu-Ţiu

1439. Se dă şirul $\frac{a+1}{a-2}, \frac{a+2}{a-3}, \ldots \frac{a+n}{a-n-1}, \left(U_n = \frac{a+n}{a-n-1}\right)$.

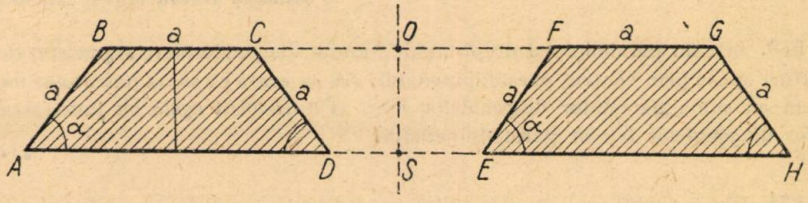
Să se arate că şirul cu termenul general

$$V_n = \frac{1}{U_n - U_{n-1}} - \frac{1}{U_{n-1} - U_{n-2}}$$

formează o progresie aritmetică.

Petru Minuţ, Piatra Neamţ

1440. O piesă de forma unui corp de rotaţie are secţiunea axială ca în figură; trapezele isoscele *ABCD*, *CDEF* şi *EFGH* sînt egale; baza mică are acelaşi lungime a ca şi fiecare din laturile neparalele; iar unghiul ascuţit este α. Să se afle volumul piesei în funcţie de a şi α. 2) Să se calculeze a în cazul cînd $\alpha = 60°$, dacă piesa cîntăreşte 762,68 grame în aer şi 664,90 grame în apă.



4) Înălţimea unui cilindru circular drept este egală cu diametrul cercului de bază, iar volumul exprimat în cm^3 şi aria totală a cilindrului în cm^2 sînt exprimate prin acelaşi număr. Care este raza cilindrului exprimată în mm?

5) Să se rezolve ecuaţia $\sin 5x - \sin 3x = \sin 7x$ şi să se afle valorile lui x cuprinse între 0° şi 360°.

(Examenul de maturitate 1954, cl. X-a, L. b. 10, Bucureşti)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E: 563. In trei biblioteci sînt 6309 cărţi. In prima bibliotecă sînt de trei ori mai multe cărţi decît în a doua şi încă o carte; în a treia bibliotecă sînt cu o carte mai puţin decît jumătate din numărul cărţilor din a doua bibliotecă. Cîte cărţi sînt în fiecare bibliotecă.

Aurel Lezeu, elev, Bucureşti

E: 564. Să se arate că,

$$(a+b)^3(x+y)^3 - (ax+by)^3 - (bx+ay)^3 = 3(a+b)(x+y)(ax+by)(bx+ay).$$

Gabriel Şerb., elev, Piteşti

E: 565. Să se rezolve sistemul de ecuaţii,

$$x^2(y^2+z^2) = 25; \quad y^2(z^2+x^2) = 153; \quad z^2(x^2+y^2) = 160$$

şi să se întocmească tabloul soluţiilor.

Ioanin Brezeanu, Timişoara

E: 566. Să se scrie în sistemul de numeraţie cu baza 8, numărul 1954 scris în baza 10. Acelaş număr să fie scris şi în baza 12.

* * *

E: 567. Să se calculeze cu trei zecimale exacte:

$$E = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\pi} \quad \text{unde} \quad \pi = 3{,}1415926\ldots$$

C. I. Ţ.

E: 568. Clasele a cincea ale unei şcoli au în total 116 elevi. In clasa V-a A sînt cu 5 elevi mai mult ca în clasa V-a C; iar clasa V-a B are 8 elevi mai puţin decît clasa V-a A. Cîţi elevi sînt în fiecare clasă. Se va figura judecata rezolvării.

* * *

E: 569. O barcă cu motor a coborît pe un rîu distanţa de 28 km şi apoi s-a înapoiat după 7 ore. Care este viteza bărcii pe o apă stătătoare ştiind că viteza rîului este de 3 km pe oră.

Mihaela Butoi, elevă, Bucureşti

E: 570. Intr-un paralelipiped dreptunghic numim diagonala mare segmentul ce uneşte două vîrfuri opuse prin centrul paralelipipedului. Să se arate că suma patratelor muchiilor este egală cu suma patratelor diagonalelor mari şi deasemeni egală cu jumătatea sumei patratelor diagonalelor feţelor paralelipipedului.

* * *

E: 571. După terminarea şcolii tehnice absolvenţii pleacă la practică. Un practicant lucrează la un loc cu muncitorul calificat. Pentru 12 zile de lucru ale muncitorului calificat şi 7 zile ale practicantului se plăteşte 334 lei; iar pentru 11 zile de lucru ale muncitorului şi 6 zile de lucru ale practicantului se plăteşte 302 lei. Cît se cuvine fiecăruia pentru 25 zile de lucru?

Gelu Juncu, elev, Roman

---

*) Clasa V-a (563, 568, 574, 575); Clasa VI-a (564, 566, 569, 571, 573); Clasa VII-a (565, 567, 570, 572).

E: 572. Să se calculeze cu aproximație de 1 : 1000 expresia:

$$\frac{14}{\sqrt{205}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

* * *

E: 573. Care este numărul în baza 10 care în baza 12 se scrie 1954. Același număr să se scrie în baza 8.

* * *

E: 574. De pe trei loturi s-au recoltat 160 tone grîu. Primul lot a produs de patru ori mai mult decît al doilea, iar al treilea a produs cît diferența între primul și al doilea lot. Cît s-a recoltat de pe fiecare lot?

Tatiana Ivănceanu, elevă, București

E: 575. Din Iași pleacă un om pe jos, spre Bălți, cu viteza de 5 km/oră și totodată, din Bălți pleacă altul cu căruța spre Iași, cu viteza de 9 km/oră; ei se întîlnesc la 20 km de mijlocul distanței Iași-Bălți. Care este lungimea drumului?

P. Grăjdeanu, Iași

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ 1954-1955

ÎN ATENȚIA TINERETULUI DIN ȘCOLI

În acest an școlar Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. organizează „Olimpiadele de Matematică și Fizică 1954-1955", la care pot participa elevii claselor VIII-X și școlilor medii, anii I-III ai școlilor pedagogice de învățători, anii I-II ai școlilor medii tehnice.

Olimpiadele se vor desfășura în patru etape:

1. Pe școală	matematică	22 XI—12 XII 1954
	fizică	22 XI—12 XII 1954
2. Locală (raională în orașul București)	matematică	20 II 1955
	fizică	27 II 1955
3. Regională	matematică	3 IV 1955
	fizică	10 IV 1955
4. Finală pe țară	matematică	2 V 1955
	fizică	3 V 1955

ELEVI, PARTICIPAȚI CU TOT ENTUZIASMUL TINEREȚII VOASTRE LA OLIMPIADELE ORGANIZATE DE SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

« OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI 1954 »

Organizată în acest an de Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., olimpiada de matematică pentru elevii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a, s-a bucurat de un deosebit succes la prima etapă, ale cărei probleme s-au difuzat în luna februarie a. c. Au trimis rezolvări un număr de circa 13.000 elevi din toate regiunile ţării redactate în limbile romînă, maghiară şi germană şi reprezentînd şcoli situate — în mare măsură — în mediul rural. Etapa a doua, ale cărei probleme au fost difuzate abia la sfîrşitul lunei mai, a ajuns în şcoli în preajma vacanţei sau chiar după luarea ei, aşa că numărul participanţilor a fost foarte redus (circa 700). Aceasta a împiedicat trierea participanţilor la olimpiadă după criteriul rezolvării în bune condiţiuni a majorităţii problemelor ambelor etape.

Rezultatele obţinute dovedesc un interes deosebit al elevilor, profesorilor, părinţilor pentru această olimpiadă. Numărul participanţilor este dublu faţă de cel din anul precedent, cu toate că numărul problemelor a fost sporit.

După îndepărtarea lucrărilor slabe, incomplete sau neserioase şi a acelora care în mod izbitor semănau (în special ale unor elevi aparţinînd aceleiaşi clase ale unor şcoli) au fost apreciate ca lucrări merituoase cele a 1314 elevi. Din acestea au fost selecţionate cele mai bune, pe baza numărului de probleme rezolvate, a calităţii soluţiei şi a felului de redactare.

Publicăm mai jos lista nominală, pe regiuni şi clase, a celor 290 cîştigători ai « Olimpiadei Tinerilor Matematicieni 1954 ».

Cercetînd repartizarea numărului de rezolvitori, de menţionaţi şi premiaţi pe regiuni, se poate aprecia că în frunte se situează: oraşul Bucureşti, (circa 1400 rezolvitori, 70 premiaţi), regiunea Ploeşti (1400 rezolvitori, 38 premiaţi), Regiunea Stalin (1200 rezolvitori, 33 premiaţi), regiunea Craiova (1000 rezolvitori, 32 premiaţi), regiunea Cluj (1000 rezolvitori, 15 premiaţi), regiunea Iaşi (800 rezolvitori, 20 premiaţi), apoi regiunile Suceava, Bacău, Constanţa, Bucureşti.

Rezultatele cele mai slabe au fost obţinute de regiunile: Baia Mare (300 rezolvitori), Oradea (400 rezolvitori), ambele fără premiaţi; Arad (300 rezolvitori, 1 premiat), Bîrlad (400 rezolvitori, 5 premiaţi), Hunedoara (400 rezolvitori, 6 premiaţi), urmate de regiunile Galaţi, Timişoara, Autonomă Maghiară, Piteşti.

Aceste rezultate este bine să stimuleze activitatea şcolilor şi elevilor lor, să determine o ridicare generală a nivelului studiului matematicii, să aducă rezultate mai bune la Olimpiadele din 1955.

Felicitînd pe premiaţii din acest an ai « Olimpiadei Tinerilor Matematicieni », le urăm *spor la muncă* de învăţătură şi producţie din viitor.

Premiaţii la « Olimpiada Tinerilor Matematicini 1954 »

REGIUNEA ARAD. *Clasa VII-a* : Harja Nicolae (Şcoala nr. 16, Arad).

REGIUNEA BACĂU. *Clasa V-a.* Chiriac Mihai (Filipeşti), Crivăţ Gabriela (Şcoala medie, Bacău,) Postolache Corneliu (Şcoala medie, Bacău), Kueric Traian (Şcoala nr. 11, Bacău); *clasa VI-a.* Ciocirvei Dorel (Şcoala nr. 11, Bacău.) Dobronăuţeanu Silviu (Şcoala medie, Bacău), Gervescu M. Ion (Roznov); *clasa VII a*: Biriş Sultana (Şcoala nr. 11, Bacău), Cocinev Iosif (Şcoala medie, Bacău), Creimer Iosif (Şcoala medie, Bacău), Dragomirescu Nicolae (Şcoala medie, Focşani), Timofte Alexandra (Şcoala nr. 1 fete, Piatra Neamţ).

REGIUNEA BÎRLAD. *Clasa V-a*: Călin Ioan (Baloteşti), Cojan Gheorghe (Găgeşti), Huzun Genova (Baloteşti); *clasa VI-a*: Vespan Florin (Şcoala medie, Tecuci); *clasa VII-a*: Micu Florica (Şcoala medie, Tecuci).

REGIUNEA BUCUREŞTI. *Capitala. Clasa V-a*: Adamache Valeriu (Şcoala nr. 4 băieţi), Chioreanu Vasile (Şcoala medie nr. 2 băieţi), Ciorănescu Ioana (Şcoala medie 2—10—13)

Codreanu Viorica (Şcoala 33 fete), Curiac Grigore (Şcoala 12 băieţi), Dini Petre (Şcoala medie nr. 2 băieţi), Dutescu Gheorghe (Şcoala medie nr. 5), Dumitrescu Sanda (Şcoala pedagogică nr. 2), Erlbaum Ilan (Şcoala 12 băieţi), Florescu Letiţia Şcoala 33 fete), Ghergu Marin (Şcoala nr. 12 băieţi), Lebădă Ioan (Şcoala medie 4—13), Lizoc Paul (Şcoala nr. 13 băieţi), Neubauer Erik (Şcoala medie nr. 5), Ogradnic Mihai (Şcoala nr. 12 băieţi), Petrescu Mihai (Şcoala nr. 4 băieţi), Popescu Mariana (Şcoala nr. 33 fete), Popa Doina (Centrul 5—7—8), Popescu Magda (Şcoala nr. 15 fete), Postelnicu Dan (Şcoala nr. 4 băieţi), Predoescu Marieta (Şcoala medie nr. 1 fete), Roman Cristina (Şcoala nr. 2 fete), Rudescu Alex. Şcoala nr. 12 băieţi), Runcan Simona (Şcoala nr. 18 fete), Sălăgeanu Simona (şcoala medie nr. 1 fete), Teodorescu Ana (Şcoala 18 fete); *Clasa VI-a*: Atanasiu Cornel (Şcoala medie nr. 1 băeiţi), Crivăţ Gabriela (Şcoala medie nr. 3 fete), Guran Vasile (Şcoala medie nr. 14 băieţi), Mureşan Violeta (Şcoala nr. 15 fete), Niculescu Miron (Şcoala medie nr. 6 băieţi), Niculescu Romulus (Şcoala nr. 12 băieţi), Săvulescu Constantin (Şcoala medie nr. 7 băieţi) Tohăneanu Florin (Şcoala nr. 12 băieţi), Toloescu Alexe (Şcoala medie 4—13), Trifu Vasile (Şcoala medie nr. 14 băieţi); *Clasa VII-a*: Bădescu Sanda (Şcoala nr. 18 fete), Butoi Mihaela (Centrul şcolar 2—10—13, fete), Borza Doina (Şcoala nr. 15 fete), Ciapîru Mihai (Şcoala medie nr. 2 băieţi), Cîrstoiu Ligia (Centrul şcolar 2—10—13 fete), Cernea Iuliana (Şcoala nr. 18 fete), Crăciulescu Marcel (Şcoala medie nr. 4 băieţi), Dini Nicolae (Şcoala medie nr. 2 băieţi), Ene Rodica (Şcoala nr. 15 fete), Enescu Cornelia (Şcoala nr. 29 fete), Gavrilescu Ştefan (Şcoala nr. 19 băieţi), Grigorescu Ştefan (Şcoala medie nr. 5 băieţi), Horlescu Paul (Şcoala nr. 7 băieţi), Lungu Dodu Decebal (Şcoala mixtă nr. 10), Luchian Ion (Şcoala medie nr. 2 băieţi), Micu Constantin (Şcoala medie nr. 4 băieţi), Micuţ Corneliu (Şcoala medie), Mihail Marina (Şcoala nr. 3 fete), Popescu Georgeta (Şcoala nr. 15 fete), Popescu Doina (Şcoala nr. 15 fete), Popa Mircea (Şcoala nr. 50 băieţi), Petrescu Viorica (Şcoala medie 2—10—13 fete), Petrescu Ana Maria (Şcoala nr. 18 fete), Rădulescu N. Traian (Şcoala medie nr. 4 băieţi), Scherzu Edgar (Şcoala nr. 2 băieţi), Simion Mariana (Şcoala nr. 15 fete), Stoenescu Ileana (Şcoala nr. 18 fete), Voinarovski Mihai (Şcoala medie nr. 4 băieţi). Voiculescu Mihai Şcoala nr. 50 băieţi).

REGIUNEA BUCUREŞTI. *Clasa V-a*: Cristea Ioana (Măldăreni). Lazăr Nicolae (Băneasa); clasa VI-a: Dobrică Marin (Gogoşari), Grama Marin (Gogoşari), Jîlavu Anca (Măldăreni); *clasa VII-a*: Albu Aurel (Vasile Roaită), Bădilă Mihai (Şcoala medie, Giurgiu). Ioniţă Maria (Afumaţi) Melani Margareta (Turnu Măgurele). Tincu Valeria (Şcoala medie Giurgiu). Chiţilna Eustaţiu (Chitila), Weber Ingl (Roşiorii de vede).

REGIUNEA CLUJ. *Clasa V-a*: Bogdan Eugenia (Pogăceana), Costin Maria (Şcoala nr. 1 Aiud), Mihaifaloi Maria (Pogăceana), Mulea Paraschiva (Aiud), Orlavscki Georgeta (Şcoala nr. 1, Turda), Rusu Horaţiu (Şcoala medie nr. 3, Cluj), Soşa Domnica (Şcoala nr. 1, Aiud); *Clasa VI-a*: Duca Paulina (Ocna Mureş), Duna Dorel (Şcoala nr. 1 Aiud), Radu Mariana (Şcoala elementară Bistriţa), Vrăjitoru Mihai (Şcoala nr. 1 Aiud); *Clasa VII-a*: Gross Ioan (Chiochiş), Guţă Viorel (Pogăceana), Jucan Irina (Apahida), Podaru Adolfina (Cara).

REGIUNEA CONSTANŢA. *Clasa V-a*; Coltachia Dumitru (Şcoala nr. 2 Constanţa), Madracenco Cornel (Şcoala nr. 2 băieţi, Constanţa), Piciu Maria (Şcoala nr. 13 fete, Constanţa) Rădulescu Aron (Şcoala medie, Cernavodă); *Clasa VII-a*: Bădici Maria (Şcoala nr. 13 fete Constanţa), Blidaru Schwartz Georgeta (Tekirghiol), Casian Vasilica (Şcoala nr. 12 Constanţa), Ghinea Oprina (Şcoala nr. 12 Constanţa), Popa Marica (Kogălniceanu), Samoilă Aneta (Şcoala nr. 12 Constanţa, Zastran Ştefania (Istria).

REGIUNEA CRAIOVA. *Clasa V-a*: Angelescu Mircea (Şcoala medie nr. 2 Craiova), Buda Vasile (Şcoala nr. 1 băieţi Turnu Severin), Constantinescu Doina (Osica de sus). Costache Nicolae (Vînjuleţ), Dan Eugenia (Osica de sus). Dobrescu Antoaneta (Şcoala nr. 6 fete Craiova), Florescu Teodora (Şcoala nr. 6 fete Craiova), Goişan Ion (Şcoala nr. 1 băieţii Turnu Severin), Gheorghe Elena (Şcoala nr. 6 fete Craiova), Iacob Mihail (şcoala nr. 1 băieţi Turnu Severin),

Ivănuş Ana (Lăcusteni), Mateescu Adrian (Lăcusteni), Nanu Elisabeta (Osica de sus), Popescu Rodica (Şcoala nr. 6 fete Craiova), Surdulescu Barbu (Şcoala nr. 1 băieţi Turnu Severin), Tracă Elena (Murgaş), Velicescu Mircea (Tîrgu Jiu); *Clasa VI-a*: Brînzaru Ştefan (Goicea Mică), Dudu Corneliu (Şcoala nr. 6 Craiova), Gheorghinescu Dorin (Borăscu), Scăunaş Maria (Şcoala 8 Mixtă Craiova), Stănescu Georgeta (Şcoala 8 mixtă Craiova), Stăvaru Iosefina (Dărvari); *clasa VII-a*: Bencea Ştefan (Siminicul de sus), Dobrică Angela (Osica de sus), Ionescu N. Constantin (Ţiu), Ivan Gheorghe (Osica de sus), Niculescu Stelian (Stoeneşti), Pohonţ Valeriu (Borăscu), Radulian Ileana (Şcoala medie de fete Craiova), Tănase Aurel (Osica de sus), Tuiu Rodica (Osica de sus).

REGIUNEA GALAŢI. *Clasa V-a*. Diaconescu Mihai (Şcoala 3 băieţi Galaţi), Popescu Dumitru (Şcoala medie băieţi Galaţi), Rădulescu Alexandru (Şcoala 4 băieţi Galaţi); *clasa VI-a*: Butuc Gigel (Şcoala 4 băieţi Galaţi), Grosu Gheorghe (Şcoala medie Galaţi); *clasa VII-a*: Popescu Aurelia (Şcoala nr. 4 fete Brăila).

REGIUNEA HUNEDOARA. *Clasa V-a*: Breaznic Nicolae (Miholţ), Maşek Corneliu (Crisciov), Oproiu Anca (Şcoala elementară Petroşani). Trandaf Paul (Cut-Sebeş); *clasa VII-a*: Gotlieb Nemi (Şcoala elementară Deva), Mandel Robert (Şcoala nr. 2 Alba Iulia). Haiduc Gheorghe (Dobra).

REGIUNEA IAŞI. *Clasa V-a*: Anghel Mircea (Şcoala nr. 2 medie Iaşi), Afimescu Elena (Şcoala nr. 4 Roman), Atanasiu Adrian (Şcoala nr. 1 fete Iaşi), Bordugean Avram (Şcoala medie nr. 5 Roman), Carp Cornel (Frumuşica), Cernoianu Dan (Şcoala medie nr. 2 Iaşi), Damaschin Luminiţa (Şcoala medie fete Iaşi), Hristea Vasile (Şcoala nr. 4 Roman), Iancov Victoria (Şcoala medie nr. 1 fete Iaşi), Paulescu Dan (Şcoala medie nr. 2 Iaşi), Popa Victor (Şcoala medie nr. 2 Iaşi), Popirceanu G. (Şcoala medie nr. 2 Iaşi), Simiuc Florentina (Şcoala nr. 2 fete Iaşi); *clasa VI-a*: Condrea Vasile (Şcoala medie nr. 2 Iaşi), Locovei Ioan (Şcoala medie Huşi), Manu Gheorghe (Şcoala medie nr. 2 Iaşi); *clasa VII-a*: Homitescu Adrian (Şcoala medie nr. 2 Iaşi), Popescu Claudian (Şcoala medie nr. 2 Iaşi), Tibuleac Florin (Şcoala medie Hîrlău), Ungureanu Alexandru (Şcoala medie nr. 2 băieţi Iaşi). Botezatu Romică (Voineşti), Butacu Geta (Lic. nr. 2 fete Iaşi), Fotea Mircea (Voineşti).

REGIUNEA AUTONOMĂ MAGHIARĂ. *Clasa V-a*: Barna Magdalena (Pişcol-Săcueni), Sabău Traian (Şcoala medie Tîrgu Mureş), Vergh Alexandru (Şcoala medie Tîrgu Mureş); *clasa VI-a*: Laszlo Magda (Şcoala elementară Remetea), *clasa VII-a*: Domocoş Imre (Şcoala Sublacul de Bărgău), Sfetcu Lucia (Şcoala medie Tîrgu Mureş).

REGIUNEA PITEŞTI. *Clasa V-a*: Ilasievici Viorela (Şcoala medie Piteşti); *clasa VI-a*: Bică Constantin (Şcoala medie băieţi Piteşti), Iscariu Liviu (Găeşti), Nanu Rodica (Şcoala medie de fete Piteşti); *clasa VII-a*: Bebu Ecaterina (Buzeşti), Comandoru Minodora (Esina, Găeşti), Ghinea L. (Cîmpulung Muscel), Radu Dumitru (Buzeşti), Şerban Viorela (Şcoala medie fete Cîmpulung Muscel).

REGIUNEA PLOEŞTI. *Clasa V-a*: Angelescu Elisabeta (Şcoala 2 fete Rîmnicu Sărat), Alexandrescu Mircea (Şcoala 8 Ploeşti), Dinu Maria (Scăeni), David Aurora (Cîrpinişa), Frînculescu Luiza (Cislău Măgura), Gabor Rodica (Azuga), Grigore Sonia (Puchenii mari), Ghinescu Elena (Scăeni), Jipa Maria (Puchenii mari), Iosif Angela (Şcoala medie Tîrgovişte), Iovulescu Nicoleta (Şcoală medie de fete Ploeşti), Mîndricel Dumitru (Şcoala medie «I. L. Caragiale» Ploeşti), Negrea Mihai (Şcoala medie «I. L. Caragiale» Ploeşti), Puică Margareta (Cislău Măgura), Rosenberg Teodor (Şcoala medie «I. L. Caragiale» Ploeşti); *clasa VI-a*: Cîrnu Mircea (Şcoala medie Tîrgovişte), Zaharescu Maria (Buşteni); *clasa VII-a*: Constantin Vasile (Văleni), Deleboş Constantin (Şcoala medie Ploeşti), Dincă Ion (Şcoala nr. 6 Ploeşti), Dan Mirica (Pogoanele) Dinu Florica (Scăeni), Frăţilă Radu (Şcoala nr. 1 băieţi Cîmpina), Florescu Mihai (Şcoala, nr. 1 Cîmpina), Grand Zinca (Valea Călugărească), Libalis Dan (Şcoala nr. 5 Ploeşti), Mincă Ioan (Şcoala nr. 6 Ploeşti), Mihai Radu (Şcoala

nr. 7 Ploești), Neagu Lucia (Dărîmați), Niculescu Mihai (Comarnic), Nicolescu Mihai (Școala nr. 6 Ploești), Suciu Tita (Valea Călugărească), Stamatescu M. (Școala nr. 7 Tîrgoviște), Turturică Ioan (Cîmpina), Testiban Elena (Diteşti), Tudor Adrian (Școala nr. 1 băieți Cîmpina).

REGIUNEA STALIN. *Clasa V-a*: Bădilă Mariana (Școala nr. 6 fete Sibiu), Bălteanu Gabriela (Școala nr. 9 fete Orașul Stalin), Binder Erico (Școala pedagogică Sighișoara), Bleşek Zoltan (Școala medie magiară Orașul Stalin), Bot Mihaly (Școala medie maghiară Orașul Stalin), Buzea Cătălin (Școala medie băieți Orașul Stalin), Barbu Ovidiu (Școala medie băieți Orașul Stalin), Chişu Emil (Școala nr. 1 Sibiu), Cosman Alexandru (Școala nr. 1 Sibiu), Craioveanu Mircea (Sibiu), Cristoloveanu Viorica (Școala nr. 4 Orașul Stalin), Catelnicu Ioan (Școala nr. 9 fete Orașul Stalin), Deceanu Silvia (Școala medie fete Sibiu), Gutt Hermina (Seleuş), Horst W. (Școala elementară Mediaş), Piticaş Gheorghe (Școala nr. 3 Făgăraş), Popa Ioan (Școala nr. 8 Sibiu), Schuller Klauss (Școala pedagogică Sighişoara), Stupan Mircea (Copşa Mică), Teleman Ileana (Școala medie fete Sibiu), Veprich Reghine (Seleuş); *clasa VI-a*: Iacubovici Sandu (Școala nr. 9 Orașul Stalin), Lupescu Horia (Școala nr. 9 Orașul Stalin), Mening Hilda (Școala germană Seleuş), Paul Wilhelm (Școala germană Seleuş); *clasa VII-a*, Cîmpeanu Valer (Bazna), Geznek Kurt (Școala medie maghiară Orașul Stalin), Hidaş Silvia (Școala medie Făgăraş), Medianu Stelian (Școala medie germană Orașul Stalin), Miulescu Paul (Ucea), Mirea Florentina (Școala medie fete Orașul Stalin), Pop Maria (Școala medie fete Sibiu), Stănilă Ioan (Școala medie băieți Sibiu).

REGIUNEA SUCEAVA. *Clasa V-a*: Cocoreanu Victor (Școala medie Cîmpulung Moldovenesc), Corduneanu Mariana (Școala nr. 2 Botoşani), Florea Maria (Cristineşti), Guleac Bogdan (Ilieşti); *clasa VII-a*: Adamniței Victor (Ilieşti), Anisturzoaia Alex. (Școala medie băieți Botoşani), Arion Adrian (Școala medie băieți Botoşani), Apetrei Lidia (Fundul Moldovei), Gherman Cornelia (Școala nr. 3 Botoşani), Ionescu Cristina (Bucecea), Ivan Dumitru (Bucecea), Mogdici Ioan (Școala nr. 2 Botoşani), Ott Iulian (Ilieşti), Petracovici Oleg (Bosanci), Rusu Dan (Strubeni), Tănase Niculae (Bucecea), Vițlovec Ioan (Gura Humorului).

TIMIŞOARA. *Clasa V-a*: Boteanu Iacob (Școala nr. 3 Lugoj), Mann Ingrid (Jimbolia); *Clasa VII-a*: Doba Dumitru (Școala medie băieți Lugoj), Glod P. (Școala nr. 3 Lugoj), Lăpugean Petru (Marginea), Măgureanu Ana (Buziaş).

Fiecare premiant va comunica adresa la care doreşte să primească abonamentul pe anul 1955 la *Gazeta Matematică şi Fizică seria B* pentru tineret, *abonament obținut ca premiu*, (în ediția romînă sau maghiară) trimițînd o carte poştală pe adresa: Societatea de Ştiințe Matematice şi Fizice din R.P.R., *str. Spiru Haret*, 12, *Bucureşti XII*.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

EVIDENȚIAȚI

Pînă la 1 octombrie 1954 s-au mai evidențiat următorii rezolvitori de probleme:

Cristea I. Ion (clasa X-a, Constanța), *Bacalu Ioan* (anul III, s.t.c.a, Roman), *Serb G. Adrian* (clasa X-a, Pitești), *Rus A. Ioan* (clasa X-a, Oradea), *Berechet M. Oprea* (clasa X-a, L.b.5, Aucureşti), *Bărbuică C. Nicolae* (anul IV, Şcoala electrotehnică, Craiova), *Bătineţu Dumitru* (student, Bucureşti), *Gervescu M. Ion* (clasa VII-a. Roznov—Piatra Neamț), *Dabija Sorin* (student, Bucureşti), *Stoian I. Gheorghe* (clasa X-a, Tîrgoviște), *Petcu I. Dumitru* (student, Bucureşti), *Lambă Stelian* (anul IV, Constanța), *Pandrea Nicolae* (student, Bucureşti), *Tomescu C. Dan* (clasa X-a, L.b.3, Bucureşti), *Bogaciu P. Valeriu* (clasa X-a, Pitești). *Zigulescu D. Marin* (student, Bucureşti), *Vrăjitoru Dan* (Aiud), *Guiaşu Sitviu* (clasa X-a, Oradea), *Teodorescu Ştefan* (clasa X-a, Ploeşti). *Stănescu Viorel* (clasa X-a, Vaslui).

* * *

Pînă la 1 *octombrie* 1954 s-au mai primit cel puțin cîte *zece soluții bune*, probleme propuse (P), note (N) şi articole (A), dela următorii rezolvitori:

AGNITA (Cincul) — Schauerman Nicolae (1274, 276, 284, 286, 288, 289, 290, E: 481—500, 502—505, 508, 510, 515, 518, 519, 521, 522, 523, 524, 526, 528—533).

AIUD — Vrăjitoru Dan (1259, 263, 269, 290, 291, 292, 293, 294, 297, 299, 300, 301, 302, 306, 310, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 322, 323, 326, 333, 334, 335, 336, 337).

ARAD — Absolvent. Ponta Titus (1124, 126, 127, 128, 148, 149, 151, 152, 159, 161, 204, 218 E: 386, 387, 389, 390, 394, 396, 402, 406). Şcoala pedagogică de băieți, anul II. Dîrlea Ştefan (1257, E: 460, 479, 481, 499, 503, 524, 528, 529, 532).

BACĂU — Clasa IX-a. Boboc I. Mihai (1084, 89, 95, 98, 118, 127, 148, 152, 165, 183), Merticaru V. Vasile (1249, 252, 253, 261, 274, 277, 288, 303, 306, 342), Tigăeru Gheorghe (1084, 93, 118, 127, 148, E: 371, 373, 380, 389, 390, 391, 397, 398, 447, 452). Şcoala medie tehnică de construcții, anul III. Stanciu Pavel (1081, 183, 222, 239, 242, 245, 246, 252 254, 261).

BAIA MARE — Mustea Ionel (1200, 205, 207, 212, 240, 241, 242, 243, 245, 247).

BALŞ (Craiova) — Clasa IX-a. Cosăcescu Florentina (E: 473, 489, 497, 499, 502, 504, 508, 510, 526, 530, 531).

BÎRLAD — Clasa IX-a. Pavel N. Constantin (1253, 315, 317, 337, E: 471, 475, 479, 481, 482, 505, 518, 519, 523, 526, 531).

BOTOŞANI — Clasa V-a. Ochişor Constantin (E: 418, 452, 426, 427, 428, 229, 430, 431, 432, 433); clasa IX-a Grigoraş Marina (1342, E: 472, 483, 499, 505, 508, 526, 530), Furtună Margareta (1276, E: 457, 458, 460, 466, 481, 482, 483, 484, 490, 497), Lachi Iulia (E: 433, 457, 471, 481, 490, 499, 505, 526, 528, 530), Nathansohn Ada (E; 457, 471, 481 490, 491, 499, 505, 526, 528, 530); clasa X-a. Ciofu Fevronia (1252, E: 460, 471, 479, 482, 488, 490, 497, 499, 505), Iacobsohn Clara (E: 460, 471, 472, 475, 479, 482, 490, 497, 499, 505), Schwartz Mina (1251, 252, E: 457, 460, 478, 479, 482, 488, 490, 499, 505).

BOLINTINUL DIN VALE (Bucureşti) — Clasa X-a. Stoian M. (1297, 314, 315, 316, E: 505, 508, 510, 511, 512, 519).

BRAD — Şcoala medie tehnică de minereuri, anul III. Lupei Voicu (1220, 221, 222 231, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247), Vaida Alexandru (1221, 231, 232, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247).

BUCUREŞTII — Studenți anul I, Bătineţu M. Dumitru (1200, 202, 204, 207, 212, 214, 218, 221, 224, 225, 230, 231, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 253, 255, 259, 260, 261, 266, 269, 271, 273, 274, 275, 277, 276, 286, 288, 289, 290, 291, 310, 312, 316, P),

Corban Adrian (1216, 217, 221, 222, 225, 239, 241, 243, 244, 254, P), Dabija Sorin (1117, 121, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 139, 140, 142, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 154, 155, 157, 159, 161, 165, 166, 167, 173, 174, 175, 179, 181, 182, 183, 185, 186, 187, 190, 191, 193, 195, 196, 202, 203, 209, 216, 219, 220, 221, 224, 229, 230, 231, 233, 240, 245, 246), Pandrea Niculae (facultatea de mecanică) (1250, 251, 252, 255 256, 259, 260, 266, 267, 268, 269, 273, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 287, 288, 289, 290, 291, 303, 310, 320, 322, 325, 326, 328, 338, 339, 240), Petcu I. Dumitru (facultatea energetică) (1214, 216, 217, 219, 221, 224, 230, 231, 232, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 253, 254, 255 256, 261, 263, 269, 272, 297, 304, 306, 312, 315, 316, 317, 318, 319, 335, 336), Vasilescu Constantin (1273, 274, 275, 277, 278, 289, 290, 291, 292, 293, 297, 303, 306, 310), Zigulescu D. Marin (1251, 258, 259, 261, 265, 266, 269. 272—278, 280, 282, 283, 286, 287, 288, 293, 297, 301, 302, 303, 310, 312, 316, 333, P), Manea Marin (Facultatea electrotehnică minieră) (1227, 231, 232, 261, 273, 275, 278, 288, 303, 304, 312, 314, 315, 316, 319, 320, 340, 342, E: 478, 505, 508, 510, 513, 518, 519, 520, 521, 523, 526).

LICEUL 6 FETE. Clasa IX-a. Nicolau Ileana (1252, 254, 255, E: 457, 469, 471, 475, 480, 528, 531).

ŞCOALA ELEMENTARĂ 11 FETE. Clasa VI-a. Pădureţ Victoria (1315, 316, 317, E: 505, 510, 515, 519, 520, 522, 523, 526, 527, 528, 529, 530, 532).

LICEUL 2 BĂIEŢI. Clasa VIII-a. Duduica Radu (1233, 255, 273, 306, E: 475, 477, 478, 495, 502, 505).

LICEUL 6 BĂIEŢI. Clasa IX. Popovici I. Radu (1249, 277, 290, 306, 310, 315, 342, 354, E: 478, 496, 522, 523, 524, 526, 527, 529, 531, 532, 533, 534, 535, 537, 539, 540, 541, 546, 417).

LICEUL „AUREL VLAICU". Clasa VIII-a. Draica Constantin (1252, 274, 286, 310, E: 471, 473, 373, 376, 379, 380, 505, 508, 511, 515, 521,); clasa IX-a. Petre T. Tudor (1306, E: 471, 473, 478, 382, 494, 521, 524, 526, 530); clasa X-a. Anastasiu Gh. (1277, E: 505, 521, 523, 524, 528, 529, 530, 532, 533); Bădescu Marcel (1128, 149, 165, 175, 220, 221, 239, 240, 241, 242, 244, 245, 246, 247, 273, 275, 277, 303, 306, 310), Dinescu Radu (1240, 244, 246, 276, 277, 286, 288, 289, 290, 292, 303, 306, 323, E: 523, 527), Dumitrescu Badea Ovidiu (1227, 233, 241, 242, 244, 246, 247, 276, 277, 282, 303, 310, 323, 337, 335, 336, E: 471, 479, 482, 490, 505, 527), Georgian Dan (1277, 288, 292, 306, 310, 320, 323 333, 339, 342, E: 505, 510, 511, 523, 526, 528, 529, 532), Ghiţescu Liviu (1243, 245, 273, 274, 276, 277, 278, 286, 334, E: 482, 497, 540), Iovan Dumitru (1143, 165, 166, 167, 169, 173, 175, 179, 183, 185), Petre T. Petre (1261, 277, 288, 306, E: 482, 488, 490, 505, 518, 519, 521, 523, 524, 526, 528, 529, 530), Stănăşilă N. Octavian (1240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 255, 276, 277), Sandu Gh. Ion (1249, 256, 257, 261, 263, E: 473, 373, 376, 377, 378, 379), Voicu Constantin (1261, 277, 288, 306, E: 478, 479, 497, 505, 510, 521, 524, 526, 528, 530, 532), Viscopoleanu Octavian (1261, 277, 288, 303, 306, E: 471, 510, 523, 524, 530).

ŞCOALA 11 BĂIEŢI. Clasa VI-a. Bogdan Alecu (E: 425, 428, 429, 434, 435, 437, 442, 460).

Şcoala medie de măsurători terestre. Anul III. Maftei Nicolae (1290, 292, 306, 315, 316, 317, 318, E: 505, 506, 510, 518, 519, 521). Anul I. Văduva Ion (1216, 217, 231, 243, E: 452, 454, 457, 481, 482, 484).

Şcoala medie tehnică de metrologie. Anul IV. Fîntîneanu Mihaela (1267, E: 471, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480).

CALAFAT. Clasa X-a. Mitroaica I. Gheorghe (1260, 261, 262, 263, 265, 266, 273, 274, 275, 277, 278, 284, 285, 286, 290, 291, 323, 325, 333, 338, 339, 340, 342, E: 473).

CALARAŞI. Şcoala medie de mecanizarea agriculturii. Anul II. Petrovici Gheorghe (1252, 288, 292, 316, E: 457, 460, 463, 471, 475, 476, 479, 1481, 482, 490, 494, 499, 505,

510, 512, 519, 521); clasa X-a liceu. Duda Gh. Nicolae (1252, 261, 288, E: 471, 475, 482, 483, 490, 532).

CIMPINA. Şcoala medie tehnică de petrol. Anul III. Doboş Maria (1239, 240, 241, 242, 243, 245, 247, 248, 249, 252, 254, 261, 265, 273, 275, 276, 278, 286, 287), Enăchescu Stoian (1193, 194 201, 203, 209, 239, 240, 241, 242, 245,) Floare C. Gheorghe (E: 412, 418, 447, 454, 460, 470, 502, 503, 505, 508, 510, 518, 521).

CARANSEBEŞ. Absolvent Mitrofan Gheorghe (1249, 250, 252, 254, 255, 256,261, 263, 269, 274, 275, 276, 278, 284, 286, 287, 289, 290, 292, 293, E: 471, 273, 277,279, 280, 281, 283, 286, 290, 297, P).

CERNAVODA. Clasa IX-a. Birda Tiberiu (1315, 317, E: 471, 475, 479, 488, 497, 499, 505, 518, 519), Tănase Vasile (1252, 310, E: 471, 475, 479, 488, 497, 499, 505. 519),

CLUJ. Clasa IX-a. Farcaş Beniamin (E: 449, 455, 457, 459, 488, 497, 498, 502, 526. 529); clasa X-a. Mălai Marius (1275, 278, 282, 293, 297, 306, 315, 317, 319, E: 481, 485, 486, 488, 489, 491, 499, 519, 520). Anul II facultatea muncitorească. Pistol Nicolae (1216 248, 252, E: 460, 473, 479, 482, 488, 490, 493, 505, 511).

CONSTANŢA. Clasa X-a. Cristea I. Ion (1248—261, 263—269, 271, 273—282, 284, 286, 287, 289—293, 301, 302, 303, 306, 309, 310, 313, 314, P). Şcoala hidrotehnică. Anul II. Stepan Ionel (1257, 258, 259, 260, 261, 263, 264, 265, 266, 267, 269, 272, E: 471, 472, 473, 474, 476, 477, 478, 479, 480,). Anul IV. Lambă Stelian (1250—256,260, 263, 268, 275, 276, 278, 280, 287, 289, 291, 292, 293, 297, 301, 302, 306, 312, 313,316, 325, 330, 333, 342).

CRAIOVA. Şcoala medie electrotehnică. Anul III. Bărbuică C. Nicolae (1248, 252, 253, 254, 255, 265, 257, 260, 261, 263, 266, 272, 273, 274, 277, 278, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 294, 296, 297, 301, 302, 303, 306, 310, 312, 314, 320, 326, 323, 333, 339, 340, 342, P), Chitucea Eugen, (1252, 297, 303, 306, 316, 320, 326, 327, 339, 342, E: 481, 482, 505, 508, 526, 527, 530, 531); clasa X-a. Trifan Vasile (1297, 301, 310, 315, E: 490 494, 505, 510, 512, 519).

CURTEA DE ARGEŞ Şcoala medie silvică. Anul III. Stan Dumitru (1240, 245, 246, 247, 269, E: 457, 471, 475, 501, 510): clasa IXI-a liceul mixt. Prisiceanu I. Margaretă (1252, 273, 297, 316, 317, E: 476, 477, 470, 471, 475); clasa X-a. Dumitrescu I Aurel (1252, 256, 261, 267, 273, 275, 297, 304, 314, 316, 317, E: 473, 476, 477, 479, 503, 505, 514), Preda I. Adrian (1252, 256, 261, 267, 273, 275, 297, 304, 314, 317 E: 473, 476, 477, 479, 505, 508, 514).

FOCŞANI. Clasa IX-a. Cristea Aurel (1253, 256, 259, 261, 265, 266, 272, 275, 276, 277, 301, 306, 315, 316, 317, 318, 319); clasa X-a. Anghel P. Mihai (1315, 316, 317, 318, 319, E: 471, 479, 488, 505, 519, 521, 532, 526), Ţiru Emil (1315, 316, 317, 318, 319, E: 471, 479, 505, 521, 523, 532). Şcoala profesională industria lemnului din Gugeşti. Anul II. Munteanu C. Nicolae (E: 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 435, 436, 437, 441, 442, 443).

GALAŢI. Şcoala militară medie de marină. Clasa X-a Digan S. (1245, 248, 252, 255, 259, 261, 294, 297, 316, 319).

GIURGIU. Clasa IX-a. Stăncescu Emil (1315, 316, E: 505, 510, 519, 529, 522, 528, 530, 532).

HIRLAU (Iaşi). Clasa VIII-a. Tibuleac Florin (E: 472, 473, 474, 476, 508, 511, 512, 524, 528, 532).

(va urma)

C. 1272. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

E 1426
d

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institut. de documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Trăiască scumpa noastră patrie
Republica Populară Romînă!

Anul V — decembrie 1954

12

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)
(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)
Anul V, Nr. 12 — decembrie 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Despre cercurile de matematică şi fizică în şcoli*	457
2.	*Despre geometria numerelor de I. Maurer*	461
3.	*Construcţia şi gradarea unui ampermetru de V. Pavlu*	473
4.	*Despre unele proprietăţi ale funcţiilor omografice, prelucrare de A. Pop*	477
5.	*Probleme rezolvate (1189, 1194, 1195, 1196, 1197, 1198, 1199, 1201, 1206, 1210)*	481
6.	*Probleme propuse (1441—1468)*	487
7.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de 7 ani (E : 576 — E : 590)*	491
8.	*Din experienţa cercului de matematică şi fizică al Oraşului Stalin*	492
9.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	494
10.	*Tabla de materii a G.M.F.—B. Anul V (1954)*....	499

ANUL V. 12 DECEMBRIE 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ
(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Spiru Haret, 12 — Tel. 4.46.53 — Bucureşti XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi de fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

ANUL V * Nr. 12 decembrie 1954

TULAJDONA

DESPRE CERCURILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN ŞCOLI

TINERETUL din şcoli, eliberat de influenţa şcolii burgheze, s-a dezvoltat sub soarele democraţiei populare, care i-a pus la dispoziţie toate mijloacele înaintatei experienţe a şcolii sovietice şi a şcolii noastre. Învăţămîntul cu conţinut realist ştiinţific din şcolile noastre, urmăreşte făurirea unor cadre capabile să construiască cu succes socialismul şi apoi, comunismul. In acest cadru al învăţămîntului, un loc de frunte îl au ştiinţele fizico-matematice. Numărul mare de ore afectate pentru studiul lor, numărul mereu în creştere al cadrelor didactice bine pregătite, ca şi al laboratoarelor înzestrate cu materialul didactic necesar, numărul mare de manuale şcolare şi culegeri de probleme ca şi lucrările auxiliare, au contribuit şi contribuie din plin la dezvoltarea învăţămîntului matematic din şcoli. La aceasta se adaugă munca susţinută din ce în ce mai amplă a elevilor în afara orelor de clasă. Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice s-a preocupat să ajute elevii şi cadrele didactice în munca lor de bază, aceea pe care o duc zi de zi în şcolile de toate gradele. « Gazeta Matematică şi Fizică » seria A, cît şi « Revista Matematică şi Fizică » devenită azi « Gazeta Matematică şi Fizică » seria B, au contribuit prin articolele lor şi prin probleme, la ridicarea nivelului profesorilor şi elevilor. In munca lor în afara orelor de clasă, elevii au muncit intens rezolvînd sute de probleme pentru R.M.F. şi G.M.F.-B, ei au participat într-un număr impresionant la « Olimpiadele matematice » organizate de Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. E destul să arătăm că la concursurile fostei « Gazete Matematice »; din timpul şcolii burgheze participarea era de cîteva zeci de elevi, iar la « Olimpiadele » organizate de Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice participarea a fost de mii de elevi, ca să ne dăm seama de saltul pe care l-a făcut şcoala în această direcţie. Realizările sînt mari, dar există şi multe lipsuri. Parte din ele au fost arătate în articolul care analizează rezultatele « Olimpiadei 1954 » (v.G.M.F.—B nr. 6). Nu putem trece uşor peste aceste lipsuri, nu trebuie să ne ameţească succesele obţinute pînă în prezent.

O formă de activitate în afara orelor de clasă, aceea din cercurile de matematică şi de fizică din şcoli, nu a avut dezvoltarea dorită de noi.

Cercuri de matematică s-au deschis în multe şcoli din ţară, iar în unele oraşe ca la Bucureşti, Bacău, Iaşi, Sibiu, Arad, etc. au funcţionat cercuri pe oraş. Ele sînt însă, prea puţine. Socotim că forma de activitate a cercurilor de matematică şi fizică, aşa cum reiese din experienţa cercurilor sovietice, poate contribui şi mai mult la o pregătire temeinică de specialitate a tineretului şcolar din patria noastră; această pregătire se va reflecta apoi, în felul cum vor lucra cadrele instruite în şcolile tehnice şi teoretice.

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. socoteşte că este necesar să se treacă la organizarea a cît mai multe cercuri de matematică şi de fizică în şcoli, cît şi pe oraşe. Necesităţile actuale: cererea de cadre tehnice, de profesori, exigenţa din ce în ce mai mare pentru un nivel mai înalt de cunoştinţe şi condiţiile create: publicaţiile existente, numărul în creştere al cărţilor de matematică şi de fizică editate în limba romînă şi în limbile minorităţilor naţionale, « Biblioteca S.S.M.F. », numărul imens de cărţi sovietice pe care elevii le pot citi datorită cunoştinţelor lor de limbă rusă, etc., permit să se realizeze acest deziderat.

Cercurile de matematică şi de fizică pe clase sau pe grupe de clase întrunesc pe toţi elevii dornici să adîncească cunoştinţele obţinute la lecţii. Ele trebuie să fie însă, deschise pentru oricine. S-a observat că unii elevi, cu goluri în cunoştinţele de matematică şi fizică au început să se ocupe de studiul acestora, după ce au asistat la o şedinţă a unui cerc unde s-au dezvoltat subiecte care au avut darul să le trezească interesul pentru matematică sau fizică.

Formele de organizare a muncii în cercuri nu pot fi standardizate. Fiecare cerc îşi desfăşoară activitatea ţinînd seama de specificul şcolii, de condiţiile în care se duce munca, de posibilităţile locale şi de alte împrejurări.

Se recomandă ca cercul să fie condus de profesorul de matematică, respectiv de cel de fizică, ajutat de cei mai buni elevi din cerc.

In şcolile de şapte ani e bine să fie cîte un cerc de matematică pentru fiecare clasă în parte. In cele medii poate fi un cerc pentru clasele VIII, IX, X sau cîte unul pentru grupele VIII-IX şi IX-X. Cînd condiţiile nu permit organizarea mai multor cercuri se poate forma unul singur pentru clasele VIII, IX şi X. Elevii dornici să activeze într-un cerc de matematică sau de fizică, care nu găsesc această posibilitate în şcoală, se vor alătura cercurilor din alte şcoli sau aceluia pe oraş.

Şedinţele cercurilor *vor avea loc cu regularitate, periodic şi nu mai rar decît de două ori pe lună. Ele vor fi pregătite temeinic de conducerea cercului care va stabili ordinea de zi a şedinţei, pe baza planului semestrial fixat din vreme cu toţi membrii cercului. Ordinea de zi se va fixa ţinînd seama de nivelul de pregătire al membrilor cercului. Ca schemă generală, o şedinţă de cerc este bine să cuprindă prelucrarea unor chestiuni de matematică, respectiv de fizică, din afara manualului şi care să se sprijine pe conţinutul manualelor. De pildă, la un cerc de artimetică s-ar putea trata despre transformarea fracţiilor ordinare în zecimale şi vice versa, sau despre reguli de divizibilitate cu alte numere decît cele din manual, etc.*

La un cerc de matematică pentru elevii claselor VIII, IX şi X s-ar putea trata despre inversiune, cercul lui Euler, aplicaţiile semnului trinomului, aplicaţii practice de trigonometrie, teoria limitelor, radicali suprapuşi, rezolvarea unor probleme mai complicate, etc.

De asemenea, în şedinţa unui cerc e bine să aibă loc discuţii pe marginea subiectului prelucrat. Participanţii la discuţii trebuie să cunoască din timp tema şi bibliografia care se referă la aceasta. La sfîrşitul şedinţei se vor propune aplicaţii ale temei dezvoltate şi probleme generale. *Soluţiile vor fi predate pînă la şedinţa viitoare tovarăşului profesor sau resposabilului cu organizarea. Rezultatele vor fi raportate în şedinţa cercului, prezentîndu-se cele mai frumoase rezolvări.*

Pentru problemele rezolvate se va atribui un număr de puncte în vederea clasificării participanţilor la această activitate a cercului. In felul acesta se va stimula mai bine activitatea independentă a elevilor.

Cercul de matematică trebuie să treacă în programul său, cel puţin o excursie matematică. *Sub conducerea tovarăşului profesor se pot executa o serie de*

măsurători deosebit de antrenante. Astfel, elevii aparținînd clasei a X-a vor folosi cunoștințele lor de trigonometrie pentru a măsura lățimea unui rîu sau înălțimea unui turn. Elevii claselor a VIII-a și a IX-a vor folosi proprietățile figurilor asemenea pentru a efectua operații asemănătoare. Acolo unde există posibilități, membrii cercului se pot deplasa într-o întreprindere unde se lucrează cu mașini de calculat pentru a studia la fața locului principiul acestor mașini și modul cum se lucrează cu ele.

O atenție deosebită trebuie dată activității cercului de matematică al clasei a V-a, ai cărui elevi sînt începători în acest gen de muncă. De aceea e necesar ca cercul lor să fie mai mult unul de matematică distractivă. In programul cercului clasei a V-a se va înscrie rezolvarea unor rebusuri numerice, propunerea unor recreații și ghicitori matematice, organizarea de întreceri aritmetice, compunerea și rezolvarea unor probleme care să reflecte construirea socialismului în patria noastră. Un astfel de program entuziasmează pe participanții la cercuri și îi îndeamnă să-și explice teoretic problemele propuse.

Celelalte cercuri de matematici pot organiza în afara activității lor regulate și unele manifestări sporadice legate de preocupările lor permanente. O astfel de manifestare o constituie organizarea unor victorine matematice. Elementul de competiție cuprins în victorina matematică face ca acest fel de manifestare a cercului să fie deosebit de atractiv. Organizatorii victorinei vor prezenta auditoriului un număr de probleme. La fiecare din ele se indică timpul dat pentru gîndire și numărul de puncte ce se atribuie aceluia care a rezolvat problema cel dintîi, precum și numărul de puncte ce se atribuie rezolvitorilor următori, tot în limita timpului dat pentru rezolvare. Dacă aceștia din urmă sînt de acord cu soluția expusă de primul rezolvitor numărul de puncte se atribuie acestuia, iar pentru completările aduse de ceilalți li se atribuie și lor cîte un număr mai mic de puncte. In cazul cînd soluția prezentată de cel dintîi, nu este justă, se consideră victorios cel de-al doilea sau al treilea, după cum e cazul.

Victorine matematice se pot organza între clase paralele sau între clase aparținînd unor școli diferite.

Pentru a duce o muncă de agitație în rîndurile tuturor elevilor de toate vîrstele, în jurul «Olimpiadelor Matematice», sau pentru a sărbători rezultatele «Olimpiadei» pe școală, a celei locale, regionale sau pe țară, este bine ca cercul să organizeze o serată matematică care să cuprindă un program bogat în care să se poată îmbina elementul matematic cu diferite manifestări artistice. Partea matematică a seratei va cuprinde un referat despre un subiect accesibil întregului auditoriu și o victorină cu un conținut care ar putea antrena un număr cît mai mare de participanți. Partea artistică va cuprinde recitări adecvate, satiră și umor pe teme matematice și muzică. Serate matematice cu deosebit succes pot fi organizate mai ales, de către cercurile pe oraș sub conducerea filialelor Societății de Științe Matematice și Fizice.

Toată viața și activitatea cercurilor trebuie să se reflecte într-un organ de presă. Gazeta matematică de perete pe școală ar putea da multe informații despre cercuri, despre succesele în muncă a unor elevi și totodată ar putea antrena la noi activități matematice pe elevii întregii școli prin propunerea unor probleme deosebit de interesante.

In cercurile de fizică pentru clasele VIII-IX-X, se pot adînci cunoștințele referitoare la structura nucleului, radioactivitatea artificială, razele cosmice, spectroscopie, analiza spectrală, analiza luminiscentă, etc. prin referate prezentate de către elevi, urmate de întrebări și discuții. In cadrul acestor cercuri se

pot de asemenea, efectua lucrări practice folosind aparatura existentă în laboratorul școlii sau cu ajutorul dispozitivelor construite prin mijloace proprii, așa cum sînt arătate în numerele «Gazetei Matematice și Fizice» sau în alte publicații. Astfel se pot realiza determinări de rezistențe electrice, determinări de densități prin diferite metode, călduri specifice, coeficienți de dilatare; se pot verifica anumite legi ca de pildă, legile lui Ohm, legile lui Faraday, legile căderii corpurilor, măsurători de lungime de undă, etc. In acest scop se pot organiza cîteva grupe de cîte doi-trei elevi, care sub supravegherea profesorului, să efectueze lucrările programate.

Cercurile de fizică pot întreprinde o serie de lucrări folositoare școlii. Cu forțe și mijloace proprii, unele din cercuri ar putea repara aparatură de laborator sau unele aparate pentru folosul colectivului școlar. Există în unele școli medii, tineri care pot depana cu ușurință un aparat de radio sau alții care știu să repare aparatură electrică. Aceste cadre trebuie folosite pentru a da ajutor la munca cercului.

De asemenea, cercurile de fizică trebuie să-și programeze unele excursii în întreprinderi sau la stații de mașini agricole. La fața locului se va studia rolul fiecărui piese dintr-o mașină importantă și se va face legătura dintre cunoștințele teoretice și observațiile de pe teren.

De mare folos pentru participanții la cercuri vor fi articolele publicate în «Gazeta Matematică și Fizică» seria B, care se îngrijește să publice lunar, cîte un articol de fizică și unul de matematică, ca și alte articole mai scurte destinate special cercurilor. De asemenea, pot fi folosite cărțile apărute în «Biblioteca S.S.M.F.»

In «Gazeta Matematică și Fizică» seria B, vom publica dări de seamă și schimb de experiențe între cercuri.

Va fi popularizată experiența cercurilor fruntașe și metodele lor bune. Vom publica din experiența cercurilor sovietice, pildă pentru activitatea noastră.

Avînd în vedere importanța activității în cercurile de matematică și fizică, care pot aduce o contribuție serioasă la desfășurarea în bune condiții a învățămîntului acestor discipline în școli, socotim că este necesar ca ele să fie sprijinite de toate forurile interesate. Filialele Societății vor urmări și îndruma activitatea cercurilor din localitățile respective.

Organizațiile U.T.M. pot să aibă un rol mobilizator printre tinerii din școli, iar utemiștii trebuie să fie fruntași în aceste acțiuni.

Secțiile de învățămînt, comitetele orășenești U.T.M., directorii de unități școlare și diriginții au dat și pot da cercurilor un ajutor prețios. Prin contribuția lor se va putea planifica activitatea cercurilor de matematică și fizică în așa fel încît aceasta să nu fie stînjenită de alte manifestări și la rîndul ei, să nu frîneze munca celorlalte cercuri de specialitate din școli. Aceleași foruri pot sprijini filialele S.S.M.F. organizînd tutelarea unor cercuri pentru clasele V-VII de către altele din aceiași școală aparținînd claselor VIII-X, precum și tutelarea acestora de către unele cercuri științifice studențești.

De asemenea, filialele S.S.M.F. pot fi ajutate la organizarea schimbului de experiențe dintre cercuri și la evidențierea, la fiecare sfîrșit de pătrar, a activității deosebite a unora dintre ele ca și a profesorilor și elevilor fruntași.

Perspectivele de viitor ale activității cercurilor de matematică și de fizică, au fost arătate în parte. Activiștii fruntași ai cercurilor pot să ajute la învățătură pe colegii lor, datorită nivelului lor de cunoștințe; de asemenea, ei se vor putea distinge în întrecerile din cadrul olimpiadelor matematice. Cele mai multe cadre

studenţeşti fruntaşe din facultăţile de matematică şi fizică, ca şi din institutele tehnice superioare, vor proveni desigur, din foşti activişti ai acestor cercuri.

Partea de contribuţie a acestora la construirea socialismului în patria noastră este bine cunoscută. Se impune deci, o sprijinire temeinică a activităţii mereu crescînde a cercurilor de matematică şi fizică.

DIN TEORIA NUMERELOR

DESPRE GEOMETRIA NUMERELOR

I. MAURER

Lector, Universitatea Bolyai, Cluj

ÎN dezvoltarea istorică a matematicii, ştiinţa numerelor întregi, aritmetica, reprezintă primul capitol. Nu vom analiza dezvoltarea noţiunii de număr. Cititorul va putea găsi detalii asupra acestei analize în R.M.F. nr. 1 din 1950. Vrem să remarcăm numai, că noţiunea de număr ca şi celelalte noţiuni fundamentale ale matematicii a izvorît direct din practică odată cu apariţia necesităţii de numărare pe baza experienţei multor generaţii, prin abstracţii succesive. Imaginea de sine stătătoare a obiectului unic este unitatea, imaginea colecţiei de obiecte este numărul natural (în cele ce urmează numărul natural va fi numit şi număr întreg). Prin urmare, numărul întreg reflectă o proprietate reală a colecţiei de obiecte: numărul obiectelor din colecţie.

La fel, operaţiile cu numere sînt *imagini abstracte* ale unor interacţiuni fizice. Adunarea numerelor reflectă unirea a două colecţii cu păstrarea independenţii elementelor. Matematicianul sovietic A. D. Alexandrov explică acest lucru cu următorul exemplu sugestiv: « Un obiect şi încă un obiect fac două obiecte. Un litru de apă şi un litru de spirt turnate la olaltă nu dau doi litri ci mai puţin, din cauza dizolvării reciproce, adică din cauza interacţiunii celor două obiecte. Chiar acest exemplu simplu arată că adunarea înţeleasă în mod fizic poate diferi şi că adunarea simplă $1 + 1 = 2$, înţeleasă în mod fizic se referă tocmai la obiecte pe deplin separate şi nu la acele care acţionează unul asupra altuia » *).

Geometria are o istorie milenară. Noţiunile ei derivă şi ele din lumea reală şi s-au dezvoltat pe calea abstracţiei treptate în cursul experienţei istorice milenare. De exemplu, noţiunea de segment de dreaptă ca figură geometrică, reprezintă abstracţia unor obiecte existente care scoate în evidenţă numai proprietatea de întindere într-o singură direcţie. Spre deosebire de noţiunea de număr figura geometrică este imaginea continuităţii pure. De exemplu, continuitatea segmentului de dreaptă reflectă continuitatea obiectelor reale care constă în faptul că dacă descompunem un obiect atunci se descompune şi unitatea lui (de exemplu, bastonul rupt nu mai este baston).

Pornind de aci putem clarifica raportul între aritmetică şi geometrie dacă luăm ca bază definiţia foarte concisă şi expresivă a lui Engels despre obiectul matematicii: « *Matematica pură are ca obiect formele spaţiale şi rela-*

---

*) A. D. Alexandrov. Dialectica leninistă şi matematica, Priroda nr. 1, 1951.

țiile cantitative ale lumii reale, deci un material foarte real. Faptul că acest material apare într-o formă extrem de abstractă poate să ascundă numai în mod superficial proveniența lui din lumea exterioară. Pentru că aceste forme și relații să poată fi studiate în puritatea lor ele trebuie însă, separate în mod complet de conținutul lor, care trebuie neglijat ca fiind indiferent; astfel se obțin punctele fără dimensiuni, liniile fără grosime și lățime, simbolurile a, b, ... ». (Engels: « Anti-Dühring », ed. P.C.R., p. 80—81). Prin aceste cuvinte Engels exprima pe de o parte, legătura matematicii cu realitatea, pe de altă parte, necesitatea abstracției matematice. Dar totodată arată care este raportul între aritmetică și geometrie. Aritmetica este reflectarea relațiilor cantitative ale lumii reale, geometria este reflectarea celor mai simple forme spațiale ale lumii reale. Deci, ele oglindesc lumea reală din puncte de vedere contrare, precum am arătat mai înainte. Totuși, aceste contrarii apar într-o unitate indisolubilă: fiecare obiect își are continuarea sa, indivizibilitatea sa, iar conținutul are părți și conține posibilitatea diviziunii. Această unitate este consecința firească a faptului că aritmetica și geometria sînt reflectări ale lumii reale. Dar de aci, urmează că nu putem admite separarea artificială a aritmeticii de geometrie. Dimpotrivă, trebuie să le cercetăm în unitatea lor. Cît de frumos exprimă aceste idei Farkas Bolyai, tatăl genialului János Bolyai, el însuși gînditor progresist, în următoarele cuvinte: « în loc de despărțire forțată, cei doi frați eterni — aritmetica și geometria — trebuie lăsați să se îmbrățișeze în ajutorul lor mutal » (Începutul aritmeticii, ed. II, 1843). Nimic nu dovedește mai bine valoarea acestei idei pe care am recunoscut-o ca necesară, decît faptul neîndoelnic că unitatea contradicției aritmeticii și geometriei a fost un resort principal în dezvoltarea matematicilor la diferite etape. Amintesc ca exemplu, că prin crearea acestei unități s-a ajuns la nașterea analizei matematice. Crearea acestei unități la o treaptă mai înaltă a condus în ultimele decenii, la dezvoltarea analizei funcționale.

Vom arăta un exemplu al legăturii strînse dintre aritmetică și geometrie, în care vom trata unele proprietăți ale numerelor întregi pe cale geometrică. Natural că vom ajunge între timp și la interesante rezultate geometrice. Problemele pe care le vom trata aparțin « geometriei numerelor », denumire dată de H. Mincovschi (Geometrie der Zahlen, 1910).

*
* *

Considerăm un sistem de coordonate rectangulare și totalitatea punctelor din plan, avînd coordonate numere întregi. Punctele care au coordonate întregi vor fi numite *puncte de rețea* pe care le notăm în mod obișnuit cu $P(a, b)$ dacă a și b sînt coordonatele punctului; iar un sistem format din aceste puncte: *rețea*. Dacă o rețea conține *toate* punctele din plan cu coordonate întregi, atunci ea se numește *rețea banală*. Dreptele care trec prin două puncte de rețea sînt *dreptele de rețea*. (În cele ce urmează vor avea un rol deosebit dreptele de rețea care trec prin origină. Pentru acest motiv vom vorbi pentru simplificare, numai despre « drepte de rețea » uneori și mai scurt, despre « drepte » și vom înțelege prin acestea, drepte de rețea care trec prin origină; vom semnala cazurile cînd vor intra în considerațiile noastre și drepte de rețea care nu trec prin origină).

Elementele reţelei sînt punctele şi dreptele de reţea (fig. 1). Avînd în vedere că aceste elemente sînt în strînsă legătură cu numerele întregi, vom avea posibilitatea de a studia unele proprietăţi ale numerelor intregi pe baza studiului reţelei. Simetria ne permite să ne ocupăm numai de primul cadran.

Vom studia în primul rînd, aşezarea punctelor de reţea pe o dreaptă şi vom stabili următoarea teoremă:

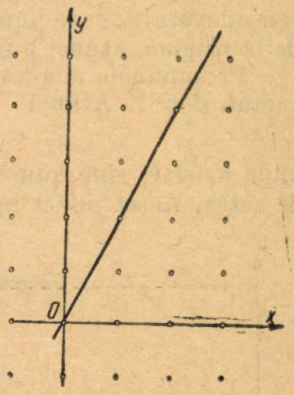


Fig. 1

Teorema 1. Două puncte $P_1(a_1, b_1)$ şi $P_2(a_2, b_2)$ aparţin atunci şi numai atunci aceleiaşi drepte dacă coordonatele lor satisfac următoarea condiţie:

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 . \qquad (1)$$

În adevăr, dacă punctele P_1 şi P_2 aparţin aceleiaşi drepte atunci din triunghiurile asemenea $OP_1'P_1$ şi $OP_2'P_2$ (fig. 2) rezultă: $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$ de unde $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Invers, dacă coordonatele punctelor P_1 şi P_2 satisfac condiţia (1) atunci P_1 şi P_2 aparţin aceleiaşi drepte. În adevăr, putem scrie relaţia (1), în următoarea formă

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} .$$

De aici rezultă că triunghiurile $OP_1'P_1$ şi $OP_2'P_2$ sînt asemenea deci,

$$\sphericalangle P_1 OP_1' = \sphericalangle P_2 OP_2'$$

Avînd în vedere că dreapta Ox este fixă, rezultă din această egalitate că dreptele OP_1 şi OP_2 coincid, sau cu alte cuvinte punctele P_1 şi P_2 aparţin aceleiaşi drepte. Teorema este demonstrată.

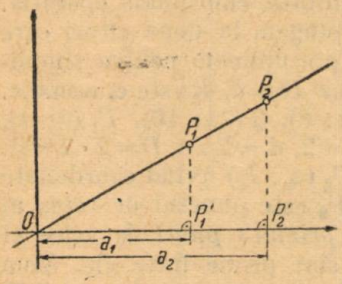


Fig. 2

Pe baza acestei teoreme putem rezolva următoarea problemă: Fiind dat punctul $P(a, b)$ să se afle poziţia punctului $Q(na, nb)$. Răspunsul: Q aparţine dreptei determinate de punctul P, iar distanţa lui de la origină este $OQ = n \cdot OP$. Coordonatele punctelor Q şi P satisfac condiţia (1), deci, prima parte a afirmaţiei noastre este justă. Pentru a demonstra şi partea a doua a afirmaţiei, considerăm triunghiurile $OP'P$ şi $OQ'Q$. Aceste triunghiuri sînt asemenea prin construcţie (fig. 3), deci:

$$\frac{OQ'}{OP'} = \frac{QQ'}{PP'} = \frac{OQ}{OP} . \qquad (2)$$

Însă, $OP' = a$, $OQ' = na$, $PP' = b$ şi $QQ' = nb$, deci:

$$\frac{OQ'}{OP'} = \frac{QQ'}{PP'} = n.$$

Rezultă:

$$\frac{OQ}{OP} = n$$

de unde $OQ = n.\ OP$, ceea ce era de demonstrat. Evident că şi afirmaţia inversă este adevărată: dacă punctul Q este situat pe dreapta OP la distanţa $OQ = nOP$. de la origină, atunci punctul Q are coordonatele na şi nb.

Presupunem acum că coordonatele a şi b ale punctului P au un divizor comun $d \neq 1$. Atunci

$$a = a_1 d \quad , \quad b = b_1 d \tag{3}$$

unde a_1 şi b_1 sînt numere întregi. Deci, punctul P_1 $(a_1,\ b_1)$ este un punct de reţea. Acest punct aparţine dreptei OP, căci pe baza egalităţilor (3) este satisfăcută condiţia $a_1 b = b_1 a$ şi distanţa lui de la origină: OP_1 este caracterizată de relaţia $OP = d \cdot OP_1$.

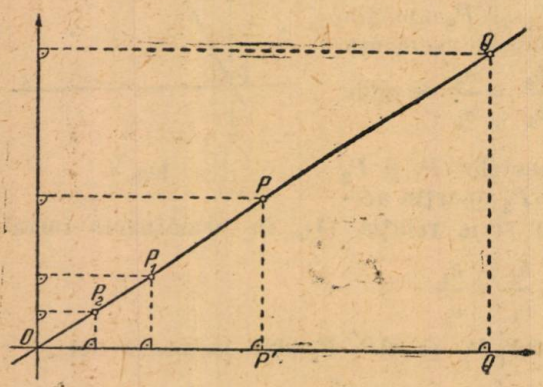


Fig. 3

În acelaşi fel, dacă numerele a_1 şi b_1 au un divizor comun, atunci există două numere întregi a_2 şi b_2 în aşa fel că

$$a_1 = a_2 d_1;\ b_1 = b_2 d_1, \tag{4}$$

iar punctul de reţea P_2 $(a_2,\ b_2)$ aparţine dreptei OP şi distanţa lui de la origină: OP_2 este determinată de relaţia $OP_1 = d_1 \cdot OP_2$ sau $OP = d_1 d \cdot OP_2$ ţinînd seama de egalitatea $OP = d \cdot OP_1$.

Dacă a_2 şi b_2 au un divizor comun diferit de unitate, continuăm operaţia. În orice caz, după un număr finit de operaţii ajungem la două cîturi care nu mai au divizor comun diferit de unitate. Să presupunem pentru simplificare, că a_2 şi b_2 sînt prime între ele. În acest caz $D = d_1 d_2$ este c.m.m.d.c. al numerelor a şi b (observăm că în fig. 3: $P\,(12;\ 8)$, $Q\,(24;\ 16)$, $P_1\,(6;\ 4)$, $P_2\,(3;\ 2)$ şi conform celor arătate mai sus avem: $d = 2$, $d_1 = 2$ iar $D = 2 \cdot 2 = 4$).

Să studiem acum rolul punctului de reţea P_2 $(a_2,\ b_2)$ avînd coordonate prime între ele, pe dreapta OP. Vom arăta că P_2 este punctul de reţea al dreptei OP cel mai apropiat de origină; este *«primul» punct de reţea* al dreptei, şi invers, coordonatele primului punct sînt prime între ele. Vom arăta în continuare, că ajungem la toate punctele de reţea ale dreptei OP, dacă măsurăm multiplii întregi ai lui OP_2 pe dreapta OP. Formulăm aceste proprietăţi ale primului punct într-o teoremă, scoţînd la iveală caracterul aritmetic al acestei probleme.

Teorema 2. Numerele întregi a şi b sînt atunci şi numai atunci, prime între ele dacă punctul P $(a,\ b)$ este primul punct pe dreapta OP. În cazul cînd a şi b sînt prime între ele, coordonatele tuturor celorlalte puncte ale dreptei OP sînt multipli întregi ai numerelor a şi b.

Arătăm că dacă punctul P $(a,\ b)$ este primul punct pe dreapta OP atunci numerele a şi b sînt prime între ele. În adevăr, să presupunem contrariul: numerele a şi b au un divizor comun $d \neq 1$. Atunci există două numere întregi

$a' < a$ şi $b' < b$ pentru care $a = a'd$ şi $b = b'd$. Din aceste egalităţi deducem prin înmulţire şi simplificare $ab' = a'b$. De aci rezultă pe baza teoremei 1, că şi punctul de reţea $P'(a', b')$ aparţine dreptei OP şi în virtutea relaţiilor $a' < a$, $b' < b$, punctul P' este mai apropiat de origină decît punctul P, ceea ce contrazice ipoteza că punctul P este primul punct pe dreapta OP. De aici rezultă că afirmaţia noastră este adevărată.

Invers, dacă a şi b sînt prime între ele, atunci $P(a, b)$ este primul punct de reţea pe dreapta OP. În adevăr, să presupunem că punctul de reţea $Q(c, d)$ este primul punct de reţea pe dreapta OP. Atunci c şi d sînt prime între ele. Triunghiurile $OQ'Q$ şi $OP'P$ din fig. 4, sînt triunghiuri asemenea prin construcţie, deci putem scrie:

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

de unde

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

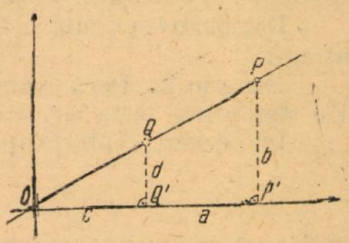


Fig. 4

Avînd în vedere că atît d şi c, cît şi b şi a sînt prime între ele, rezultă că $d = b$ şi $c = a$, adică punctul $Q(c, d)$ coincide cu punctul P. Deci, punctul P este primul punct de reţea pe dreapta OP.

Trecem la demonstrarea părţii a doua a teoremei. Dacă $P(a, b)$ este primul punct de reţea a dreptei OP atunci coordonatele punctelor situate pe această dreaptă sînt multiplii numerelor a şi b. Fie $R(p, q)$ un punct de reţea arbitrar pe dreapta OP. Dacă p şi q sînt prime între ele, atunci R este primul punct al dreptei OP, deci R şi P coincid: $p = a$, $q = b$. Să presupunem acum că c.m.m.d.c. al numerelor p şi q este diferit de 1, $d \neq 1$. Atunci numerele întregi $\frac{p}{d}$ şi $\frac{q}{d}$ sînt prime între ele, deci, punctul $R'\left(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right)$ coincide cu P, adică,

$$a = \frac{p}{d}, \qquad b = \frac{q}{d}$$

de unde:

$$p = d \cdot a \quad \text{şi} \quad q = d \cdot b.$$

Deci teorema 2 este complet demonstrată.

*
* *

Vom arăta cîteva aplicaţii aritmetice ale rezultatelor obţinute pînă acum.

Folosindu-ne de prima parte a teoremei 2, putem constata pe cale geometrică, dacă *două numere întregi a şi b sînt numere prime între ele sau nu.* Pentru aceasta ducem dreapta OP, punctul P avînd coordonatele a şi b. Dacă punctul P este primul punct al acestei drepte, atunci numerele a şi b sînt prime între ele. Dacă există pe dreapta considerată, un punct mai apropiat de origină decît punctul P, atunci a şi b nu sînt prime între ele. Arătăm acest

procedeu pe fig. 5 şi 6 în cazul numerelor 5 şi 9, respectiv 8 şi 12. Numerele 5 şi 9 sînt prime între ele, iar 12 şi 8 nu sînt numere prime între ele.

Putem stabili pe cale pur geometrică şi *c.m.m.d.c. a două numere.* Pe baza studiului de pînă acum al reţelei este clar că c.m.m.d.c. a două numere se poate găsi în felul următor: dacă Q este primul punct pe dreapta OP, iar punctul P este determinat de coordonatele a şi b, atunci stabilim de cîte ori trebuie să măsurăm segmentul OQ pe dreapta OP pentru ca să ajungem la punctul P; dacă $OP = D \cdot OQ$ atunci D este c.m.m.d.c. al numerelor a şi b. Exemplu: c.m.m.d.c. al numerelor 12 şi 8 este egal cu 4, căci $OP = 4 \cdot OQ$ (fig. 6).

Demonstrăm acum o teoremă foarte importantă în studiul numerelor întregi:

Teorema 3. Dacă numărul p divide produsul $a \cdot b$, iar numerele p şi a sînt prime între ele, atunci p divide pe b.

În adevăr, conform ipotezei putem scrie:

$$ab = pq \tag{5}$$

unde q este un număr întreg. Numerele p şi a sînt numere întregi, deci $P(p,a)$ este un punct de reţea. Punctul $Q(b,q)$ este de asemenea un punct de reţea.

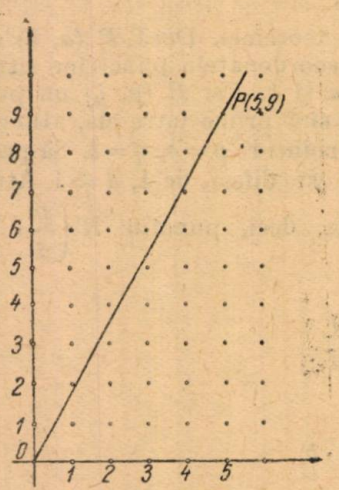


Fig. 5

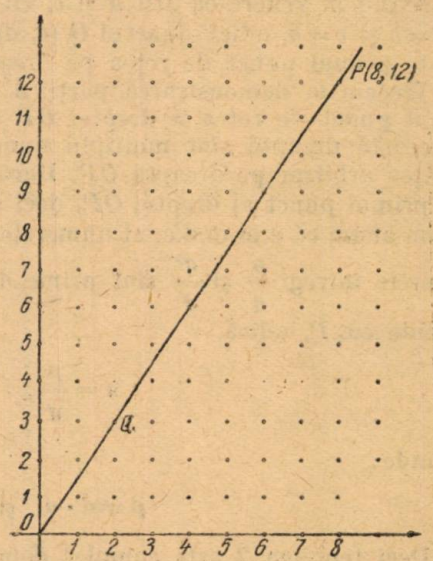


Fig. 6

Coordonatele punctelor P şi Q satisfac condiţia (5), deci pe baza teoremei 1 rezultă că P şi Q aparţin aceleiaşi drepte. Am presupus că numerele p şi a sînt prime între ele. Rezultă, pe baza teoremei 2, că punctul $P(p,a)$ este primul punct de reţea pe dreapta OP şi coordonatele celorlalte puncte situate pe aceiaşi dreaptă sînt multiplii ai numerelor p şi a. Deci, b este un multiplu al lui p, sau cu alte cuvinte p divide pe b. Teorema 3 este demonstrată.

Rezultă din această teoremă: dacă p este un număr prim şi divide produsul ab, atunci divide cel puţin unul din factorii produsului. În adevăr, dacă p nu divide pe a, atunci p şi a sînt prime între ele. Deci, p divide numărul

b pe baza teoremei 3. Această consecinţă a teoremei 3 dă posibilitatea de a demonstra unicitatea descompunerii unui număr întreg în factori primi, care este o teoremă de bază în teoria numerelor întregi.

*
* *

Studiul proprietăţilor numerelor întregi şi multe probleme practice (vezi de exemplu, R.M.F. nr. 8/1950), ne conduce la problema rezolvării în numere întregi a ecuaţiei nedeterminate:

$$ay + bx = c \tag{6}$$

unde a, b, c sînt numere întregi. Această problemă are un caracter aritmetic, deoarece soluţiile se caută în numere întregi. În cele ce urmează vom vorbi pe scurt despre soluţii, înţelegînd întotdeauna soluţii în numere întregi.

Ecuaţia (6) nu are întotdeauna soluţie. De exemplu, nu există două numere întregi x şi y care să satisfacă ecuaţia

$$4y + 12x = 9$$

Dacă însă, ecuaţia (6) are o soluţie, atunci are o infinitate de soluţii (de aici provine denumirea de ecuaţie « nedeterminată »). De exemplu, ecuaţia

$$2y - 3x = 5$$

are soluţiile

$$x = 1 + 2k; \qquad y = 4 + 3k$$

unde k este un număr întreg arbitrar.

Se pun problemele: ce condiţie trebuie să satisfacă ecuaţia (6) pentru ca să aibă soluţie şi cum se pot calcula soluţiile. Aceste probleme sînt tratate în manuale. Noi le vom rezolva folosindu-ne de noţiunea de reţea şi între timp, vom stabili şi interesante proprietăţi geometrice ale reţelei. Facem în prealabil o simplificare, vom studia ecuaţia

$$ay + bx = 1 \tag{7}$$

în loc de ecuaţia (6). Avem dreptul să facem această simplificare, deoarece cunoscînd o soluţie a ecuaţiei (7) putem determina o soluţie a ecuaţiei (6). Într-adevăr, dacă x_0, y_0 este o soluţie a ecuaţiei (7), atunci cx_0, cy_0 este o soluţie a ecuaţiei (6), căci din

$$ay_0 + bx_0 = 1$$

rezultă,

$$a(cy_0) + b(cx_0) = c$$

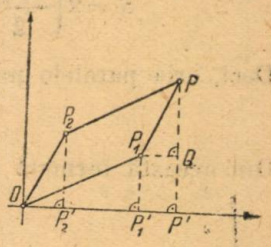


Fig. 7

Pentru rezolvarea problemei trebuie să studiem încă cîteva chestiuni legate de reţeaua de puncte.

Considerăm două puncte de reţea $P_1(a_1, b_1)$ şi $P_2(a_2, b_2)$ şi paralelogramul construit pe laturile OP_1 şi OP_2 (fig. 7). Vîrful $P(a, b)$ al paralelogramului este tot un punct de reţea. Pentru a arăta acest lucru să calculăm coordonatele

punctului P. Folosindu-ne de construcţia din fig. 7, constatăm că triunghiurile $OP_2'P_2$ şi P_1QP sînt egale, deci putem scrie:

$$a = OP' = OP_1' + P_1'P' = a_1 + P_1Q = a_1 + OP_2' = a_1 + a_2$$

În acelaş fel găsim pentru ordonată: $b = b_1 + b_2$ ceea ce demonstrează afirmaţia noastră. Deci, toate vîrfurile paralelogramului considerat sînt puncte de reţea. Vom folosi denumirea de *paralelogram de reţea* pentru un paralelogram ale cărui vîrfuri sînt puncte de reţea. Observăm că din formulele

$$a = a_1 + a_2 \quad ; \quad b = b_1 + b_2 \tag{8}$$

putem calcula coordonatele oricărui vîrf al paralelogramului, dacă sînt date coordonatele celorlalte două vîrfuri. Deci, acestea sînt numere întregi dacă punctele date sînt puncte de reţea. Rezultă că oricare paralelogram determinat de punctul O şi de două puncte de reţea arbitrare este un paralelogram de reţea. Faptul că am considerat un paralelogram care are un vîrf în origină nu reprezintă un caz particular, deoarece prin translaţie oricare paralelogram poate fi adus în această poziţie. Observaţia făcută este valabilă pentru oricare paralelogram determinat de trei puncte de reţea şi concluziile la care vom ajunge în studiul paralelogramului de reţea OP_1PP_2 vor fi valabile pentru toate paralelogramele de reţea.

Să calculăm aria paralelogramului OP_1PP_2. Notăm pe rînd cu S, S', S_1, S_2, S_3 aria paralelogramului, a triunghiului OP_1P_2, a triunghiului $OP_2'P_2$, a trapezului $P_2P_2'P_1'P_1P_2$ şi a triunghiului $OP_1'P_1$ (fig. 8).

Atunci,

$$S = 2S' = 2\,(S_1 + S_4 - S_3)$$

Ţinînd seamă de egalităţile $OP_1' = a_1$; $OP_2' = a_2$; $P_1'P_1 = b_1$; $P_2'P_2 = b$ obţinem:

$$S = 2\left(\frac{a_2b_2}{2} + \frac{(b_1 + b_2)\,(a_1 - a_2)}{2} - \frac{a_1b_1}{2}\right) = a_1b_2 - b_1a_2$$

Deci, aria paralelogramului OP_1PP_2 este:

$$S = a_1b_2 - b_1a_2 \tag{9}$$

Din această formulă rezultă că aria paralelogramului de reţea se exprimă cu un *număr întreg*. De unde rezultă că, *aria minimă a unui paralelogram de reţea este egală cu 1.*

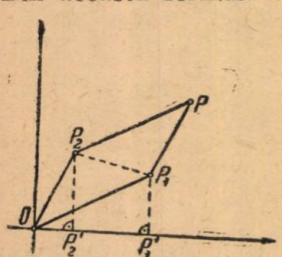


Fig. 8

Se pune problema: ce condiţie trebuie să satisfacă un paralelogram de reţea pentru ca aria lui să fie egală cu unitatea.

Teorema 4. Aria unui paralelogram de reţea este egală cu 1 atunci şi numai atunci cînd acest paralelogram nu conţine nici în interiorul său nici pe laturile sale (afară de vîrfuri) puncte de reţea.

În adevăr, fie aria paralelogramului de reţea OP_1PP_2 egală cu 1, deci *minimă*. Vom presupune contrariul condiţiei enunţate şi vom arăta că ajungem la contradicţia că există un paralelogram de reţea cu arie mai mică decît aria paralelogramului

OP_1PP_2, presupusă minimă. Să facem distincție între trei cazuri și anume: *a)* un punct de rețea X este situat pe o latură a paralelogramului OP_1PP_2, de exemplu, pe latura OP_1 (fig. 9*a*); *b)* în interiorul paralelogramului pe diagonala OP (fig. 9*b*); *c)* în interiorul paralelogramului între diagonala OP și latură, de exemplu, OP_1 (fig. 9*c*).

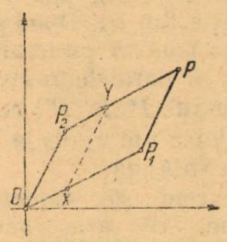


Fig. 9a

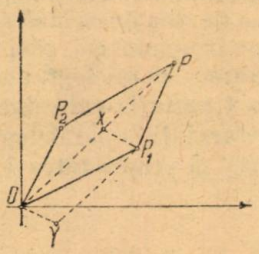


Fig. 9b

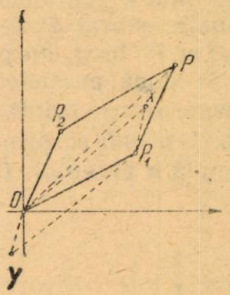


Fig. 9c

În cazul *a)*, aria paralelogramului de rețea $OXYP_2$ este mai mică decît aria paralelogramului OP_1PP_2; în cazul *b)*, aria triunghiului OP_1X (sau triunghiului OXP_2), iar în cazul *c)*, aria triunghiului OP_1X (dacă X este situat între OP și OP_1) este evident mai mică decît triunghiul OP_1P, deci, aria paralelogramului de rețea OYP_1X este mai mică decît aria paralelogramului de rețea OP_1PP_2. (observăm că paralelogramele construite sînt în adevăr paralelograme de rețea pe baza studiului făcut anterior, căci cele trei puncte care determină paralelogramul sînt puncte de rețea, deci și punctul Y este punct de rețea). Cu aceasta am demonstrat necesitatea condiției enunțate în teoremă.

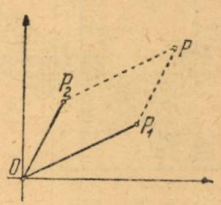


fig. 10

Condiția este și suficientă. Facem următoarea convenție: paralelogramului OP_1PP_2 — care satisface condiția enunțată în teoremă — îi aparțin punctele sale interioare și numai două laturi vecine, de exemplu, OP_1 și OP_2 fără punctele P_1 și P_2 (fig. 10). Notăm acest paralelogram cu π. Dacă efectuăm asupra paralelogramului π toate translațiile posibile paralele cu laturile sale și astfel ca mărimile translațiilor să fie multiplii întregi ai lui OP_1 și OP_2, atunci ajungem la o *acoperire simplă* a planului prin paralelograme egale cu π, adică, *fiecare punct al planului aparține unui paralelogram și numai unuia*. Evident că diferențele $a' - a$, $b' - b$ a coordonatelor a două puncte corespunzătoare $P(a, b)$, $P'(a', b')$ a două paralelograme corespunzătoare π și π' sînt numere întregi. Vom numi în general, două puncte P și P' ale planului, ***omoloage***, dacă diferențele coordonatelor corespunzătoare sînt numere

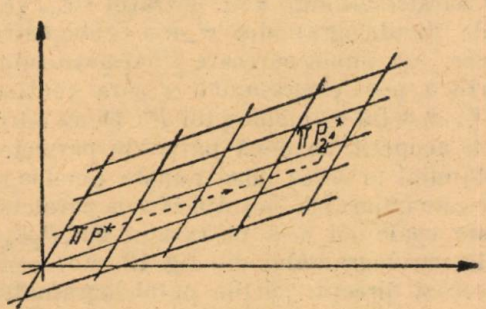


fig. 11

întregi. Deci, punctele corespunzătoare a două paralelograme congruente π și π' din fig. 11, sînt omoloage.

Paralelogramul π posedă următoarele două proprietăți: *a) fiecare punct P' al planului are un punct omolog P în π* și b) *două puncte diferite P și P' ale paralelogramului nu pot fi omoloage.* În adevăr, translația care duce paralelogramul π' (paralelogramul care conține punctul P') în π, duce punctul P' în punctul căutat P, ceea ce demonstrează afirmația din *a)*. Două puncte diferite P și P' în π, nu pot fi omoloage, căci în caz contrar punctul P' ar aparține la două paralelograme: paralelogramului π și paralelogramului π' care provine din π printr-o translație care duce punctul P în P', ceea ce contrazice faptului că prin translațiile paralelogramului π am ajuns la o acoperire simplă a planului. Deci, și proprietatea *b)* este valabilă.

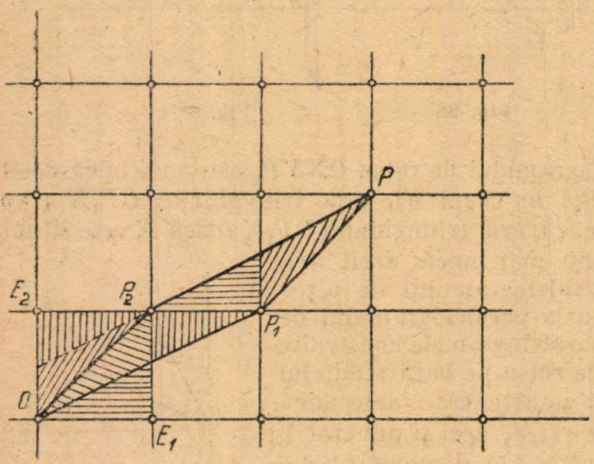


Fig. 12

Vrem să demonstrăm acum, că aria paralelogramului OP_1PP_2, care satisface condiția enunțată în teoremă, adică nu conține nici în interiorul lui, nici pe laturile sale puncte de rețea, este egală cu 1. Vom proceda în felul următor: împărțim planul în patrate prin drepte paralele cu axele de coordonate, distanța între două drepte consecutive fiind egală cu 1. Atunci aria fiecărui patrat va fi egală cu unitatea, iar totalitatea punctelor de intersecție ale dreptelor considerate formează chiar rețeaua banală de puncte (fig. 12). Ducem prin translații paralele cu laturile, toate patratele care conțin părți din paralelogramul π în patratul $OE_1P_2E_2$ și demonstrăm că în acest fel părțile paralelogramului π dau o acoperire simplă a patratului $OE_1P_2E_2$. Înadevăr, un punct oarecare P' al patratului $OE_1P_2E_2$ va fi acoperit de acea parte a paralelogramului π care conține punctul P (existent în baza proprietății *a)* a lui π) omolog lui P'. Două părți nu se pot suprapune căci dacă P' ar fi acoperit de două părți ale paralelogramului π, atunci acest punct al planului ar avea două puncte omoloage în π, deci omoloage și între ele, ceea ce este imposibil. Rezultă că aria paralelogramului π, deci și a lui OP_1PP_2 este egală cu aria patratului $OE_1P_2E_2$, adică este egală cu unitatea. (Părțile paralogramului din fig 12, sînt conținute de 4 patrate; am liniat în aceeași direcție părțile paralelogramului OP_1PP_2 și a patratului $OE_1P_2E_2$ care se suprapun după translația patratelor în patratul $OE_1P_2E_2$).

Teorema este complet demonstrată.

După aceste rezultate geometrice — frumoase și în sine — putem trece la rezolvarea problemei aritmetice propuse.

*

* *

Pentru a pune în evidenţă legătura dintre problema geometrică tratată şi problema rezolvării ecuaţiei (7) sub forma

$$a\eta - b\xi = 1 \qquad (10)$$

folosindu-ne de substituţiile — $x = \xi$; $y = \eta$. Este evident că problema rezolvării ecuaţiilor (7) şi (10) sînt probleme echivalente. Dacă comparăm formulele (9) şi (10) putem observa că partea stîngă a formulei (10) reprezintă aria paralelogramului de reţea construit pe laturile OP şi OX, unde punctul P este determinat de coordonatele a şi b, iar punctul X, determinat de coordonatele ξ şi η.

Deci, problema rezolvării ecuaţiei (10) — atunci şi a ecuaţiei (7) — se pot formula în felul următor: ce condiţie trebuie să satisfacă punctul $P(a, b)$ pentru ca să existe un punct $X(\xi;\eta)$ astfel ca aria paralelogramului de reţea construit pe laturile OP şi OX să fie egală cu 1.

În primul rînd, putem constata că e necesar ca punctul P să fie primul punct pe dreapta OP. În caz contrar orice paralelogram care are o latură pe OP ar avea arie mai mare decît 1 pe baza teoremei 4. Rezultă pe baza teoremei 2, că numerele a şi b, coordonatele punctelor P, trebuie să fie prime între ele.

Această condiţie este şi suficientă: dacă numerele a şi b sînt prime între ele, atunci ecuaţia (7) are soluţie. În adevăr să efectuăm o mişcare de translaţie cu dreapta OP paralelă cu ea însăşi. Fie X primul punct de reţea pe care ajunge această dreaptă în mişcarea sa (deci, punctul de reţea cel mai apropiat de dreapta OP). Să construim un paralelogram pe laturile OP şi OX. Aria acestui paralelogram este egală cu 1, deoarece paralelogramul nu conţine nici în interiorul lui, nici pe laturi puncte de reţea, în afară de vîrfuri. În adevăr, pe latura OP nu există puncte de reţea, căci coordonatele punctului P sînt prime între ele, deci punctul P este primul punct pe dreapta OP. Urmează că nici pe latura paralelă cu OP nu există puncte de reţea. Latura OX, latura opusă acesteia şi interiorul paralelogramului nu conţin puncte de reţea, căci în caz contrar X n-ar fi cel mai apropiat punct de reţea de dreapta OP, ceea ce am presupus prin alegerea acestui punct. Deci, coordonatele punctului X verifică ecuaţia (10). Putem deci enunţa următoarea teoremă:

Teorema 5. Ecuaţia nedeterminată (7) are atunci şi numai atunci, soluţie, dacă numerele a şi b sînt prime între ele.

Completăm această teoremă cu

Teorema 6. Dacă ecuaţia (7) are soluţia x şi y, atunci are un număr infinit de soluţii. Acestea sînt de forma $x + kb$ şi $y + ka$, unde k este un număr întreg arbitrar.

Pe baza observaţiei făcută anterior este suficient să dăm demonstraţia teoremei în cazul ecuaţiei (10). Să presupunem deci, că ecuaţia (10) are o soluţie: ξ şi η, deci există un punct $X(\xi;\eta)$ astfel că aria paralelogramului cosntruit pe laturile OP şi OX este egală cu 1. Punctul de reţea X este situat pe o dreaptă paralelă cu OP. Dar această dreaptă conţine împreună cu X o infinitate de puncte de reţea $X_k(\xi_k, \eta_k)$ unde k este un număr întreg arbitrar. Vom arăta că coordonatele ξ_k, η_k ale acestor puncte verifică ecuaţia (10). În adevăr, aria fiecărui paralelogram construit pe laturile OP şi OX este egală cu aria paralelogramului construit pe OP şi OX, căci aceste paralelograme au ca bază comună pe OP, iar înălţimea lor este egală, cu distanţa dintre cele două

drepte paralele. Dar aria paralelogramului construit pe laturile OP şi OX este egală cu unitatea, ceea ce demonstrează prima parte a afirmaţiei noastre.

Să demonstrăm în continuare că soluţiile ecuaţiei (10) sînt de forma $\xi + kb$ şi $\eta + ka$. Pentru acest scop observăm că din cauza simetriei reţelei, distanţa dintre punctele de reţea situate pe dreapta paralelă cu dreapta OP este aceiaşi ca şi distanţa dintre punctele de reţea ale dreptei OP. Însă coordonatele a şi b ale punctului P sînt numere prime între ele (pentrucă am presupus că ecuaţia studiată are soluţii), deci, pe baza teoremei 2, coordonatele tuturor celorlalte puncte de reţea ale dreptei OP sînt multiplii întregi ai numerelor a şi b, adică sînt de forma ka şi kb. Coordonatele punctelor X_k sînt de forma $\xi_k = \xi + kb$ şi $\eta_k = \eta + ka$, ceea ce era de demonstrat.

Pe baza teoremelor 5 şi 6, putem da o *metodă grafică pentru rezolvarea ecuaţiilor nedeterminate*. Trebuie să ducem o paralelă cu OP la o distanţă de $\frac{1}{OP}$. Coordonatele fiecărui punct de reţea pe această dreaptă — care există în condiţiile teoremei 5 — verifică ecuaţia dată pentrucă aria fiecărui paralelogram determinat de punctele O, P şi punctul respectiv, este egală cu $OP \cdot \frac{1}{OP} = 1$ şi aceste coordonate diferă numai în multiplii întregi ai lui b şi a.

Observaţie: pentru construcţia distanţei $\frac{1}{PO}$ vezi articolul « Inversiunea», de E. Mavrodin, R.M.F. nr. 9/1953).

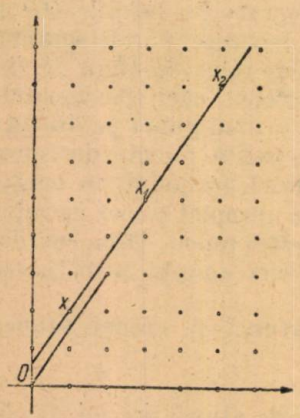


Fig. 13

Ca aplicaţie, să rezolvăm grafic ecuaţia nedeterminată

$$2y - 3x = 5$$

Este suficient să rezolvăm ecuaţia $2y - 3x = 1$ În cazul nostru $a = 2$, $b = 3$, care sînt prime între ele, deci, ecuaţia are soluţie (fig. 13). Procedînd în felul arătat, găsim valorile 1 şi 2 pentru coordonatele punctului X. Deci, $x = 1$, $y = 2$ este o soluţie a ecuaţiei $2y - 3x = 1$. Urmează că $x = 5$ şi $y = 10$ este o soluţie a ecuaţiei dată. Toate celelalte soluţii sînt de forma: $x = 5 + 2k$ şi $y = 10 + 3k$ care se pot scrie sub forma $x = 1 + 2k$ şi $y = 4 + 3k$, avînd în vedere că numărul k este întreg arbitrar.

Încheiem acest articol, care dă numai o privire sumară asupra geometriei numerelor, cu enunţarea unei probleme care se poate rezolva uşor pe baza teoremei 4:

Aria unui paralelogram de reţea OP_1PP_2 este egală cu numărul punctelor de reţea conţinute în interiorul paralelogramului şi pe laturile OP_1 şi OP_2, fără vîrfurile P_1 şi P_2.

CONSTRUCŢIA ŞI GRADAREA UNUI AMPERMETRU

V. PAVLU

Conferenţiar Institutul Politehnic, Bucureşti

MATERIALE NECESARE: 30 m *sîrmă izolată de sonerie*; 2 *inele de lemn sau carton D* 10 *cm*; 1 *planşetă de* 20.1.30 *cm*; 1 *reostat variabil de radio*; 1 *sursă de curent continuu de* 6—8 *V*; 1 *tub cilindric D* 8 *cm, i* 8 *cm*; 1 *baterie uscată veche*; 2 *eprubete sau fiole mari de circa* 8 *cm*; 30 *cm tub subţire de cauciuc*; 1 *busolă mică*; 1 *oglindă ceva mai mare decît busola*; 1 *comutator.*

Principiul. Ampermetrul este alcătuit dintr-o busolă de declinaţie aşezată orizontal în interiorul unui cadru circular (multiplicator) vertical ce se află în planul meridianului magnetic. Acul ia poziţia de echilibru corespunzătoare rezultantei celor două intensităţi de cîmp magnetic: componenta orizontală a cîmpului magnetic terestru şi cîmpul magnetic creat de curent. Ampermetrul se aşează într-un circuit (Fig. 1) ce conţine o sursă de curent continuu, un voltametru cu gaz şi un reostat. Cronometrînd durata curentului, măsurînd volumul de gaz depus pentru diferite intensităţi şi luînd în consideraţie poziţiile respective ale acului busolei, se face gradarea ampermetrului.

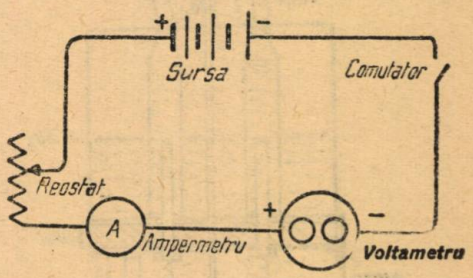


Fig. 1

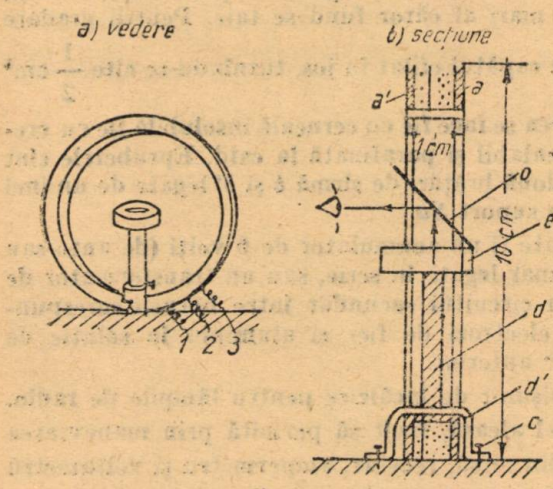


Fig. 2

Ampermetrul (fig. 2) se compune din:

a) două inele *a* tăiate din carton gros şi lipite cu clei de tîmplărie de un manşon făcut tot din carton gros;

b) busola de declinaţie aşezată orizontal în centrul inelelor pe un suport *d* ce face corp comun cu brăţara *d'* fixată prin şuruburile *c* de planşetă. Suportul *d* şi brăţara *d'* se fac la traforaj din placaj sau din tablă groasă de alamă.

c) sîrmă izolată de sonerie — 30 spire cu trei contacte (1, 2, 3) astfel ca între 1 şi 2 să avem trei spire şi între 1 şi 3 să avem 30 de spire (deci, între 2 şi 3 vor fi 27 spire). Se bobinează mai întîi, folosindu-se inelul despărţitor 3 spire (contactul 1 şi 2), apoi restul de 27.

d) oglindă la 45° avînd forma patrată cu latura egală cu diametrul busolei multiplicat cu $\sqrt{2}$, permiţînd lateral vizarea normală a cadrului busolei.

Voltametrul cu gaze se compune din:

a) Un tub cilindric de circa 8 cm diametru şi 8 cm înălţime, avînd în partea inferioară şi în interior, un fund de lemn de circa un cm grosime străbătut de două deschideri circulare prin care pătrund doi electrozi de grafit scoşi dintr-o baterie de buzunar. Se păstrează căciulile de alamă ale electrozilor şi mica porţiune de sîrmă lipită cu cositor, căci acestea fac un bun contact.

Atît în partea inferioară cît şi în partea superioară fundul de scîndură se face etanş cu un strat subţire de smoală ce se toarnă şi se întinde la cald, avînd grijă ca în interior să nu depăşească partea inferioară a electrozilor. Vasul este aşezat pe o pirostrie înaltă de 4 cm făcută dintr-un inel cilindric de 1 cm lăţime tăiat dintr-o tablă groasă de balot cu trei prăguşuri şi trei picioare confecţionate tot din acelaşi material, fixate de planşetă cu şuruburi de lemn.

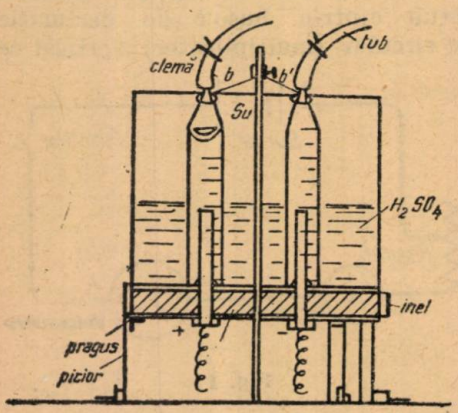


Fig. 3

Eprubetele gradate pentru electroliză se confecţionează din eprubete al căror fund a fost încălzit la suflător şi tras, realizîndu-se un gît subţire la care să se poată adapta tuburile subţiri de cauciuc cu cleme confecţionate din tablă de oţel pentru a putea servi la evacuarea gazelor prin aspirare. În lipsa acestora se pot folosi fiole mari al căror fund se taie. Pentru gradare eprubetele sau fiolele se aşează cu capătul efilat în jos, turnîndu-se cîte $\frac{1}{2}$ cm³ apă şi marcîndu-se nivelul. Marcarea se face fie cu cerneală insolubilă fie cu creionul pe o banderolă lipită în prealabil şi parafinată la cald. Eprubetele sînt menţinute vertical cu ajutorul a două brăţări de sîrmă *b* şi *b'* legate de un inel cu un şurub ce poate culisa pe un suport *Su*.

Sursa de curent continuu poate fi un acumulator de 6 volţi (de auto sau motocicletă), două baterii de buzunar legate în serie, sau un transformator de sonerie cuplat la reţea avînd în circuitul secundar între bornele corespunzătoare la 8 V, un redresor cu electrozi de fier şi aluminiu în soluţie de $(NH_4)_2CO_3$ descris într-un număr anterior.

Reostatul este un reostat obişnuit de încălzire pentru lămpile de radio. Rezistenţa lui trebuie să fie astfel aleasă, încît să permită prin manevrarea lui, atunci cînd circuitul alcătuit din sursă, reostat, ampermetru şi voltametru este închis, o cît mai vizibilă evoluare a acului busolei. Dacă nu îndeplineşte această condiţie se rebobinează cu ajutorul unei rezistenţe de nichelină convenabil aleasă.

Modul de lucru

1) se conectează în serie, sursa, reostatul, ampermetrul, voltametrul şi comutatorul fixate pe planşetă (sursa poate fi şi independentă).

2. Se aşează planşeta astfel încît multiplicatorul ampermetrului să fie în planul meridianului magnetic.

3) Se toarnă acid sulfuric foarte diluat în voltametru, astfel ca nivelul să depăşească cu foarte puţin electrozii.

4. Se aspiră pe ţevile de cauciuc deschizînd clemele pînă ce acidul ajunge în eprubetele gradate la diviziunea zero.

5. Se închide circuitul şi se observă dacă se degajă la electrozi băşicuţe de gaz şi dacă acul magnetic al ampermetrului se mişcă. Este bine ca atunci cînd reostatul este la zero acul să se rotească cu cel puţin 45°.

6. Se întrerupe circuitul şi se evacuează gazele prin aspiraţie pînă la nivelul zero al eprubetelor gradate. Hidrogenul fiind foarte puţin solubil lichidul se saturează repede.

7. Se închide însfîrşit circuitul, cronometrîndu-se în secunde intervalul de timp în care nivelul lichidului la catod, este la diviziunea cea mai apropiată de nivelul exterior şi fireşte, superior electrodului. În felul acesta, presiunea gazului este cea exterioară evitîndu-se corecţia datorită diferenţei de nivel. În tot timpul operaţiei se potriveşte cu ajutorul reostatului variabil ca acul busolei să păstreze aceiaşi poziţie pe cadran, să zicem a_1.

8. Se repetă operaţia în mod identic, încă de două ori folosind alte intensităţi astfel ca acul busolei să se menţină constant la diviziunile a_2 şi a_3 aşezate la distanţe aproximativ egale.

9. Se ia temperatura mediului ambiant în grade Celsius (t) şi presiunea atmosferică H în cm Hg.

Calculul intensităţii

Separîndu-se V cm³ de hidrogen la presiunea H calculăm volumul V_0 corespunzător la 0°C şi la 760 mmHg, aplicînd ecuaţia de stare a gazelor:

$$PV = P_0V_0(1 + \alpha t) \text{ în care } \alpha = 1/273 \text{ sau}$$

$$V_0 = \frac{PV}{P_0(1 + \alpha t)}$$

înlocuim $P = H - f$, f fiind tensiunea maximă a vaporilor de apă pe care o găsim în tabele; deoarece soluţia este foarte puţin acidulată, avem:

$$V_0 = \frac{(H - f)\,V}{P_0(1 + \alpha t)}$$

Densitatea hidrogenului la $0°C$ şi 760 mm Hg fiind potrivit legii lui Avogadro:

$$d_{0_H} = 0{,}001293\,\frac{2}{28{,}8}\ \text{g/cm}^3$$

înseamnă că masa a V_0 cm³ hidrogen va fi:

$$m = \frac{(H - f)\,V}{P_0(1 + \alpha t)} \cdot \frac{0{,}001293}{14{,}4}$$

Aplicînd legile electrolizei avem:

$$\frac{(H-f)V}{P_0(1+\alpha t)} \cdot \frac{0{,}001293}{14{,}4} = \frac{1}{96500} \cdot 1 \cdot I_A \cdot t_s$$

sau:

$$I_A = \frac{(H-f)\,V \cdot 0{,}001293 \cdot 96500}{P_0(1+\alpha t)\,14{,}4 \cdot t_s}$$

În felul acesta se calculează intensităţile i_1, i_2 i_3 corespunzătoare poziţiilor a_1, a_2 şi a_3 ale acului busolei pe cadranul ei.

Se alcătueşte cu ajutorul acestor trei puncte graficul intensităţilor în *mA* (fig. 4) în funcţie de diviziunile cadranului exprimate în grade.

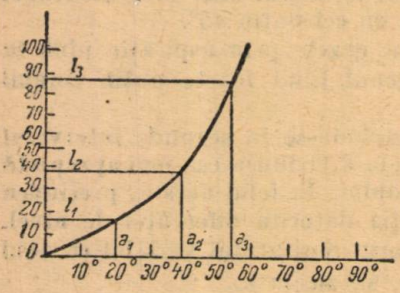


Fig. 4

Trasînd pe acest grafic orizontale prin ordonatele corespunzătoare la 10,20, 30, etc. mA şi ducînd verticalele punctelor de intersecţie cu curba reprezentativă, obţinem diviziunile de pe cadran ce trebuie marcate cu aceste intensităţi.

Dacă ampermetrul se cuplează la bornele 1 şi 3 indicaţiile trebuie multiplicate cu 10.

Se ştie că acest procedeu care în fond se bazează pe teoria ampermetrului electrolitic este cel mai precis mijloc pentru gradarea ampermetrilor, mai ales dacă se foloseşte depunerea unui metal. Noi folosim depunerea unui gaz, a cărui masă poate fi măsurată după cum se vede, fără mijloace pretenţioase, însă mai puţin precis. Deşi, cu excepţia busolei, totul este improvizat, se obţin rezultate bune dacă se veghează ca:

1. lichidul să fie saturat cu hidrogen,
2. nivelul să fie la pornire şi la oprire exact în dreptul diviziunilor eprubetei,
3. intensitatea curentului să fie constantă în timpul determinării.

Un astfel de ampermetru este cunoscut în fizică sub denumirea de «busolă de tangentă». Dacă cunoaştem intensitatea curentului care o străbate ea ne poate permite aflarea intensităţii unui cîmp magnetic.

Intensitatea curentului poate fi determinată folosind expresia cîmpului magnetic creat de n bucle circulare la centru (în acest caz cadrul circular trebuie să fie mare în raport cu busola). Avem:

$$E = \frac{2\pi ni}{10} \text{ în care:}$$

E = intensitatea cîmpului în oerstezi, n = numărul de spire, i = intensitatea curentului în amperi.

Componenta orizontală a magnetismului terestru fiind aproximativ 0,2 oerstezi, avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0.2}{\frac{2\pi ni}{10}} \qquad \text{sau} \qquad i_A = \frac{2}{2\pi n \operatorname{tg}\alpha}$$

α fiind unghiul de deviaţie al acului busolei.

Plasînd cadrul ampermetrului în planul vertical ce conţine un cîmp orizontal de intensitate H, avem:

$$H_{0e} = \frac{2\pi n i \operatorname{tg} \alpha}{10}$$

Pentru a se aprecia precizia rezultatelor obţinute se poate cupla în serie cu ampermetrul astfel construit, un ampermetru de precizie, comparîndu-se indicaţiile şi apreciind totodată rezultatele muncii, perseverenţii, interesului pentru tehnica experimentală şi în genere pentru ştiinţă, ale cititorului care a reuşit să transpună în fapt sugestiile de mai sus. În afară de plăcerea de a fi realizat o frumoasă lucrare de electricitate, el îşi va fi fixat o bună parte din cunoştinţele anterioare.

PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

DESPRE UNELE PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR OMOGRAFICE

A. POP

În *cercurile de matematici* din şcoli elevii studiază noi probleme, îşi lărgesc cunoştinţele lor matematice. Literatura matematică sovietică, cu caracter elementar, bogată în probleme judicios alese, poate constitui o bază a lărgirii cunoştiinţilor din cercuri. In articolul de faţă prezentăm o prelucrare a paragrafului 3, cap. III « *Funcţii omografice* » din cartea profesorilor sovietici E. B. Dînkin şi V. A. Uspenski « *Matematiceschie besedî* » *(Convorbiri matematice)* care oferă un interesant material pentru cercurile de matematică din şcoli.

Prin *funcţie omografică* se înţelege raportul dintre două funcţii liniare. Exemple:

$$\frac{5x+3}{\frac{3}{4}x+5}; \quad \frac{x}{x+1}; \quad \frac{4x+6}{14x+2}$$

Forma generală a funcţiei omografice este

$$\frac{ax+b}{cx+d},$$

unde a, b, c, d sînt numere oarecare. Funcţia liniară este un caz particular al funcţiei omografice:

$$ax+b = \frac{ax+b}{ox+1}$$

Vom nota funcţia omografică cu $f(x)$.

Studiul funcției omografice implică introducerea unor noțiuni noi. Pentru aceasta vom prezenta cele patru operații aritmetice cu numerele din sistemul $0,1,2,\ldots,p-1$ față de modulul p într-o formă specială.

Adunarea: suma $\alpha+\beta$ a două numere din sistemul considerat este $\alpha+\beta$ (suma obișnuită), dacă $\alpha+\beta<p$; $\alpha+\beta-p$ dacă $\alpha+\beta>p$; și $\alpha+\beta=0$, dacă prin adunare obținem $\alpha+\beta=p$.

Exemple: $5+11=16$; $13+7=3$; $9+8=0$ (mod. 17).

Scăderea: $\alpha-\beta$ este un număr care «adunat» cu β (conf. definiției precedente) dă pe α. Pentru $\alpha\geqslant\beta$, $\alpha-\beta$ este diferența obișnuită, pentru $\alpha<\beta$, $\alpha-\beta$ este $\alpha+p-\beta$ (calculul obișnuit).

Exemple: $18-7=6$; $3-11=3+17-11=9$ (mod. 17).

Inmulțirea: $\alpha\cdot\beta$ este numărul obținut drept rest la împărțirea produsului obișnuit cu p.

Exemple: $4\cdot3=12$; $6\cdot7=42=8$ (mod. 17) (deoarece $42=M\,17+8$)

Impărțire: $\alpha:\beta$ este un număr care înmulțit (conf. definiției precedente) cu β dă pe α. Operația de împărțire este posibilă oricare ar fi valoarea lui α sau a lui $\beta\neq0$, numere ale sistemului.

Exemplu 9:12 (mod 17). Pentru a obține răspunsul trebuie să rezolvăm ecuația $12\cdot x=9$. Inmulțind succesiv pe 12 (conf. definiției de mai sus) cu 0, 1, 2, ..., găsim $12\cdot0=0$; $12\cdot1=12$; $12\cdot2=7$; $12\cdot3=2$; $12\cdot4=14$; $12\cdot5=9$, deci $9:12=5$ (mod. 17).

Să considerăm acum p valori ale funcției omografice, adică toate numerele din *cîmpul de resturi față de modulul* p $(0,1,2,\ldots,p-1)$ obținute prin operațiile de adunare, înmulțire și împărțire, în felul cum au fost definite mai sus. Punînd în locul lui x numărul n din cîmpul de resturi față de modulul p, obținem un număr tot din cîmpul de resturi față de modulul p. De exemplu pentru cîmpul de resturi față de modulul 11 (0, 1, 2, ..., 9, 10,) vom avea 11 valori pentru funcția liniară $f(x)=7x+4$, și anume:

$$f(0)=4;\ f(1)=0;\ f(2)=7;\ f(3)=3;\ f(4)=10;\ f(5)=6;\ f(6)=2;\ f(7)=9;$$
$$f(8)=5;\ f(9)=1;\ f(10)=8.$$

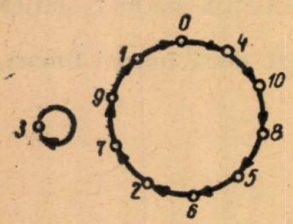


Fig. 1

Același lucru se poate prezenta în formă de tabelă:

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\4&0&7&3&10&6&2&9&5&1&8\end{pmatrix}$$

unde în prima linie sînt scrise toate valorile posibile ale lui x iar în linia a doua, valorile corespunzătoare ale funcției $7x+4$. În locul tabelei se poate desena o schemă cum este cea alăturată (fig. 1), care arată valorile funcției $7x+4$ prin înlocuirea lui x cu cele 11 numere ale sistemului considerat. Se vede că funcția admite un punct invariant (3), iar celelalte valori formează un ciclu.

Să considerăm acum o funcție omografică arbitrară

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

Dacă în această funcție $ad=bc$, atunci,

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c(ax+b)}{a(cx+d)}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c\,ax+cb}{c\,ax+ad}=\frac{a}{c}$$

adică funcţia nu depinde de x. De aceea vom presupune că $ad \neq bc$. Dacă vom înlocui în funcţia omografică pe x cu numere din cîmpul de resturi faţă de modulul p vom obţine numere tot din cîmpul de resturi considerat faţă de modulul p. Dacă înlocuim în funcţia $\frac{ax+b}{cx+d}$ pe x cu numărul n, numitorul $cx+d$ poate deveni zero şi obţinem astfel $\frac{ax+b}{0}$ (din condiţia $ad \neq bc$ rezultă că $ax+b \neq 0$). Impărţirea cu zero în cîmpul de resturi faţă de modulul p nu este posibilă. De aceea sîntem nevoiţi să lărgim cîmpul de resturi faţă de modulul p şi să introducem simbolul ∞ considerînd valoarea funcţiei ∞, în cazul cînd $cx+d=0$. Prin urmare vom considera valoarea funcţiei pentru $x=\infty$ numărul $\frac{a}{c}$, adică $f(\infty)=\frac{a}{c}$. În acest caz $\frac{a}{\infty}=0$ deci,

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}},$$ de aceia

$$f(\infty)=\frac{a+\frac{b}{\infty}}{c+\frac{d}{\infty}}=\frac{a+0}{c+0}=\frac{a}{c}.$$

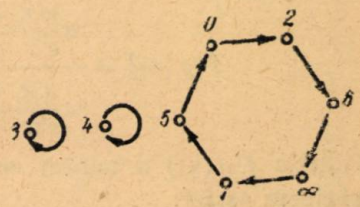


Fig. 2

Determinînd funcţia omografică pentru fiecare din cele $p+1$ numere $0,1,2,\ldots,p-1$, ∞, ajungem iarăş la aceste numere, însă în altă ordine. Pentru cîmpul de resturi $0,1,2,\ldots,6$, ∞, faţă de modulul 7, funcţia omografică

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}$$

ia următoarele valori:

$f(0)=2$, $f(1)=5$; $f(2)=6$; $f(3)=3$; $f(4)=4$; $f(5)=0$; $f(6)=\infty$; $f(\infty)=1$.

Cu aceste numere putem forma tabela

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \infty \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 0 & \infty & 1 \end{pmatrix}$$

sau schema (fig. 2).

Din schemă se vede că în cazul de faţă funcţia omografică are două puncte invariante 3 şi 4 iar restul formează un *ciclu*.

Să considerăm două funcţii omografice

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \text{ şi } g(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

Se observă uşor că dacă $f(x)$ transformă numărul m în n, adică $f(m)=n$ atunci $g(x)$ transformă invers pe n în m, adică $g(n)=m$. O astfel de funcţie

$g(x)$ se numeşte *inversa funcţiei* $f(x)$ la rîndul ei funcţia $f(x)$ este inversa funcţiei $g(x)$. Inversa funcţiei $f(x)$ se notează cu $f_{-1}(x)$, schema funcţiei $g(x)$ se obţine din schema funcţiei $f(x)$ prin schimbarea sensului săgeţilor.

Din consideraţiile expuse constatăm că putem scrie una şi aceiaşi funcţie în forme diferite: înmulţind numărătorul şi numitorul aceleiaşi expresii cu un număr oarecare, obţinem o altă formă a aceleeaşi funcţii. De exemplu expresiile

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{7x+5} \quad \text{şi} \quad f_2(x) = \frac{7x-2}{8x+1}$$

sînt una şi aceiaşi funcţie omografică din cîmpul de resturi faţă de modulul 11. Să considerăm două funcţii omografice

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{şi} \quad g(x) = \frac{a'x+b'}{c'x+d'}.$$

Atunci $f[g(x)]$ va fi

$$f[g(x)] = \frac{a\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'} + b}{c\dfrac{a'x+b'}{c'x+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')x + ab' + bd'}{(ca'+dc')x + cb' + dd'}$$

Funcţia $f[g(x)]$ o notăm cu $f_2(x)$, iar funcţiile $f_3(x), f_4(x), \ldots, f_n(x)$ le obţinem astfel:

$$f_3(x) = f[f_2(x)] \qquad f_4(x) = f[f_3(x)] \qquad f_n(x) = f[f_{n-1}(x)].$$

Exemplu,

$$f(x) = \frac{x+2}{x}$$

$$f_2(x) = \frac{\dfrac{x+2}{x} + 2}{\dfrac{x+2}{x}} = \frac{\dfrac{x+2+2x}{x}}{\dfrac{x+2}{x}} = \frac{3x+2}{x+2}.$$

Operaţiile de obţinere a funcţiei $f_n(x)$ pot fi urmărite pe schema funcţiei $f(x)$. Fiecare punct al schemei rezultă din precedentul, adică se face cu un singur pas pe direcţia săgeţii. Pentru a obţine pe $f_2(x)$ facem doi paşi, iar pentru a obţine pe $f_n(x)$ facem n paşi pe direcţia săgeţii. Astfel putem afla cu ajutorul schemei funcţiile $f_2(x), f_3(x) \ldots$ din $f(x)$ fără a mai face calcule.

Exerciţii propuse pentru cercurile de matematici.

1. *Se dau trei puncte diferite* x_1, x_2, x_3. *Să se găsească o astfel de funcţie omografică* $f(x)$ *încît* $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = \infty$.

2. *Se dau trei puncte diferite* y_1, y_2, y_3. *Să se demonstreze faptul că totdeauna există o funcţie omografică* $f(x)$ *astfel încît* $f(0) = y_1$, $f(1) = y_2$, $f(\infty) = y_3$.

3. *Să se constituie schemele pentru cîmpul de resturi faţă de modulul 7 ale funcţiilor* $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ *dacă* $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1189

Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3}$$

$$x^{x-y}=2y-1.$$

I. Iavorski — Moscova

Soluție. Ecuația I-a se poate scrie:

$$\sqrt{x^2+5x+2y-3}-\sqrt{x^2+2y+3}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}-\sqrt{x^2+x+y+2}.$$

Ridicînd de două ori această ecuație la patrat obținem după reduceri ecuația de gr. II în y:

$$y^2+(3x-4)y-4x^2+9x-5=0$$

de unde

$$y=x-1 \quad \text{și} \quad y=-4x+5.$$

Soluția $y=-4x+5$ nu convine primei ecuații a sistemului ci convine ecuației:

$$\sqrt{x^2+5x+2y-3}-\sqrt{x^2+x+y+2}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}-\sqrt{x^2+2y+3}.$$

Nu putem avea decît deci, $y=x-1$.

A 2-a ecuație a sistemului devine $x=2y-1$ sau $x=2x-2-1$, de unde $x=3$ și $y=2$.

Problema 1194

Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$2x+3y-4z=10t$$
$$3x-5y+2z=t$$
$$x-y+z=t.$$

Ion Roșca, elev, București

Soluție. Rezolvînd sistemul în raport cu x, y, z, găsim:

$$x=\frac{43t}{17}; \quad y=\frac{20t}{17}; \quad z=-\frac{6t}{17}.$$

Rezultă $x=43m$; $y=20m$; $z=-6$ m; $t=17$ m unde m este întreg.

Problema 1195

Unghiurile unui triunghi oarecare ABC fiind împărțite în cîte trei părți egale prin dreptele AY, AZ; BZ, BX; CX, CY; a se vedea în R.M.F. pag. 198/1953; rezultă triunghiul echilateral XYZ. Să se demonstreze relația: $AZ \cdot CY \cdot BX = AY \cdot BZ \cdot CX$

Radu Petrovici, elev, Focșani

Soluție dată de *Mircea Bocu*, Oradea. Notăm $A=3\alpha$; $B=3\beta$; $c=3\gamma$. Aplicăm acum teorema sinusului în triunghiurile AZB, AYC, BXC. Avem:

$$\frac{AZ}{BZ}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}; \quad \frac{CY}{AY}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{și} \quad \frac{BX}{CX}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Rezultă:

$$\frac{AZ}{BZ}\cdot\frac{CY}{AY}\cdot\frac{BX}{CX}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=1$$

deci: $AZ \cdot CY \cdot BX = AY \cdot BZ \cdot CX$.

Problema 1196

Se descriu cercurile ce trec prin ortocentrul H al unui triunghi oarecare ABC şi au centrele în mijloacele laturilor. Să se arate că un cerc de rază R_1 concentric cercului circumscris triunghiului ABC, de rază R, taie cele trei cercuri după cîte un diametru. Între razele R_1 şi R există relaţia: $2R_1^2 = R^2 + OH^2$.

D. C. Panu, Galaţi

Soluţie. Fie AA', BB', CC' înălţimile şi D, E, F mijloacele laturilor BC, AC, AB Înălţimea CC' este coarda comună a cercurilor D şi E deoarece trece prin H, unul din punctele lor de intersecţie, şi e perpendiculară pe linia centrelor DE. Prin urmare, CC' e axul radical al celor două cercuri.

Locul geometric al centrelor cercurilor, care taie două cercuri date după cîte un diametru, este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor situată la aceeaşi distanţă de unul din cercuri ca şi axul radical de celălalt.

Fie D' şi E' punctele în care DE taie pe FO şi CC'. Avînd $DF = EC$ şi $\sphericalangle FDD' = \sphericalangle CEE'$ triunghiurile FDD' şi CEE' sînt egale, deci $DD' = DE'$. Cum FD' este şi perpendiculară pe linia centrelor DE ea este şi locul centrelor cercurilor care taie cercurile D şi E după cîte un diametru.

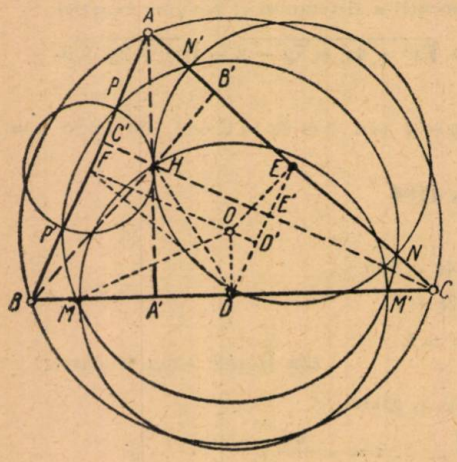


Fig. 1

Tot astfel pentru cercurile E, F şi D, F locurile sînt respectiv mediatoarele DO şi EO.

Intersecţia celor trei locuri fiind centrul O acesta este centrul cercului care taie pe toate cele trei cercuri după cîte un diametru.

Fie MM' diametrul după care e tăiat cercul D. Cînd triunghiul ABC e ascuţitunghi (fig. 1), avem:

$$R_1^2 = OM^2 = DM^2 + OD^2 = DH^2 + OD^2$$

$$DH^2 = HA'^2 + A'D^2 = (AA' - AH)^2 +$$

$$+ A'D^2 = AA'^2 + AH^2 - 2\,AA' \cdot AH +$$

$$+ A'D^2 = = AD^2 + AH^2 - 2\,AA' \cdot AH =$$

$$= AD^2 + 4\,OD^2 - 2\,AA' \cdot AH$$

deci,

$$AD^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad \text{sau}$$

$$OD^2 = \frac{4R^2 - a^2}{4}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AHB' şi ACA' rezultă:

$AA' \cdot AH = b \cdot AB'$, dar $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,AB'$, deci: $-2\,AA' \cdot AH = a^2 - b^2 - c^2$.

Înlocuind în (1), obţinem:

$$R_1^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a}{4} + 5\,\frac{4R^2 - a^2}{4} + a^2 - b^2 - c^2 = \frac{10R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$$

sau

$$2R_1^2 = 10R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \qquad (2)$$

Cînd unghiul A e obtuz (fig. 2), avem:

$$DH^2 = (AA' + HA)^2 + A'D^2$$

$$R_1^2 = AD^2 + 5\,OD^2 + 2\,AA' \cdot AH$$

şi

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,AB'.$$

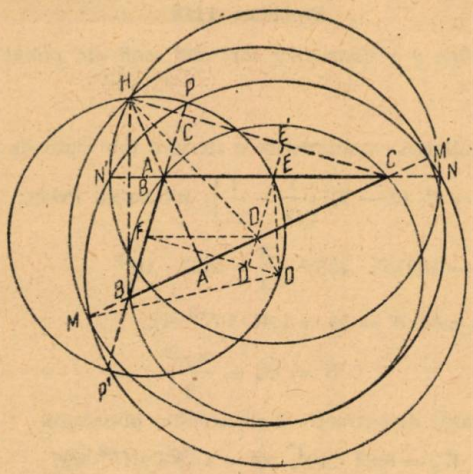


Fig. 2

Făcînd înlocuirile ajungem tot la relaţia (2):

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\ *)$$

împreună cu relaţia (2) ne dă:

$$2R_1^2 = 10\,R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = R^2 + OH^2.$$

Problema 1197

Două stele S şi S' de declinaţii cunoscute D şi D' sînt văzute la un moment dat într-un acelaşi plan vertical la distanţele zenitale Z şi Z'. Să se calculeze latitudinea locului de observaţie.

* * *

Soluţie. Fie N nordul, Z zenitul locului. Vom avea $\widehat{NS} = 90° - D$, $\widehat{SZ} = Z$, $\widehat{NZ} = 90° - D$, $\widehat{NS'} = 90° - D'$, $\widehat{S'Z} = Z'$. Aplicînd o relaţie cunoscută în triunghiurile sferice NSZ şi $NS'Z$ obţinem:

$$\sin D = \cos Z \sin \varphi + \sin Z \cos \varphi \cos (NSZ)$$

$$\sin D' = \cos Z' \sin \varphi + \sin Z' \cos \varphi \cos (NSZ')$$

---

*) Se obţine din relaţia: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$, în care G este centrul de greutate al triunghiului ABC şi M un punct oarecare din plan (Manual de Geometrie, cl. VIII–IX, ed. 1950, problema nr. 341); înlocuind pe M prin O şi ţinînd seama că: $OA = OB = OC = R$; $OG = \frac{1}{3}OH$ şi $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Stelele fiind văzute în același plan vertical $\sphericalangle NZS = \sphericalangle NZS'$. Rezultă:

$$\frac{\sin D \cdot \cos Z \sin \varphi}{\sin Z \cos \varphi} = \frac{\sin D' - \cos Z' \sin \varphi}{\sin Z' \cos \varphi}$$

de unde

$$\sin \varphi = \frac{\sin D' \sin Z - \sin D \sin Z'}{\sin (Z - Z')}.$$

Problema 1198

Care este viteza maximă v a electronilor care sînt scoși din plumb sub influența radiației caracteristice a fierului?

* * *

Soluție. Frecvența radiației caracteristice a fierului este dată de relația: $\nu = Rc\,(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$; înlocuind avem:

$$\nu = 109737 \cdot (30)^2 \cdot \frac{3}{4} = 2{,}22 \cdot 10^{18}$$

Energia unei cuante este $W = h\nu = 1{,}46 \cdot 10^{-8}$ erg.

Avem

$$W = W_0 + \frac{m_e v^2}{2} \qquad (1)$$

unde W_0 este lucrul mecanic de extracție al electronilor plumbului

$$W_0 = 0{,}84 \cdot 10^4, \quad ev = 1{,}35 \cdot 10^{-8} \text{ erg.}$$

Din (1) rezultă $V \cong 5 \cdot 10^9$ cm/s.

Problema 1199

O mașină de produs ghiață prin detentă de aer, funcționează reversibil între 15°C și — 45°C. Să se calculeze în jouli lucrul mecanic minim necesar pentru fabricarea unui gram de ghiață, știind că pentru a se solidifica un gram de apă trebuie să i se ia 80 cal. Dacă mașina are 1 C.P. cîtă ghiață produce pe oră? (Se presupune apa la temperatura de 15°C).

Virgil Atanasiu

Soluție. Dacă mașina este reversibilă, ea funcționează urmînd ciclul lui Carnot și avem $\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'}$, în care Q este numărul de calorii luate de la sursa caldă și T, temperatura absolută a acestei surse. Q' și T' sînt elementele corespunzătoare pentru sursa rece.

După prima lege a termodinamicii lucrul pe care îl poate da Q calorii este egal cu suma lucrurilor, unul cheltuit de motor, altul cedat prin Q' calorii sursei reci. Deci, notînd cu W lucrul motorului și E, echivalentul mecanic al caloriei, avem:

$$W = (Q - Q')\,E = E\left(\frac{Q'T}{T'} - Q'\right)$$

sau

$$W = EQ'\left(\frac{T - T'}{T'}\right) = EQ'\left(\frac{t - t'}{273 - 45}\right).$$

Înlocuind avem:

$$W = 4{,}18\,(80 + 15)\left(\frac{15 + 45}{273 - 45}\right) = 104 \text{ jouli}$$

1 C.P. echivalînd cu 736 jouli/s produce deci, aproximativ 7 g ghiață pe secundă sau 25 kg pe oră.

Problema 1201

Să se rezolve ecuația:

$$(\operatorname{tg} x + 2)(1 - \sin 2x) = 1 - \cos^2 x$$

Gh. Bercea

Soluție dată de elevul *Ctmpu Eugen* (București). Ecuația se poate scrie:

$$(\operatorname{tg} x + 2)(1 - \sin 2x) = \sin^2 x$$

sau

$$(\operatorname{tg} x + 2)\left(1 - \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

sau

$$\frac{(\operatorname{tg} x + 2)(1 - \operatorname{tg} x)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Simplificăm ecuația cu $1 + \operatorname{tg}^2 x$ deoarece acest binom nu poate fi nul niciodată.

Ecuația devine $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

Se observă că pentru $\operatorname{tg} x = 2$ ecuația este satisfăcută, deci polinomul din primul membru se divide cu $(\operatorname{tg} x - 2)$. Ecuația devine:

$$(\operatorname{tg} x - 2)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1) = 0$$

de unde

$$\operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = 2, \quad x_1 = k\pi + \operatorname{arc\,tg} 2$$

și

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0; \quad \operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

și

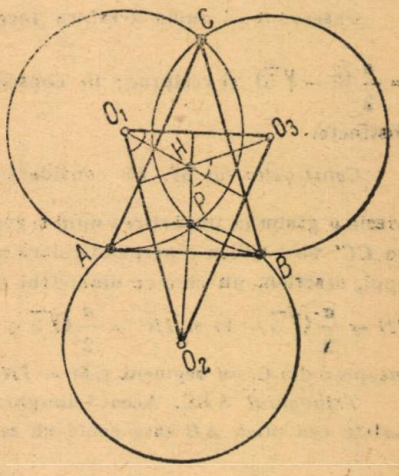
$$x_{2,3} = k\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

unde k este un număr întreg.

Problema 1206

Să se afle locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului cu vîrfurile în punctele de intersecție a trei cercuri egale ce trec prin același punct fix P, unul din cercuri fiind mobil.

Corneliu Zidăroiu, elev, București



Soluție. Notăm O_1, O_2, O_3 centrele celor trei cercuri (considerăm O_1 mobil), iar A, B, C respectiv intersecțiile cercurilor. O_1 cu O_2, O_2 cu O_3 și O_3 cu O_1. Se știe că centrul cercului circumscris triunghiului considerat ABC este și ortocentrul triunghiului $O_1O_2O_3$. (Problema nr. 1062 — R.M.F.).

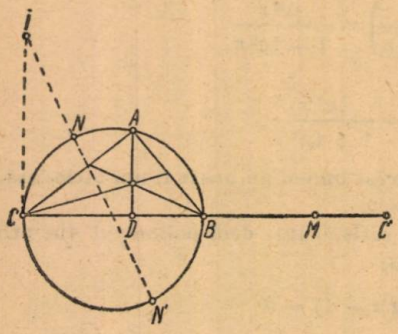
Deoarece O_2O_3 este constantă și fixă iar $\sphericalangle O_2O_1O_3$ rămîne fix avînd ca măsură arcul $\frac{O_2O_3}{2}$ al cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ ortocentrul H al triunghiului $O_1O_2O_3$ (și deci, centrul cercului circumscris triunghiului ABC) va descrie un arc de cerc capabil de $\sphericalangle 180 - \sphericalangle O_2O_1O_3$ (deoarece $\sphericalangle O_2HO_3 = 180 - \sphericalangle O_2O_1O_3$) și descrie pe O_2O_3 ca coardă.

Problema 1210

Să se determine pe segmentul CC' un punct M astfel ca media aritmetică, geometrică și armonică ale segmentelor MC și MC', să fie laturile unui triunghi dreptunghic ABC. Să se arate că la acest triunghi înălțimea din A, bisectoarea din B și mediana din C sînt trei drepte concurente.

Gh. Bazacov

Soluție. Insemnînd cu $2a$ pe CC' și cu x pe CM, laturile triunghiului ABC vor fi:



Ipotenuza $BC = \dfrac{x + (2a - x)}{2} = a$

Cateta mare $AC = \sqrt{x(2a - x)}$

Cateta mică $AB = \dfrac{2x(2a - x)}{x + (2a - x)} = \dfrac{x(2a - x)}{a}$.

Relația lui P i t a g o r a conduce la ecuația de gradul IV:

$$a^2 = x(2a - x) + \frac{x^2(2a - x)^2}{a^2}$$

sau

$$a^2(a - x)^2 = x^2(2a - x)^2$$

iar aceasta se descompune în două ecuații:

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0 \quad \text{și} \quad x^2 - ax - a^2 = 0.$$

Rădăcinile lor sînt:

$$x_1 = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad x_2 = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}), \quad x_3 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad x_4 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

In cazul problemei noastre x trebuie să fie pozitiv și mai mic ca $2a$; deci rădăcinile care convin problemei sînt: $\dfrac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$ și $\dfrac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Observăm că suma acestora face $2a$, deci dacă $MC = \dfrac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$ atunci $MC' = \dfrac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ și reciproc; în consecință vom avea un singur triunghi ABC cu laturi distincte.

Construcția lui M. Să considerăm cazul cînd $x = MC = \dfrac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$. Această expresie o găsim la împărțirea unui segment în medie și extremă rație. Dacă B este mijlocul cu CC' vom ridica o perpendiculară în C pe CC' și pe ea luăm distanța $CI = CB = a$; apoi, descriem un cerc cu diametrul CB iar din I ducem secanta INN'. Se știe că avem $IN = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ și $IN' = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Punctul M este determinat dacă așezăm pe CC', începînd din C, un segment $CM = IN'$.

Triunghiul ABC. Acest triunghi are ipotenuza egală cu $CB = a$ (media aritmetică). Cateta cea mică AB este egală cu media armonică:

$$AB = \frac{x(2a - x)}{a} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{(1 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{a} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Deci:

$$AB = IN = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Să calculăm proiecțiile BD și CD:

$$BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{\frac{a^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2}{a} = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$$

$$CD = BC - BD = a - \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Atunci: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Acest triunghi se bucură de proprietatea că un segment de pe ipotenuză este egal cu cateta nealăturată lui. În acest caz putem scrie relația

$$b \cdot \cos C = a \cdot \cos B$$

relație specifică triunghiurilor la care înălțimea din A, bisectoarea din B și mediana din C sînt trei drepte concurente.

Observări: 1) Construcția triunghiului ABC se face odată cu determinarea punctului M, fiindcă ipotenuza o avem, iar cateta $AB = IN = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

2) Din această problemă se deduce construcția grafică a mediei geometrice și armonice două segmente date: vom împărți în medie și extremă rație jumătate segmentului obținut din adunarea celor două segmente date. Segmentul cel mic depe secanta folosită la această împărțire este luat drept catetă pentru triunghiul cu ipotenuza cît jumătatea segmentului mai sus. Catetele acestui triunghi sînt: media geometrică și armonică a celor două segmente date.

Folosim deci, o singură construcție grafică pentru cele două medii.

PROBLEME PROPUSE

1441. Un generator de curent avînd f.e.m. de 240 volți și rezistența interioară de 0,5 ohmi, alimentează cu curent: 15 lămpi fiecare cu rezistența de 150 ohmi și 5 lămpi fiecare cu rezistența de 200 ohmi.

Știind că lămpile sînt conectate în paralel și rezistența firelor conductoare de curent este 3,5 ohmi, să se afle intensitatea curentului furnizat de generator, tensiunea sub care se găsesc lămpile și intensitatea curentului în fiecare lampă.

M. D. Zigulescu, elev, R.-Vîlcea

1442. Rădăcina ecuație

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$$

ne dă unghiul B al unui triunghi oarecare și laturile a și c sînt egale respectiv cu 2 și $(1 + \sqrt{3})$. Se cere să se afle toate elementele triunghiului și razele cercurilor înscris și circumscris.

«Olimpiada Matematică» — Timișoara, martie 1954

1443. Dacă unghiul din vîrful A al unui triunghi isoscel, are 120°, să se arate că ortocentrul H al unui triunghi este simetricul centrului O al cercului circumscris, față de vîrful A. Cercul de centru O, care trece prin H, taie latura BC în D și E. Să se calculeze aria triunghiului DHE în funcție de $OA = R$.

I. Drăgoescu, student Timișoara

1444. Un circuit alimentat de o tensiune alternativă efectivă de 500 volți cu pulsația $\omega = 50$, are conectate în serie o rezistență $R = 5$ ohmi, o capacitate $C = 300$ microfarazi și o inductanță $L = 0{,}2$ henry. Se cere tensiunea la bornele inductanței și la bornele condensatorului precum și unghiul de decalaj.

G. Brebu, elev, Tîrgoviște

1445. Să se calculeze suma:

$$S_n = \log 2 \cos \alpha + \log 12 \cos 2\alpha + \log 48 \cos 3\alpha + \ldots + \log (2n \cdot 3^{n-1}) \cos 2\alpha$$

Mircea Mănescu, Cîmpulung Muscel

1446. Să se arate că expresia:

$$E = (2n + 1)(3n + 1)(4n + 3)(12n + 1)(2n + 5)$$

este primă cu 25 oricare ar fi n întreg.

C. Ionescu-Țiu

1447. Se dă un conductor linear BC parcurs de curentul I. Intensitatea cîmpului într-un punct A exterior conductorului este H. Să se arate că:

$$BC = \frac{I}{H} (\cos \sphericalangle ABC + \cos \sphericalangle ACB) \ (ctg \sphericalangle ABC + \text{ctg} \sphericalangle ACB)$$

S. V. Ionescu, elev, Pitești

1448. Să se calculeze gradul de disociere a unei soluții deci normale de NaCl, știind că numărul cationilor de N_a^+ pe cm^2 este $521{,}16 \cdot 10^{17}$.

Ioanin Brezeanu, Timișoara

1449. Luăm pe aceiași dreaptă în continuare, segmentele $AB = 5{,}2$ cm și $BC = 6{,}5$ cm. Descriem un semicerc pe BC ca diametru. Ducem tangenta AD din A la cerc. Să se calculeze distanța DE dela D la diametrul BC.

N. Mihăileanu

1450. Să se calculeze expresia:

$$E = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \cos \left[(n - p)\, x\right] \cos^p x$$

Să se verifice că dacă n este impar, $E = 0$; dacă n este multiplu de 4 atunci $E = \sin^2 x$; iar dacă n este multiplu de 2 avem $E = -\sin^n x$.

Gh. I. Bercea, student

1451. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil de diagonale AC și BD există relația:

$$(AC + BD)^2 = (AB + CD)^2 + (AD + BC)^2$$

Emanuel Cocoș, elev, Constanța

1452. Să se descompună în factori:

$$(x^{14} + x^7 + 1) \text{ și } (x^{28} + x^7 + 1)$$

Elemer Kiss

1453. Notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației:

$$(m^2+1)x^3+mx^2+(m^2-1)x+m+2\sqrt{3}=0.$$

și $a=\operatorname{arc\,tg} x_1$, $b=\operatorname{arc\,tg} x_2$, $c=\operatorname{arc\,tg} x_3$. Să se arate că $\operatorname{tg}(a+b+c)=\sqrt{3}$.

Alex. D. Popescu, elev, Reșița

1454. Într-un triunghi oarecare în care unghiurile sînt în ordinea descrescătoare $A>B>C$ să se arate că

$$tg\,(h_a, m_a)+\operatorname{tg}(h_c, m_c)=\operatorname{tg}(h_b, m_b),$$

unde h_a, h_b, h_c sunt înălțimi iar m_a, m_b, m_c mediane.

N. Păun, student, București

1455. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care radicalii sînt reali și avem egalitățile:

$$\sqrt{x+a+\sqrt{2ax+a^2}}+\sqrt{x+a-\sqrt{2ax+x^2}}=2a$$

$$\sqrt{x+a+\sqrt{2ax+a^2}}-\sqrt{x+a-\sqrt{2ax+a^2}}=\sqrt{2(2x+a)}$$

apoi să se arate intervalul de valori ale lui x pentru care,

$$\sqrt{x+a+\sqrt{2ax+a^2}}-\sqrt{x+a-\sqrt{2ax+a^2}}=2a$$

$$\sqrt{x+a+\sqrt{2ax+a^2}}+\sqrt{x+a-\sqrt{2ax+a^2}}=\sqrt{2(2x+a)}$$

unde a este un număr real diferit de zero.

C. Ionescu-Țiu

1456. Se dă un cerc cu centrul în O și două diametre perpendiculare AA' și BB'. Din punctul A ducem o secantă variabilă care taie cercul în C iar diametrul în BB' în I. Tangenta în C la cerc și perpendiculara în I pe diametrul BB' se taie în M. Se cere locul geometric al lui M cînd secanta dusă prin A variază.

* * *

1457. Razele de curbură ale unei lentile biconvexe de crownglass sînt $R_1=3$ cm și $R_2=2$ cm. Să se afle distanța dintre focarele principale ale lentilei pentru radiațiile roșii și cele violete, dacă indicele de refracție pentru roșu este 1,50, iar pentru violet este 1,54.

Ion Lupuțiu, elev, Ploești

1458. Să se arate că,

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4-\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}=31-8\sqrt{15}=\sqrt{991-496\sqrt{15}}$$

* * *

1459. *a)* Un obiect luminos se află la o distanță de 18 cm de vîrful unei oglinzi sferice de rază 20 cm. Să se afle distanța corespunzătoare a imaginei.

b) O lupă are o convergență de 5 dioptrii. Un obiect luminos se află la 10 cm depărtare de lupă. Să se calculeze distanța corespunzătoare a imaginei.

* * *

1460. Un tren străbate o distanță de 18 km în 30 minute. Să se calculeze viteza medie a trenului în km pe oră și metri pe secundă și puterea dezvoltată de locomotivă, știind că forța de tracțiune este de 2000 kgf.

* * *

1461. *a)* O rază de lumină cade pe suprafaţa unei ape liniştite astfel că sinusul unghiului de incidenţă este 2/3. Să se afle unghiul de refracţie (se va lua la apă $n = 4/3$.)

b) O butelie conţine un gaz perfect cu presiunea de 100 atmosfere la temperatura de 27 grade Celsius. La ce temperatură trebuie încălzită butelia pentru ca presiunea să devină 500 atmosfere.

* * *

1462. *a)* Să se calculeze perioada şi frecvenţa radiaţiei din spectrul vizibil care are lungimea de undă de 0,4 microni.

b) Un emiţător are frecvenţa undei emise de 300 kHz. Să se afle lungimea de undă.

* * *

1463. Fiind date unghiurile x, y, z care satisfac condiţia

$$n\pi < \alpha < \beta < (n+1)\pi$$

să se stabilească relaţia

$$\frac{\sin x \sin y}{\sin(z-x)\sin(z-y)} + \frac{\sin y \sin z}{\sin(x-y)\sin(x-z)} + \frac{\sin z \sin x}{\sin(y-z)\sin(y-x)} = 1$$

Onofraş Eugen, Huşi

1464. Să se demonstreze că numerele

$$N_1 = m^3 + (6n-1)m \quad \text{şi} \quad N_2 = m^3 - (6n+1)m$$

sînt divizibile cu 6 oricare ar fi numerele întregi m şi n.

S. V. Ionescu, Piteşti

1465. Să se stabilească identitatea

$$5\cos x + 3\cos 3x + \cos 5x = 16\cos x(\cos x - \tfrac{1}{2})^2(\cos x + \tfrac{1}{2})^2$$

Octavian Stănăşilă, elev, Bucureşti

1466. Fie H ortocentrul unui triunghi oarecare ABC. Se ia pe înălţimea din A segmentul $HA_1 = BC$, în sens opus lui HA şi în mod analog, pe înălţimile din B şi C, segmentele $HB_1 = CA$ şi $HC_1 = AB$. Să se arate că: *a)* laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sînt egale cu dublul medianelor triunghiului ABC şi perpendiculare pe aceste mediane; iar aria triunghiului $A_1B_1C_1$ este de trei ori aria triunghiului ABC.

b) Punctul H este punctul de concurenţă al medianelor triunghiului $A_1B_1C_1$.

Gh. D. Simionescu

1467. Prin M, mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ABC, se duce o secantă variabilă care întîlneşte catetele AC şi AB respectiv în D şi E. Să se arate că există relaţia:

$$\left(\frac{AB}{MD}\right)^2 + \left(\frac{AC}{ME}\right)^2 = 4$$

Florin Torjescu, elev, Ploeşti

1468. Se consideră patratul $ABCD$ de latura a şi dreapta AE care face cu latura AB unghiul α. Prin B şi D se duc perpendicularele pe AE, iar prin C se duce paralela la AE, obţinîndu-se astfel patrulaterul $A'B'C'D'$. Se cere:

1. Să se calculeze în funcţie de $AB = a$ şi $\sphericalangle \alpha$, aria laterală, aria totală şi volumul corpului născut prin rotirea patrulaterului $A'B'C'D'$ în jurul laturei $C'D'$.

2. Să se determine mărimea $\sphericalangle \alpha$ pentru care aria laterală a corpului este maximă.

3. Să se arate că între elementele unui triunghi oarecare există relaţia:

$$b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 4S$$

4. Fie ABC un triunghi oarecare şi G centrul său de greutate. Să se arate că triunghiurile GAB, DBC, GAC sînt echivalente.

(Examen de maturitate L.b.1, Bucureşti 1954)

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PRODUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI *)

E. 576. Să se calculeze cîţi metri cubi de gaz metan trebuie să ardă complet (teoretic se va admite randamentul egal cu unitatea) pentru a încălzi 100 kg apă de la temperatura de 15 grade la temperatura de 55 grade, ştiind că puterea calorifică a gazului metan este de 8000 kcal/m³.

E. 577. Să se calculeze rostul de dilataţie necesar unui pod de metal, lung de 100 m, ştiind că temperaturile extreme sînt de −30°C şi +50°C. (Coeficientul de dilatare lineară fiind de 0,00001).

E. 578. *a)* Să se calculeze rezistenţa unei sîrme de fier cu lungimea de 1 km şi secţiunea de 8 mm² (rezistivitatea fiind de 0,13 ohm mm²/m).

b) Care va fi intensitatea curentului într-un conductor de 0,4 ohmi, tensiunea la capete fiind de 2 volţi.

E. 579. *a)* Care este rezistenţa unui bec cu filament de cărbune dacă este alimentat cu un curent de 0,5 amperi, tensiunea la borne fiind de 120 volţi?

b) Ce forţă trebuie aplicată roţii unei macarale de diametru $D = 1$ m pentru a ridica o greutate de 150 kgf aplicată arborelui de diametru $d = 20$ cm (randamentul se va considera egal cu unitatea).

E. 580. Două combaine, lucrînd împreună, pot strînge recolta de pe un teren în 6 zile. După 4 zile de lucru în comun, una din combaine a fost mutată în altă parte. Din această cauză, a doua combainâ a trebuit să lucreze 5 zile singură pentru a putea strînge toată recolta.

Să se afle în cîte zile s-ar fi putut strînge recolta cu fiecare din aceste combaine în parte.

(Examen de admitere în cl. VIII-a, 1954)

E. 581. Să se efectueze:

$$\frac{1 : 4\frac{4}{11} + 1\frac{13}{30} - 3\frac{21}{49} : 3}{14{,}4 - 9{,}45 : 0{,}9} + \frac{1}{16} : (38{,}75 : 77\tfrac{1}{2})$$

(Examen de admitere în cl. VIII-a, 1954)

E. 582. Pentru a se numerota paginile unui dicţionar au fost necesare 2322 cifre. Cîte pagini are dicţionarul?

(Clasa V-a. Olimpiada Matematică U.R.S.S. 1953)

E. 583. O librărie vinde o carte cu o reducere de 10 % faţă de preţul indicat pe carte şi realizează un beneficiu de 8 %. Cît la sută ar fi fost beneficiul realizat de librărie dacă nu s-ar fi acordat reducerea?

(Clasa V-a. Olimpiada Matematică U.R.S.S. 1953)

E. 584. S-au cumpărat două bucăţi de stambă, una de 4 m şi cealaltă de 30 m plătindu-se pe amîndouă 425 ruble. Dacă prima bucată s-ar fi cumpărat cu preţul celei de a doua iar a doua cu preţul primei, atunci ambele bucăţi s-ar fi plătit cu 415 ruble. Cît costă metrul de fiecare bucată?

(Clasa VI, Olimpiada Matematică U.R.S.S. 1953)

*) V: 581; 582; 583; 586; 588; VI: 576; 577; 584; 587; 589; VII: 578; 579; 580; 585; 590.

E. 585. Să se construiască un romb cunoscîndu-se unghiul dintre o diagonală cu latura şi suma diagonalelor

(Clasa VII Olimpiada Matematică U.R.S.S. 1953

E. 586. O cantină a cumpărat 384 kg cartofi şi 142 kg ceapă, plătind în total 779 lei. Cît a costat ceapa şi cît cartofii, dacă un kg ceapă costă cu 0,30 lei mai mult decît kg de cartofi.

* * *

E. 587. S-a vîndut fasole cu 3,20 lei pe kg şi făină cu 3,60 lei kg şi s-a încasat 728 lei. Să se calculeze ce cantitate s-a vîndut ştiind că s-a vîndut de trei ori mai multă făină decît fasole. Verificare.

* * *

E. 588. La un magazin s-au vîndut bocanci cu 180 lei perechea şi pantofi cu 140 lei perechea, şi s-au încasat în total 18400 lei pentru 116 perechi de încălţăminte. Să se calculeze cîte perechi de pantofi şi cîte de bocanci s-au vîndut. Verificare.

* * *

E. 589. La o combainâ un lanţ de transmisie trece peste 4 roţi dinţate avînd respectiv 42, 56, 34 şi 60 dinţi. Ştiind că toate au făcut în total 91 rotaţii se întreabă cîte rotaţii a făcut fiecare.

C. I. Ţ.

E. 590. O sumă de bani a fost împărţită unui colectiv de muncitori în felul următor: primul a primit 80 lei plus 0,125 din rest; al doilea de două ori 80 plus 0,125 din noul rest, al treilea de trei ori 80 şi încă 0,125 din al treilea rest, şi aşa mai departe. Dacă fiecare muncitor a primit astfel aceiaşi sumă, să se afle suma totală şi numărul muncitorilor.

C. I. Ţ.

DIN EXPERIENŢA CERCULUI DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ AL ORAŞULUI STALIN

CHEMAREA LA ÎNTRECERE ADRESATĂ TUTUROR CERCURILOR DIN ŢARĂ

In oraşul Stalin funcţionează cîteva licee de băieţi şi de fete şi mai multe şcoli medii tehnice.

In toate aceste şcoli activează cîte un cerc de matematică-fizică. De curînd însă, a luat fiinţă şi un cerc de matematică-fizică pe oraş. La acest cerc, al cărui responsabil este tov. prof. A. Goia, participă elevi aparţinînd cercurilor pe şcoli.

Un astfel de cerc care întruneşte elevi şi eleve din şcoli medii diferite are şi o activitate deosebită de aceea dusă în cadrul fiecărui cerc pe şcoală. Aici se ţin conferinţe cu subiecte din domeniul fizicii sau matematicii, cu caracter general, care interesează deopotrivă pe toţi auditorii, se fac demonstraţii interesante şi se propun metode noi de rezolvare a problemelor alese din « Gazeta Matematică şi Fizică », seria B.

Activitatea elevilor în cercul pe oraş le lărgeşte orizontul dincolo de cunoştinţele lor de specialitate, le dezvoltă spiritul de observaţie, iniţiativă în gîndire, interesul pentru cele mai variate aplicaţii ale legilor şi principiilor

studiate. Munca în comun constituie totodată, un stimulent în aprofundarea cunoştinţelor dobîndite şi un util schimb de experienţă între elevii diferitelor şcoli.

La 14 noiembrie a.c. a avut loc o şedinţă festivă a cercului pe oraş, la care a luat parte şi un reprezentant al Societăţii de ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. La această şedinţă au participat aproape trei sute de elevi şi eleve, precum şi profesori de matematică şi fizică, conducători ai cercurilor pe şcoli.

In cadrul programului stabilit, tov. Prof. V. Atanasiu a ţinut o conferinţă cu subiectul « Structura materiei şi energia atomică ». Conferenţiarul a urmărit în expunerea sa să fie cît mai aproape de posibilităţile de înţelegere ale elevilor. A fost prezentată în lumina ultimelor cuceriri ale ştiinţei, alcătuirea materiei, accentuîndu-se în special, componenţa atomului şi a nucleului atomic, iar în legătură cu aceasta, energia atomică şi aplicaţiile ei paşnice în U.R.S.S. pe deoparte, şi în unele ţări capitaliste în scopuri destructive, pe de altă parte. Conferinţa a fost urmărită cu mult interes de auditori.

In partea a doua a şedinţei mai mulţi elevi au demonstrat la tablă, diferite teme originale şi au rezolvat probleme din G. M. F.—B. dovedind cunoştinţe temeinice şi iniţiativă.

Astfel, în legătură cu tema propusă la o şedinţă anterioară şi anume, « Demonstrarea formulei ariei trapezului » prin metode noi, deosebite de cele studiate în şcoală, elevii — membri ai cercului — au prezentat încă şapte demonstraţii noi; elevul Brînduş Lucian din clasa IX-a patru demonstraţii, elevul Gheorghe Miron din clasa IX-a două demonstraţii şi elevul Neamţu Gheorghe încă o demonstraţie.

Din cele observate s-a constatat o strînsă legătură de colaborare între profesori şi elevi, o muncă susţinută în dobîndirea şi lărgirea cunoştinţelor.

Interesîndu-ne mai de aproape, de metodele de muncă folosite de profesori pentru a atrage elevi în număr cît mai mare la studiul matematicii şi fizicii, am aflat de la tov. prof. Goia — care a obţinut foarte bune rezultate în această direcţie—că metodele sînt diferite. Incepînd cu încurajarea eforturilor depuse de elevi, cu stimularea lor în muncă şi insuflîndu-le încredere în posibilităţile lor, profesorul Goia îşi apropie elevii, le arată cum prin muncă perseverentă pot să-şi lărgească necontenit cunoştinţele, le arată mijloacele pe care Republica noastră le pune la dispoziţia lor prin « Gazeta Matematică şi Fizică » în acest scop, le arată posibilităţile ce li se oferă de a aplica şi verifica cunoştinţele însuşite, prin participarea la olimpiadele pe şcoală, oraş, regiune şi ţară; dar tov. prof. Goia nu se opreşte aici: el îşi asociază la această muncă, şi pe părinţii elevilor, pe care îi vizitează şi-i convinge de importanţa deosebită pe care o are pentru fiul lor o temeinică pregătire în matematică şi fizică în vederea studiilor la o facultate tehnică. O astfel de pregătire poate fi realizată şi prin participarea activă la cercurile de matematică şi de fizică pe şcoală şi pe oraş, prin colaborare la « G.M.F.—B », prin participare la olimpiade.

Iată mijloacele datorită cărora un mare număr din colaboratorii la « Gazeta Matematică şi Fizică » din Oraşul Stalin, aparţin cercului condus de tov. prof. Goia.

Pentru a stimula în activitatea lor şi celelalte cercuri pe şcoli din Oraşul Stalin, cercul nr. 2, condus de tov. prof. Goia, le-a chemat la întrecere. Membrii acestui cerc au chemat la întrecere şi cercurile din Oraşul Sibiu,

iar în urma unei consfătuiri ulterioare, au hotărît să extindă această chemare la întrecere asupra tuturor cercurilor de matematică-fizică din toate oraşele ţării.

Dăm mai jos, obiectivele acestei chemări:

1) Un număr cît mai mare de colaboratori şi evidenţiaţi la « Gazeta Matematică şi Fizică », seria B, din şcoala sau oraşul în care activează cercul;

2) Un număr cît mai mare de probleme rezolvate în cadrul cercului de membrii săi;

3) Un număr cît mai mare de participanţi la « Olimpiada » pe şcoală, oraş şi regiune, dintre membrii cercului;

4) Un număr cît mai mare de abonamente la « Gazeta Matematică şi Fizică » seria B realizate de cercul pe şcoală, în instituţia respectivă şi de cel local în oraşul respectiv.

Intrecerea se încheie la 1 iunie 1955. In numerele următoare ale « Gazetei Matematică şi Fizică » seria B, vom da amănunte organizatorice privind această întrecere.

Rugăm pe cei ce vor răspunde la chemarea adresată de către Cercul de matematică şi fizică al Oraşului Stalin, să ne scrie pe adresa: « Societatea de Stiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., str. Spiru Haret nr. 12, Bucureşti XII.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare din numărul precedent)

IAŞI. Clasa IX-a. Alexa Dumitru (1074, 276, 277, 278, 284, 287, 289, 290, 292, 306); clasa X-a. Munteanu P. Dan (1214, 236, 239, 240, 245, 246, 252, 253, 273, 274, 277), Segal Zigu (1323, 326, 342, E: 478, 522, 523, 524, 526, 527, 529, 530, 531). Şcoala pedagogică, anul II. Crăcană I. Petrea, (1252, 306, E: 471, 473, 474, 477, 478, 479, 481, 482, 483, 484, 493, 528, 531), Burlacu Petru (1297, 306, 310, 340, E: 471, 473, 474, 477, 478, 481, 482, 484), Dobre, C. (1306, 310, E: 471, 473, 474, 477, 478, 481, 482, 484), Sulită Gheorghe (1310, E: 471, 474, 477, 478, 481, 482, 484, 505, 518).

ORADEA. Clasa IX-a. Chelebeu Traian (1240, 252, 284, E: 406, 411, 412, 415, 424, 447, 457, 463, 479, 481, 482, 483, 484, 486, 487, 488, 489, 490); clasa X-a. Guiaşu Silviu (1263, 269, 271, 273, 274, 275, 276, 277, 284, 286, 287, 289, 290, 291, 292, 293, 297, 302, 303, 306 313, 315, 316 319 342, A), Rus A. Ioan (1218, 219, 248—259, 261—264, 267, 269, 273, 275—279, 282, 284, 285, 286, 294, 303, 306, 309, 310, 313, 315—319, 322, 323, 330, 335, 336, 337, P, A).

ORAŞUL STALIN. Clasa IX-a. Minea Florian (1252, 254, 259, E: 471, 472, 474, 474, 475, 477, 479, 480).

PIATRA NEAMŢ. Clasa VIII-a. Hărăboi Mihai (1245, E: 457, 458, 459, 460, 463, 465, 469, 471, 475). Şcoala elementară Roznov. Clasa VII-a. Gervescu M. Ion (1159, 167, E: 384—389, 391, 392, 394—401, 409, 410, 412, 413, 414, 416, 420, 425—433); clasa VII-a. Hodor Constantin (E: 471, 474, 475, 479, 481, 482, 484, 486, 488, 505, 510, 522).

PITEŞTI. Clasa X-a. Bogaciu P. Valeriu (1214, 216, 217, 218, 220, 221, 224, 228, 231, 236, 239, 240—248, 252, 254, 255, 256, 258, 259, 269, 271, 272), Şerb G. Adrian (1264, 271, 272, 278, 294, 295, 296, 297, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 306, 307, 309, 310, 312, 313—323, 325, 326 327, 329, 330 331, 333, 334, 335, 338, 339—345, P), Sorescu I. Victor (1214, 218, 221, 222, E: 457, 458, 459, 460, 463, 465, 466, 470, 471). Şcoala medie tehnică mecanică, anul II. Sofronie Gavril (1243, 248, 254, 274, 284, 285, 290, 291, 360, E:

476, 479, 481, 482, 486, 489, 490, 497, 508, 513). Şcoala elementară Petroşani Clasa VII-a. Oproiu Camil (E: 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 378, 378, 381, 382).

PLOIEŞTI. Clasa VII-a. Ciortan M. Vasile (E: 471, 473, 474, 477. 479, 497, 508, 523. clasa IX-a. Anghelescu A. Cornel (1258, 304, 306, 310, 316, E: 471, 478, 479, 505, 510, 512). Aldea S. Mihai (1248, 252, 256, 258, 294,294, 304, 306, E: 471, 473, 505, 521), Chirică Andrei (1248, 249, 251, 252, 254, 255, 256, 258, 266, 294, 301, 302, 304, 306, 310, E: 471, 505, 508, 519, 524), Dinu Constantin (1248, 249, 252, 257, 303, 304, 306, E: 471, 472, 477, 479, 505), Damian Serban (1248, 249, 252, 254, 256, 259, 260, 309, E: 476, 505, 508, 519), Dinescu Sorin (1252, 258, 294, 303, 306, 310, 316, E: 471, 477, 479), Geroşanu Sorin (1252, 256, 304, 312, E: 471, 477, 478, 479, 505, 510, 519), Georgescu Doru (1252, 1303, E: 471, 474, 475, 476, 477, 479), Georgescu Sorin (1249, 252, 255, 256, 258, 294, 301, 303, 304, 306, E: 479, 505, 508, 509), Ionescu Al. Vladimir (1256, 302, 304, 306, 312, 316, 474, 508, 513), Leonte Vasile (1248, 252, 254, 255, 256, 294, 306, 310, E: 473, 508), Ionescu Mircea (1248, 249, 255, 256, 266, 294, 301, 304, E: 475, 476, 478, 479, 505, 512, 519, 521), Lipcan S. (1252, 244, E: 472, 475, 479, 480, 482, 487, 492, 494), Mateescu Mihail (1256, 299, 302, 304, 306, 315, 316, E: 475, 508, 518), Mircea Sergiu (1248, 252, 256, 258, 266, 286, 288, 294, 297, 304), Macri I. Ion (1248, 251, 256, 294, 304, 316, E: 476, 505, 508, 513, 519, 521), Petrescu M. Răzvan (1248, 249, 252, 255, 256, 294, 304, 306, E: 473, 474, 475, 478), Rădulescu Gheorghe (1252, 255, 256, 294, 306, E: 471, 474, 477, 479), Spătaru Dinu (1248, 255, 256, 258, 294, 304, 306, E: 505, 508, 519), Ştefănescu Dan (1248, 252, 258, 266, 294, 297, 303, 304, 306, E: 475), Văgăunescu Gheorghe, (1248, 249, 252, 255, 258, 266, 303, 304, 306, E: 505), Voicu Aurel (1252, 256, 258, 305, 306, E: 471, 475, 479, 482, 487); clasa X-a. Popescu Gh. Dumitru (1141, 149, 152, 159, 165, 183, 217, 221, 232, 240, 241, 243, 246, 284, 302, 306, 316), Teodorescu I. Ştefan (1249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 258, 261, 265, 267, 269, 272, 274, 275, 276, 277, 278, 284, 286, 288, 289, 290, 292, P), absolvent Parepa C. Grigore (250, 252, 253, 255, 256, 260, 261, 266, 269).

PREDEAL. Absolvent Alexa I. Ioan (1257, 259, 266, 275, 278, 280, 284, 306, 314, 316).

RÎMNICUL VÎLCEA. Absolvent Roşianu C. Dragomir (1221, 242, 252, 261, 265, 276, 277, 282, 286, 292, 296, 298, 303, 306, 310, 312, P).

REGHIN. Şcoala elementară Apalina. Clasa V-a. Oprea Viorel (E: 471, 474, 475, 479, 481, 482, 483, 484, 487, 488).

REŞIŢA. Weiss Adolf (1252, 254, 255, 256. 272, E: 471, 474, 476, 477, 478, 479, 470); clasa VI-a. Garant Valter (1284, E: 474, 479, 481, 482, 483, 484, 486, 487, 488).

ROMAN. Clasa X-a. Stoica C. Constantin (1252, 315, 319, 337, E: 479, 488, 494, 499, 505, 519, 520); S.t.c.a. anul III. Bacalu Ioan (1248—261, 263, 265—269, 271—280, 282—294, 296—307, 309, 310, 312—319).

SATU MARE. X-a. Lipovan Ştefan (1274, 277, 288, E: 479, 481, 488, 498, 499, 500, 505).

SLATINA. Clasa IX-a. Constantinescu C. Teodor (1252, 253, 254, E: 453, 471, 473, 475, 529).

SUCEAVA. Clasa X-a. Moroşan Dumitru (1252, 277, 306, 342, 343, E: 505, 508, 526, 527, 528, 530, 531), Rotaru Constantin (1249, 276, 277, 288, 303, 306, 320, 326, 342, 343, E: 481, 482, 483, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 531, 532, 533).

TÎRGOVIŞTE. Clasa VII-a. Bezdeag. Paraschiv D. Elena (E: 457, 466, 473, 476, 477, 478, 479, 497, 501); clasa X-a. Stoian I. Gheorghe (1127, 193, 195, 202, 203, 204, 207, 209, 227, 229, 230, 233, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 247, 250, 252, 255, 256, 262, 267, 274, 275, 277, 278, 286, 288, 289, 293); Şcoala medie tehnică de petrol, anul IV. Enăchescu D. Stoian (1248, 249, 250, 252, 253, 255, 261, 262, 267, 274).

TÎRGU JIU. Clasa IX-a. Amzulescu C. Liana (1248, 249, 276, 297, 314, 339, E: 508, 510, 525, 528).

TÎRGU MUREŞ. Clasa IX-a. Matei Aurel (E: 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480), Nicolescu Claudiu (1248, 249, 252, 253, 254, 259, 260, 266, 268, E: 471, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479); clasa X-a Iaina Adrian (1248, 249, 252, 253, 258, 259, 260, 261, 264, 265, 266, 267, 268, E: 471, 472, 473, 474, 475, 477, 476, 478, 479, 480), Rusnac R. Mihail (1248, 252, 253, 258, 259, 260, 261, 264, 265, 266, 268, 269, E: 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480), Stefaneli C. Dorin (1248, 252, 253, 258, 259, 260, 261, 264, 265, 266, 268, 269, E: 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480).

TIRGU NEAMŢ (Bacău). Clasa IX-a. Focşăneanu I. Ioan (1248, 252, 261, E: 464, 471, 472, 474, 475, 476, 479, 480).

TECUCI. Clasa IX-a. Sandu Stancu (1152, 165, 183, E: 409, 411, 412, 413, 418, 424, 414, 447, 452), Profesor Orsivski Claudiu («Descoperirea şi proprietăţile elementelor noi» A).

TIMIŞOARA. Liceul 1 băieţi, clasa VIII-a. Mihăileanu N. Constantin (1333, E: 480, 512, 514, 516, 518, 526, 527, 530, 531); Şcoala medie de energie electrică, anul IV. Flincher Gheorghe (1252, 255, 261, 272, 274, 277, 285, 287, 288, 289, 296, 312, 315, 316, 317); şcoala medie tehnică financiară, anul III Popa Laurenţiu (1299, 302, 303, 304, 310, 314, 315, 316, 317, 318, E; 508, 513); şcoala pedagogică mixtă, anul IV. Metler Martin (1217, 231, 232, 310, E: 461, 467, 468, 505, 510, 519).

VASLUI. Clasa IX-a, Stăncescu I. Viorel (1239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 252, 254, 276, 287, 288, E: 415, 416, 418, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 431, 433, 435, 436, 437, 439, 440, 441, 442, 444, 446, 447, 448, 499, 450, 451, 454).

ZALĂU. Clasa IX-a. Ceascaiu Mircea (471, 475, 478, 505, 515, 518, 519, 521, 528, 532).

EVIDENŢIAŢI

In cursul lunii octombrie 1954 s-au evidenţiat următorii rezolvitori de probleme:

Voicu Traian (anul III, şcoala medie electrotehnică, Craiova), *Galaţky Gheorghe* (clasa X-a, Tîrgovişte), *Zigulescu D. Marin* (student, Bucureşti), *Gervescu M. Ion* (clasa VII-a Roznov, P. Neamţ), *Stroe Radu* (clasa X-a, Ploieşti), *Bădescu Marcel* (clasa X-a, Lic. «Aurel Vlaicu», Bucureşti), *Căluianu Nicolae* (clasa X-a, Roman), *Cetăţeanu Cecilia* (absolventă, Craiova), *Duduica Radu* (Clasa IX-a, L.b.2, Bucureşti), *Draica Constantin* (clasa VIII-a, Lic. «Aurel Vlaicu», Bucureşti), *Bucur D. Gheorghe* (Pucioasa), *Mitrofan Gh.* (absolvent, Caransebeş).

* * *

In cursul lunei octombrie 1954 s-au primit cîte cel puţin zece soluţii bune la problemele propuse în ultimele patru numere ale «Gazetei Matematice şi Fizice» seria B, după cum urmează:

ALBA IULIA. Torsan Ilie (1294, 304, 313, 333, 337, 339, 358, 361, 362, E: 510, 511, 515, 521, 522, 523, 524, 525 526, 529, 530, 531, 532, 533, 546).

AGNITA. Clasa VII-a. Iavernoiu Gheorghe (E: 447, 448, 452, 454, 461, 467, 475, 479, 493, 518).

ARAD. Şcoala pedagogică Anul IV. Căpitan I. Gh. (E: 427, 428, 431, 457, 458, 459, 460, 469, 471, 479). Şcoala elementară Variaş, clasa VII-a. Ruxandra Claudia (E: 469, 471, 479, 523, 524, 529, 530, 531, 532, 533).

BACĂU. Clasa X-a. Palaghiţă I. Ştefan (1261, 269, 277, 287, 289, 297, 302, 310, 340), Simion I. Emil (1252, 253, 261, 282, 289, 292, 306, 310, E: 481, 482, 484), Ştefănescu Marilena (1326, 339, 342, 354, E: 499, 505, 510, 536, 537, 540), Tofan V. Vasile (1282, 306, 310, 315, 316, 342, E: 526, 537, 540, 546).

BÎRLAD. Clasa X-a. Pavel N. C. (1360, 361, E: 527, 528, 535, 536, 537, 538, 540, 547), absolvent Pîrvu Aurel (1337, 349, 354, 358, 371, E: 527, 528, 529, 533, 536, 537, 538, 540).

BOTOŞANI. Clasa. IX-a. Filip Mariana (1276, E: 475, 481, 482, 488, 499, 505, 521, 526, 528, 529), Bîrzoi Maria (1276, 342, E: 481, 482, 483, 488, 499, 505, 521, 529, 535), Fraiberg Ella (1276, 342, E: 476, 481, 484, 483, 505, 526, 529, 530), Mozes Etty (1273,

342, E: 476, 481, 482, 483, 505, 526, 528, 529, 530), Sin Moise Silvia (E: 457, 472, 481, 482, 483, 490, 499, 505, 526, 530); clasa VI. Ionescu Doina (E: 481, 482, 483, 484, 486. 487, 505, 522, 523, 535).

BRAD (Hunedoara). Şcoala elementară Gurabarza, clasa VI-a. Maşek Corneliu (E: 505, 510, 515, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533).

BUCUREŞTI. Liceul 6 fete. Clasa IX-a. Nicolau Ileana (1297, 315, 316, 317, 335, 336, 342, E: 471, 473, 505, 508, 509, 510, 512, 515, 518, 519, 521, 528, 531).

Liceul 2 băieţi. Clasa IX-a. Duduica Radu (1273, 274, 276, 278, 320, 329, 340, 341, 342, 343, 347, 351, 354, 358, 362, 363, 370, E: 482, 487, 490, 510, 512, 513, 528, 530, 531, 546).

Şcoala medie de băieţi nr. 4 «Aurel Vlaicu», fost l.b. 10, Griviţa Roşie, clasa VIII-a. Draica Constantin (E: 389, 392, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 406, 407, 408, 410, 415, 420, 423, 425, 427, 430, 431, 433, 440, 445, 447, 449, 451, 454, 455), Stamatoiu Petre (E: 499, 505, 519, 521, 522, 526, 530, 531, 532, 537, 540), Zvorişteanu Alexandru (1252, E: 457, 473, 475, 476, 477, 478, 479, 530, 546, P); clasa IX-a. Petre T. Tudor (1306, E: 471, 473, 478, 482, 494, 521, 524, 526, 530); clasa X-a. Dumitrescu Badea Ovidiu (1165, 167, 204, 222, 230, 245, 251, 252, 287, 292, 297, 312, E: 520), Spătaru Ion (1330, E: 524, 536, 537, 539, 540, 541, 546, 547, 548), Zlătaru Adrian (1240, 306, E: 505, 510, 512, 523, 536, 540, 546), Bădescu Marcel (1166, 167, 173, 179, 181, 184, 185, 186, 187, 196, 274, 276, 286, 289, 290, 301, 302, 323, 326, 333, 334, 335), Popescu M. Octavian, 1165, 221, 242, 251, 252, 287, 297, 303, 306, 310), Rudnic Marian (1333, 339, 342, E: 505, 514, 522, 523, 524, 526, 528, 529, 530, 532, 533), Vraciu Petre (E: 479, 482, 490, 497, 505, 510, 523, 526, 529, 530).

Şcoala medie de măsurători terestre, anul II. Popescu Paul (1276, 306, 315, 316, 340, 342, 358, E: 505, 506, 510, 512, 515, 518, 519, 520, 521, 522, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 535, 536, 537, 538, 540, 541, 542, 544, 547, 549).

Şcoala medie tehnică mecanică nr. 2. anul II. Pescaru Nicolae (E: 481, 482, 483, 484, 487, 489, 491, 497, 499, 540, 546).

Şcoala medie tehnică de construcţii, anul IV. Fomov Mihai (1310, E: 505, 506, 507, 509, 510, 512, 515, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 526, 528, 535, 538, 541, 546, 547, 548).

BUZĂU. Clasa X-a. Cristea Pompiliu (1140, 278, 292, 297, 315, 316, 337, 340, E: 402, 404, 407, 447, 448, 471, 479, 505, 519, 522), Ioniţă Aurelia (1152, 159, 165, 221, 252, 221, 252, 261, E: 447, 452, 454, 471, 472, 478, 479, 505, 524, 526, 528), Marinescu Doina (1302, 326, 339, 340, 342, 354, E: 482, 483, 490, 497, 505, 510, 514, 526, 527, 529, 530, 537, 540, 546), Sandu Eleonora (1276, 342, E: 483, 488, 497, 499, 505, 512, 529, 531).

CĂLĂRAŞI. *Şcoala medie de mecanizarea agriculturii*, anul IV. Banu Alexandru (1272, 301, 306, 312, 340, 341, E: 505, 531, 546); clasa X-a. Vasilescu Aurel (1273, 274, 275, 277, 278, 290, 291, 292, 293, 297, 306, 314, 323, 326, 333, 335, 339, 340, 342).

CÎMPULUNG MUSCEL. Clasa IX-a. Enăchescu I. Victor (1306, 316, 354, E: 481, 487, 488, 505, 515, 519, 521, 539, 449).

CARANSEBEŞ. Absolent: Mitrofan Gh. (1295, 300, 301, 302, 303, 304, 306, 307, 310, 312, 314, 321, 323, 326, 333, 339, 340, 342, 345, E: 505, 508, 510, 512, 513, 515, 521, 524, 526, 530, 531, P).

CONSTANŢA. *Şcoala medie hidrotehnică.* Anul II. Dagla M. Elena (1306, 312, 315, 342, 358, E: 505, 513, 514, 519, 525, 531, 540, 546), Ghencea Adrian (1276, 282, 310, 315, 316, E: 505, 510, 517, 519, 530), Vasiliev Lucia (1306, 310, 312, 315, 3.7, 342, 358, E: 505, 513, 514, 519, 525, 531, 540, 546). Clasa IX-a. Pascu Liliana (E: 505, 508, 510, 513, 524, 522, 526, 528, 529, 532).

CRAIOVA. *Şcoala medie electrotehnică*, anul III. Voicu I. Traian (1273, 274, 275, 277 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 294, 296, 297, 302, 303, 304, 306, 312, 313, 314,

320, 321, 323, 325, 326, 333, 339, 340, 342, 349, 353, 354, 356, 358, 362, 363, 367, P); clasa IX-a. Sandu Gh. (1065, 68, 191, E: 404, 406, 411, 413, 418, 423, 424, 428, 435, 436, 443, 447, 460, 463, 512, 514). Absolventă Cetăţeanu Cecilia (1273, 275, 276, 289, 290, 292, 293, 296, 297, 302, 303, 306, 312, 314, 315, 316, 318, 319, 326, 331, P).

FOCŞANI. Clasa X-a. Ţiru Emil (1314, 323, 360, E: 499, 508, 511, 513, 526, 532, 535, 546).

HUŞI. Vutcani, Absolvent Bostan Mircea (1273, 274, 275, 277, 278, 286, 287, 288, 289, 290, 292, 297, 303, 306, 314).

IAŞI. Murăraşu Dionisie (1306, E: 471, 473, 474, 477, 478, 479, 484, 528, 532), Bulai V. (1306, 310, E: 471, 473, 474, 477, 478, 481, 482, 484); clasa VIII-a. Chişleag Florin (E: 498, 505, 512, 527, 530, 531, 532, 534, 535, 539, 540, 587).

ORADEA. Clasa IX-a. Pantea Ovidiu (1084, 85, 87, 88, E: 370, 373, 374, 382, 387, 389, 396), Vicuş T. Corneliu (1142, 148, 152, E: 411, 413, 425, 427, 428, 429, 430, 435, 436); clasa X-a. Rus N. Nicolae (1248, 249, 252, 253, 274, 286, 287, 297, 315, 316, 317, 318, 319), Rus A. Ion (1287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 299, 334, 339, 341, 342, 343, 346, 349, 351, 354, 360, 361, 362, 363); clasa X-a. Buzuloiu Vasile (1080, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88. 89, 90, 91, 93), Gulaşu Silviu (1278, 288, 294, 312, 314, 324, 326, 333, 339, E: 532, P), Şincai Radu (1273, 385, 276, 287, 290, 293, 297, 303, 306, 313, 316, 342, E: 519, 521, 522, 523, 524, 526, 529, 530, 531, 532) P), Boţan Iuliu (1342, 354, E: 522, 523, 524, 528, 529, 531, 532, 533, 535, 540, 542, 543, 544, 546, 549).

ORAŞUL STALIN. Clasa IX-a. Ciobanu Ioan (1276, 290, E: 475, 476, 482, 505, 512, 519, 528, 530, 533).

PIATRA NEAMŢ. *Şcoala elementară Roznov.* Clasa VII-a. Gervescu M. Ion (1310, E: 505, 507, 508, 510, 512, 513, 515, 517, 519, 522, 523, 524, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 535, 536, 537, 539, 541, 543, 546, 547, 549).

PLOIEŞTI. Clasa VIII-a. Constantinescu St. Vasile (E: 505,, 515, 517, 519, 520, 526, 527, 535, 540, 544, 546), Savu Naum (idem), Stănescu H. Constantin (idem); clasa X-a. Brozici Mircea (1273, 274, 275, 276, 277, 278, 284, 287, 288, 289, 297, 301, 302, 306, 310, 313, 314, 315, 316, 325), Radu Stroe (1278, 280, 286, 294, 296, 298, 299, 312, 315, 316, 320, 321, 322, 323, 324, 333, 337, 338, 339, 349, 351, 354, 356, 358, 359, 362, 363, 366, P).

PUCIOASA (regiunea Ploieşti). Bucur D. Gheorghe (1294, 306, 310, 315, 316, 317, 333, 334, 337, 338, 340, 342, E: 507, 508, 511, 512, 513, 515, 518, 519, 520, 521, 523, 524, 525, 526, 528, 529, 530, 531, 532, 533).

RÎMNICU-VÎLCEA. Cîrstoiu C. Barbu (1274, 342, 349, 359, 363, E: 497, 499, 528, 529, 532, 533), Mateescu Ion (1310, 314, 315, 316, 317, 318, 339, E: 505, 506, 508, 510, 515, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 531, 532), Tudor Gheorghe (1273, 374, 375, 376, 378. 380, 284, 286, 289, 291).

ROMAN. *Şcoala medie de mecanizarea agriculturii*, anul IV. Ursoiu Vasile (E: 481, 486, 500, 505, 506, 510, 512, 517, 520, 521, 538, 539, 540, 541, 546, P, 1286, 289, 291, 293, 294, 296, 312, 370); clasa X-a. Căluianu Nicolae (1253, 254, 255, 273, 276, 289, 290, 291, 293, 296, 302, 304, 306, 310, 312, 315, 316, 319, E: 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 493, 494, 496, 497, 498, 499, 500, 502, 505, 506, 507, 508, 510, 515, 517, 518, 520, 521).

SLATINA. Clasa X-a. Ghergu N. Ion (1261, 306, 314, 339, 340, 341, 342, 358, E: 489, 508, 511, 512, 514, 523, 526, 527, 528, 530, P).

SIGHIŞOARA. Clasa X-a. Ute Roth (1306, 333, 339, 342, 354, 354, E: 524, 528, 529, 532, 533).

TÎRGOVIŞTE. Clasa IX-a. Stănciulescu Mihai (1315, 334, 336, 337, 360, E: 478, 496, 510, 525, 526, 527, 529, 532, 538, 546, 549, P); clasa X-a. Galaţky Gheorghe (1216, 227, 229, 233, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 252, 261, 276, 277, 301, 302, 303,

306, 321, 323, 326, 334, 340, 342, 346, 347, 349, 352, 354, 356, 358, 363, 364, 365, 366, P). Stoian I. Gheorghe (1276, 301, 302, 303, 306, 320, 321, 323, 334, 346, 347, 349, 354, 358, 363, 364, 365, 364, 369, P).

TÎRGU-JIU. Clasa VI-a. Velicescu Mircea (E: 505, 509, 510, 515, 521, 522, 523, 524, 526, 529, 530. 531, 532, 533,).

TIMIŞOARA. Clasa VIII-a. Mihăileanu Constantin (E: 413, 414, 416, 417, 452, 464, 465, 470, 473, 475); clasa IX-a. Cismaru Ionică (1340, 354, 358, E: 460, 471, 477, 478, 497, 499); clasa X-a. Weiss Adolf (1273, 275, 276, 277, 282, 286, 290, E: 481, 482, 483, 484, 486, 487, 488, 490, 497, 499).

ZALĂU. Clasa VIII-a. Moraiti Cornel (E: 479, 511, 512, 525, 526, 529, 530, 531, 532); clasa IX-a. Farcaş Beniamin (1310, 336, E: 475, 379, 505, 511, 512, 519, 530, 531, 532).

* * *

În vederea *clasificării evidenţiaţilor* pentru activitatea lor la G.M.F.—B pe anul 1954, aceştia sînt rugaţi să ne trimită numărul total de probleme anunţate la rubrica rezolvitorilor în tot anul 1954, după cum se arată şi pe ultima pagina a copertei.

TABLA DE MATERII

A «GAZETEI MATEMATICE ŞI FIZICE», SERIA B. ANUL V (1954)

I. ARTICOLE

Pag.

1. ARMEAN ION, conf. univ. Cluj: Aplicarea metodei exhaustiunii în demonstraţia geometrică 234
2. ATANASIU VIRGIL, lector, Bucureşti: Marie Curie 217
3. ATANASIU VIRGIL, lector, Bucureşti: Spectroscopia şi aplicaţiile ei 313, 372
4. BĂDĂRĂU EUGEN, acad.: Dezvoltarea opticei în R.P.R. în anii 1944-1954 267
5. BĂDĂRĂU EUGEN acad.; Despre analiza luminiscentă 412
6. BARBALAT ION, conf. univ., Bucureşti: Cum apar unele numere iraţionale în geometrie şi despre calculul lor cu ajutorul algoritmului lui Euclid 29
7. BĂRBULESCU N., prof. univ., Bucureşti: Despre momentul de inerţie 60
8. CRISTEA CONST., asist. univ., Bucureşti: Gheorghe Lazăr 174
9. COTARIU M., asist. univ., Bucureşti: Problema interpolării 94
10. DAIMACA V., astronom, Bucureşti: Cerul în septembrie 277
11. DRÂMBA C., prof. univ., Bucureşti: Eclipsa totală de soare dela 30 iunie 1954 142
12. FISSGUS S, TEHNICIAN, LUPENI: Despre sisteme de numeraţie 321
13. IONESCU-ŢIU C. asist. univ., Bucureşti: Asupra valorilor reale ale unor funcţii de variabilă reală 381
14. IOSIFESCU MARIUS, student Bucureşti: Raportul anarmonic 428
15. MAVRODIN ELENA, conf. univ., Bucureşti: Unele aplicaţii ale transformării geometrice prin inversiune 3
16. MAURER I., lector, univ. Cluj. Despre geometria numerelor 461
17. MIHĂILĂ N., conf. univ., Bucureşti: Despre vectori 366, 419

Pag.

18. MIHĂILEANU N., prof. univ., Timişoara: Observaţii preliminare asupra unor probleme de geometrie 140
19. MOISIL C. GR., acad., Bucureşti: Meseria de matematician 121
20. NEGULESCU ANGELA, prof. înv. med., Bucureşti: Căldura şi temperatura 8
21. OLIVOTTO I., prof. înv. med., Bucureşti: Istoria logaritmilor 123
22. POP. A: Despre unele proprietăţi ale funcţiilor omografice 477
23. POPESCU FLORICA, asist. univ., Bucureşti: Presiuni joase şi presiuni înalte .. 101
24. SACTER O., conf. univ., Bucureşti: Cum apar unele linii curbe geometrice în practica vieţii şi în tehnică 273
25. SANIELEVICI AL., conf. univ., Bucureşti: Radioactivitatea artificială 220
26. STĂNESCU N., conf. univ., Bucureşti: Gama undelor electro-magnetice 179
27. STĂNESCU N., conf. univ., Bucureşti: Construirea unui polariscop 385
28. SZANTO ARPAD, conf. univ. Universitatea «I. Bolyai», Cluj: Problema electrizării prin frecare 127
29. TEODORESCU ION, prof. înv. med., Valea Călugărească: Capacitatea butoaielor 239
30. TEODORESCU N., prof. univ., Dimitrie Pompeiu 409
31. Tineri, studiaţi şi adînciţi opera marelui geniu al omenirii muncitoare, Vladimir Ilici Lenin 1
32. Folosirea energiei atomice 36
33. Săptămîna mondială a tineretului 57
34. 1 Mai 89
35. Despre Facultăţile de Matematică şi Fizică 90
36. Despre «Olimpiada Matematică 1954» pentru elevii şcolilor medii 169
37. La a zecea aniversare a eliberării patriei noastre 265
38. «Luna Prieteniei Romîno-Sovietică» 361
39. Despre cercurile de matematică şi fizică în şcoli 457
40. Despre opera marelui fizician Sovietic S. I. Vavilov 363
41. Olimpiada tinerilor matematicieni, 1954 452

II. DIVERSE

Cercurile de matematică şi fizică

— Pagina cercurilor 415, 457, 492
— Să construim cu mijloace proprii; modele şi aparate de fizică 15, 68, 71, 285, 336, 385, 436, 457.
— Presiunea radiaţiilor (Alex. Butucelea, elev) 281
— Despre sistemele de numeraţie (S. Fissgus, tehnician, mina Lupeni) 321
— Drepte isogonale (Florin Constantinescu, elev cl. X, L. b. 3, Cluj) 325
— Din experienţa cercurilor de matematică ale elevilor claselor V—VII din şcoala sovietică (I. Vais., asist. univ. Institutul Pedagogic, Bucureşti) 329
— Asupra valorilor reale ale unor funcţii de variabilă reală (C. Ionescu-Ţiu) 381
— Raportul anarmonic (Marius Iosifescu student Bucureşti) 428
— Olimpiada de matematică şi fizică pe anul 1954—1955 452
— Construirea unui dispozitiv pentru experienţe de optică 15
— Construirea unui dispozitiv pentru a demonstra mişcarea de reacţie 68
— Model de dielectric în cîmp electric 68

Pag.

— Demonstrarea cîmpului magnetic al unui curent rectiliniu 69
— Construirea unui fotometru 69
— Determinarea acceleraţiei în căderea liberă 70
— Probleme — experienţe — întrebări clasele VI—X:
Sifonul. Mişcarea compusă. Electrizarea corpurilor şi neutralizarea sarcinilor electrice. Inerţia. Presiunea lichidelor. Condensarea aburului. Dependenţa frecvenţei oscilaţiilor sonore de lungimea coloanei de aer 71
— Spectrul de absorbţie. Forţa electromotoare de inducţie proprie 72
— Dispozitiv pentru studiul mişcării circulare 285
— Plutitorul Descartes. Morişca hidraulică 336
— Construirea unui polariscop 385
— Oscilograf cu oglindă. Plămînul ca maşină de ridicat. Nivela simplă. Morişca hidraulică de T. Laszlo 436
— Construcţia şi gradarea unui ampermetru de V. Pavlu 473

3. Poşta redacţiei

Pag: 81, 116, 156, 257, 305, 400.

III. CHESTIUNI DE EXAMEN

1. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic, Iaşi 109
2. Probleme date la admiterea în Facultatea de Matematică şi Fizică din Cluj 109
3. Probleme date la «Olimpiada Matematică» din Iaşi la 7 martie 1954 146
4. Probleme date la admiterea în Institutul Tehnic, Galaţi 147
5. Probleme propuse la «Olimpiada Matematică», etapa pe ţară 205
6. Probleme propuse la «Olimpiada Tinerilor Matematicieni», etapa I, 1954..... 50
7. Probleme propuse la «Olimpiada Tinerilor Matematicieni», etapa II 1954 208
8. Probleme date la admiterea în Institutul de căi ferate, Bucureşti 1954..... 387
9. Probleme date la admiterea în Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti 1954 .. 388
10. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic, Timişoara 1954 438
11. Probleme date la admiterea în Institutul Politehnic, Bucureşti 1954 439

IV. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

1. **Probleme propuse.** Nr. 1140-1163 (pag. 22); 1164-1192 (pag. 47); 1193-1213 (pag 78); 1214-1238 (pag. 113); 1239-1247 (pag. 109); 1248-1256 (pag. 146); 1257-1272 (pag. 152); 1273-1293 (pag. 204); 1293-1319 (pag. 252); 1320-1345 (pag. 299); 1346-1371 (pag. 348); 1372-1386 (pag. 387); 1387-1407 (pag. 394); 1408-1416 (pag. 438); 1417-1440 (pag. 446); 1441-1468 (pag. 487).

2. **Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani.** Nr. E. 401-410 (pag. 24); 411-421 (pag. 49); 422-446 (pag. 50); 447-45 (pag. 80); 457-470 (pag. 115); 471-480 (pag. 155); 481-504 (pag. 208); 505-521 (pag. 255); 522-533 (pag. 303); 534-549 (pag. 351); 550-562 (pag. 397); 563-575 (pag. 450); 57 -590 (pag. 491).

3. **Rubrica rezolvitorilor de probleme:** pag. 25, 52, 82, 117, 157, 212, 257, 306, 354, 400, 453, 494.

4. **Redactarea soluţiilor:** pag.: 30, 57, 79, 121, 167, 217, 265, 313, 361, 408.

5. **Premierea rezolvitorilor:**
— Premiile Revistei Matematică şi Fizică pe anul 1953..... pag. 58.
— Rezultatul olimpiadei tinerilor matematicieni 1954 (pag. 452).

— Rezultatul « Olimpiadei Matematică 1954», etapa IV finală pe țară, București 3 mai 1954 (pag. 173)

6. **Tabelul propunătorilor de probleme:** Andreescu Mircea (1181), Arcanu Dumitru (1208), Armean Ion (1140), Arsintescu Virgil (1226, 1272), Atanasiu Virgil (1199, 1214, 1390), Bazacov Gh. (1142, 1258), Bercea Gh. (1150, 1201, 1265, 1330, 1450), Berdan Const. (1307), Brezeanu Ioanin (1448) Bocu Mircea (1175, 1209), Brașovan Ion (1152), Brebu G. (1417, 1462) Buicliu Gh. (1311), Ciomu N. (1310), Cocoș Emanuel (1297, 1451), Codreanu Irinel (1146), Constantinescu Florin (1148, 1301, 1420) Costăchescu C. V. (1213, 1264, 1434), Coșa Dan (1313), Cotariu Marcel (1161, 1457), Cristea Ion (1221, 1299, 1426) Cristici Borislav (1143), Dobrescu Andrei (1428) Drăgoescu I. (1185, 1443), Erdniev P. (1388), Georgescu Corneliu (1218, 1259), Gheorghiu N. (1302), Ghibș I. (1387), Haim David (1262, 1267) Hamzin H. (1229, 1391) Iavorschi I. (1189, 1193, 1235), Ionescu S. V. (1399, 1447), Ionescu-Țiu Constantin (1144, 1155, 1166, 1188, 1200, 1222, 1233, 1263, 1303, 1305, 1322, 1352, 1363, 1369, 1393, 1401, 1402, 1422, 1427, 1435, 1438, 1446, 1455), Iosifescu Marius (1179, 1203, 1236, 1260, 1421) Kacenovschi M. (1295), Kiss Elemer (1157, 1174, 1452), Loziciu I. (1238), Lupuțin Ion (1457) Mîndru Anatolie (1204), Mănescu Mircea (1445), Mănescu L. (1404), Malcoci Vladimir (1153), Marini Marta (1405), Marinescu Gh. (1429), Matei Al. (1294), Mihăileanu N. (1165, 1314, 1320, 1321, 1349, 1392, 1403, 1436, 1437, 1449), Melnicov R. (1389), Minuț M. Petre (1439) Nazarie Matei (1183, 1268, 1396, 1371), Neumann Maria (1173), Onofras Eugen (1147, 1463), Păun N. (1454).

Panu D. C. (1187, 1196, 1266), Paraschiv Willy (1187, 1212, 1398), Petrovici Radu (1195), Popescu Alex. (1453), Popescu Mihai (1158, 1178, 1215, 1309, 1332, 1355, 1394), Popescu Sergiu (1260, 1296), Pupăzan N. (1182), Racoveanu Em (1271), Roșca Ion (1194), Sălan Nicolae (1270), Savciuc P. (1323), Serban Ion (1141), Șerb Gabriel (1424), Simionescu D. Gh. (1190, 1350, 1484) Simion Petre (1151, 1171, 1225, 1306, 1327), Stănescu N. (1162, 1163, 1164, 1180), Stănăsilă Octavian (1465) Stoenescu Alexandru (1160, 1400), Stroe Radu (1326, 1423) Tița Nicolae (1154, 1206), Torjescu Florin (1145, 1202, 1234, 1395, 1467) Vasilescu Constantin (1304), Weszelly Tiberiu (1237), Zidăroiu Corneliu (1325) Zigulescu Marin (1149, 1441).

7. **Tabelul propunătorilor de exerciții și probleme pentru școala de 7 ani:** Bercea G. (E: 417, 420, 476), Brezeanu Ioanin (E: 560), Butoi Mihaela (E: 565) Constantinescu Florin (E: 534), Cristea Ion (E: 514, 547), Ciomu N. (E: 471), Constantinescu Ilie (E: 516), Dăscălescu H. (E: 464, 523), Galațchi Gh. (E: 538), Grăjdeanu Petre (E: 554) Ionescu-Țiu C. (E: 409, 412, 424, 447, 456, 462, 466, 477, 508, 509, 510 526, 527, 536, 537, 550, 551, 558, 567, 589, 590), Ionescu Ion (E: 480), Iliescu Florian (E: 546), Lezeu Aurel (563) Juneu Gelu (E: (571, Ivănceanu Tatiana (E: 574) Kiss Elemer (E: 553), Mihalcea Stefan (E: 477), Mușat Ioan (E: 507, 515), Mihail Ion (E: 548), Nazarie Matei (E: 300), Neumann Maria (E: 419), Popescu Mihai (E: 404, 413, 453, 513), Popescu Sergiu (E: 402), Pantea Alexandru (E: 401), Paraschiv Willy (E: 451), Pandrea Nic. (E: 421), Petcu Mircea (E: 472), Roșianu Dragomir (E: 505), Rusnac Leonid (E: 540), Simon Petre (E: 512, 556), Stroe Radu (E: 470), Schileru Dinu (E: 475), Șerb Gabriel (564) Stănescu Viorica (E: 479), Stoian Gh. (E: 525), Tița Nicolae (E: 474), Torjescu Florin (E: 544), Tudor Silviu (E: 473), Zigulescu Marin (E: 511), Zaharescu Marius (E: 452, 464, 549), Zidăroiu Corneliu (E: 465).

8. **Probleme rezolvate.** In paranteză este trecută pagina unde s-a publicat soluția problemei: 284 (389); 543 (41); 645 (18); 668 (110); 689 (41); 729 (18); 741 (42); 746 (18); 750 (19); 754 (42); 764 (19); 789 (19); 792 (42); 793 (20); 795 (20); 796 (20); 817 (42); 819 (20); 821 (73); 823 (21); 824 (21); 825 (73); 845 (21); 847 (21); 855 (22); 856 (110); 858 (73); 859 (74); 860 (111); 861 (111); 863 (74); 866 (42); 867 (43); 869 (43); 877 (111); 880 (44); 882 (112); 884 (112); 885 (112); 886 (191); 888 (45); 889 (45); 892 (45); 893 (46); 894 (75); 897 (75); 900 (46); 901 (191); 904 (75); 907 (192); 908 (76); 909 (76); 912 (76); 916 (76); 918 (77); 920 (77); 922 (193); 924 (77); 929 (192); 933 (194); 934 (195); 936 (196); 937 (196);

941 (197); 943 (337); 944 (197); 945 (198); 946 (198); 948 (198); 949 (199); 950 (199); 951 (200); 952 (200); 953 (200); 958 (200); 959 (201); 960 (201); 961 (202); 968 (244); 1006 (148); 1007 (245); 1008 (338); 1009 (245); 1010 (248); 1011 (149); 1012 (245); 1014 (245); 1025 (246), 1026 (247); 1027 (247); 1028, 1029 (248); 1030 (248); 1031 (248); 1033 (249); 1035 (249); 1036 (339); 1038 (249); 1043 (250); 1055 (340); 1057 (250); 1052 (341); 1059 (340); 1062 (287); 1065 (288); 1068 (241); 1069 (341); 1071 (342); 1072 (289); 1076 (342); 1077 (343); 1093 (343); 1099 (344); 1108 (345); 1124 (290); 1130 (290); 1131 (290); 1132 (291); 1133 (292); 1136 (390); 1141 (391); 1142 (294; 1148 (294); 1154 (345); 1155 (391); 1157 (392); 1158 (295); 1159 (440); 1163 (346); 1165 (394); 1166 (440); 1175 (441); 1177 (442); 1178 (347); 1179 (296); 1181 (442); 1182 (443); 1184 (444); 1185 (444); 1185 (444); 1186 (445); 1187 (445); 1188 (445); 1189 (481); 1190 (297); 1194 (481); 1195 (481); 1160 (393); 1162 (393); 1196 (482); 1197 (483); 1198 (484); 1199. (484); 1201 (485); 1206 (485); 1210 (486).

V. EVIDENŢIAŢI CA REZOLVITORI DE PROBLEME

1. Alexa Ion (Predeal) (pag. 83, 157, 400); 2. Alexandru Vasile (Giurgiu) (pag. 157); 3. Aldea Vasile (Bucureşti) (pag. 120, 400); 4. Apetrei Gheorghe (Viişoara) (pag. 157); 5. Apostol Gheorghe (Predeal) (pag. 83); 6. Andreescu G. Mircea (Bucureşti) (pag. 27); 7. Andreescu G. Radu (Bucureşti) (pag. 27, 83, 120, 157, 258, 400); 8. Andrescu Ştefan (Constanţa) (pag, 258); 9. Andrei M. Ilie (Caracal) (pag. 157); 10. Antoniu Ştefan (Caracal) (pag. 120); 11. Arsenovici Tiberiu (Timişoara) (pag. 157); 12. Arsintescu Virgil (Iaşi) (pag. 83, 157); 13. Bacalu Ion (Roman) (pag, 83, 456); 14. Bădănac M. Alexandru (Corabia) (pag. 120, 257); 15. Bădescu Marcel (Bucureşti) (pag. 496); 16. Baieră Bogdan (Focşani) (pag. 83, 120, 258, 354); 17. Balaban Emil (Galaţi) (pag. 120); 18. Bărbuică Nicolae (Craiova) (pag. 354, 456); 19. Bătineţu M. Dumitru (Giurgiu) (pag. 120, 157, 257, 400, 456); 20. Berechet M. Oprea (Focşani) (pag. 157. 258, 400, 455); 21. Boarţă Victor (Corabia) (pag. 120); 22. Bocu Mircea (Oradea) (pag. 27, 120, 157, 257, 400); 23. Bogaciu Valeriu (Piteşti) (pag. 456); 24. Boloca Ion (Cîmpulung Moldovenesc) (pag. 157, 354); 25. Bostan E. Hote (Vaslui) (pag. 120, 354); 26. Brebente P. Corneliu (Tîrgovişte) (pag. 157, 254, 400); 27. Brebu Ghgeorghe (Tîrgovişte) (pag. 120, 157, 354); 28. Bucur Gheorghe (Pucioasa) (pag. 496); 29. Budai Teodor (Suceava) (pag. 83, 120, 258, 354); 30. Budin Constantin (Predeal) (pag. 83); 31. Bumbac Paul (Constanţa) (pag. 157); 32. Bunica M. Octavian (Tg. Mureş) (pag. 83, 157, 258); 33. Buruiană Gheorghe (Focşani) (pag. 258, 354); 34. Butencu Igor (Oraşul Stalin) (pag. 83, 258); 35. Buzuloiu Vasile (Oradea) (pag. 27, 83, 157, 258, 400); 36. Căluianu Nicolae (Roman) (pag. 120, 496); 27. Cîmpu Eugen (Bucureşti) (pag. 120); 38. Cîmpu Demetra (Bucureşti) (pag. 400); 39. Cîrjaliu N. Marin (Giurgiu) (pag. 120); 40. Cazanacli Nicolae (Craiova) (pag. 83); 41. Cetăţeanu Cecilia (Bucureşti) (pag. 157, 496); 42. Chiţimia Eustaţiu (Chitila-Bucureşti) (pag. 157); 43. Ciric Ioan (Caransebeş) (pag. 120); 44. Chiricuţă Gheorghe (Dej) (pag. 120); 45. Ciucă Gheorghe (Caracal) (pag. 120); 46. Cocoş Emanuel (Constanţa) (pag. 120, 157, 257); 47. Colibaba Tiberiu (Galaţi) (pag. 400); 48. Coman Gheorghe (Predeal) (pag. 83); 49. Corban Adrian (Tecuci) (pag. 120, 157, 400); 50. Cosma Octavian (Oradea) (pag. 354); 51. Coşa Dan (Oraşul Stalin) (pag. 157); 52. Cristea Aurel (Bucureşti) (pag. 400); 53. Cristea I. Ion (Constanţa) (pag 120, 157, 257, 354, 456); 54. Cruceanu Viorica (Bucureşti) (pag. 157); 55. Dabija Sorin (Galaţi) (pag. 27, 83, 157, 258, 456); 56. Dănilă Gheorghe (Giurgiu) (pag. 27); 57. David Marta (Bîrlad) (pag. 258); 58. Dinu Gheorghe (Craiova) (pag. 120, 354); 59. Dogaru Mihai (Ploeşti) (pag. 83, 157); 60. Dogariu Ştefan (Focşani) (pag. 258); 61. Donescu St. Dragomir (Focşani) (pag. 83, 120, 157, 257, 354, 400); 62. Dragan St. Marin (Giurgiu) (pag. 157); 63. Dragomir Constantin (Piteşti) (pag. 27); 64. Draica Constantin (Bucureşti) (pag. 496); 65. Duduica Radu (Bucureşti) (pag. 496); 66. Dumitriu Constantin (Focşani) (pag. 83, 157, 354); 67. Duţu Gheorghe (Predeal) (pag. 157); 68. Elenberg Manfred (Bucureşti) (pag. 400); 69. Epuraş Mircea (Predeal) (pag. 400);

70. Faraga Gruia (Oraşul Stalin) (pag. 27); 71. Filimon Ştefan (Turnu-Severin) (pag. 27); 72. Fili oiu Miu (Curtea de Argeş) (pag. 83); 73. Fluer.u Constantin (Tecuci) (pag. 83); 74. Fotă M. Stan (Giurgiu) (pag. 83, 120, 257); 75. Galaţchi Gheorghe (Tîrgovişte) (pag. 83, 157, 496); 76. Galer Dumitru (Tecuci) (pag. 157); 77. Gavril Gheorghe (Piatra Neamţ) (pag. 120, 157); 78. Gavriluţ Mihai (Roman) (pag. 83, 354); 79. Gembaşu Lică (Iaşi) (pag. 157); 80. Ge vescu Ion (Piatra Neamţ) (pag. 120. 400, 456, 496); 81. Grabcev Boris (Predeal) (pag. 120, 157); 82. Gr ure Stefan (Ş atina) (pag. 258); 83. Grecul scu V. Ion (Predeal) (pag. 120, 157); 84. Guiaşu Silviu (Oradea) (pag. 354, 400, 456); 85. Herşcovici Iosif (Iaşi) (pag. 83, 120); 86. Hodiş Gheorghe (Zalău) (pag. 400); 87. Hustiuc Nicolae (Predeal) (pag. 83, 157); 88. Ianuc Corneliu (Focşani) (pag. 83, 157, 258); 89. Ienciu Doru (Reşiţa) (pag. 157); 90. Iliescu Florian (Craiova) (pag. 83, 354); 91. Iliescu Paul (Ploeşti(pag. 354); 92. Ionescu C istina (Bucecea — Botoşani) (pag. 120); 93. Ionescu Gabriel (Focşani) (pag. 354); 94. Ionescu Ion (Constanţa) (pag. 83); 95. Ionescu I. Ion. (Tîrgovişte) (pag. 27, 400); 96. Ionescu V. Savin (Piteşti) (pag. 257, 354, 400); 97. Iordache Dan (Constanţa) (pag. 157, 354, 400); 98. Iosifescu Marius (Piteşti) (pag. 121, 257, 400); 99. Ivănceanu Tatiana (Bucureşti) (pag. 400); 100. Jilăveanu. S. Gheorghe (B .icoi) (pag. 120); 101 Jipa Vasile (Ploeşti) (pag. 120, 257); 102. Juhas Ioan (Salonta) (pag. 120); 103 Junger Robert (Oradea) (pag. 157); 104. Kestenband Barbu (Bucureşti) (pag. 400); 105. Kümbetlian Gheorghe (Constanţa) (pag. 354); 106. Lambă Stelian (Constanţa) (pag. 354, 45), 107. Laszlo Ion (Tîrgu Mureş) (pag. 157); 108. Lazăr Dumitru (Rădăuţi) (pag. 120); 109. Lazăr Edith (Piatra Neamţ) (pag. 120, 354); 110. Lezeu F. Aurel (Beiuş) (pag. 27); 111. Lungu L. Ştefan (Brăila) (pag. 120); 112. Lupuţiu Ion (Ploeşti) (pag. 120, 157, 354, 400); 113. Mînzat Laurenţiu (Cluj) (pag. 258); 114. Marinescu Aida (Ploeşti) (pag. 400); 115. Matei A. Nicolae (Tîrgu Mureş) (pag. 83, 120 257, 400); 116. Matei Ioan (Tg. Mureş) (pag. 120); 117. Mazilu Alexandru (Bucureşti) (pag. 354); 118. Mazilu T. Constanţin (Bucureşti) (pag. 400); 119. Mettler Martin (Timişoara) (pag. 400); 120. Micu V. Florica (Tecuci) (pag. 120); 121. Mihăilă Ieronim (Roman) (pag. 83, 354), 122. Minuţ M. Petru (Piatra Neamţ) (pag. 83, 120, 258, 354, 400); 123. Mişcol Mircea (Giurgiu) (pag. 120, 157, 354); 124. Mitrofan Gheorghe (Caransebeş) (pag, 496); 125. Mărăndici Elena (Bucureşti) (pag. 120); 126. Morozan Teodor (Tecuci) (pag. 83, 120); 127. Mocanu I. Marin (Slobozia) (pag. 120); 128. Mureşan Traian (Baia Mare) (pag. 83); 129. Nan Stelian (Oraşul Stalin) (pag. 120, 157, 400); 130. Neamţu I. Ion (Tg. Jiu) (pag. 120); 130. Neguţ G. Nicolae (Bucureşti) (pag. 120. 354); 132. Nicolae St. Alexandru (Bucureşti) (pag. 120, 157, 257, 400); 133. Nicolescu Dan (Călăraşi) (pag. 157); 134. Nicolescu Miron (Bucureşti) (pag. 157); 135. Nistreanu Valeriu (Bucureşti) (pag. 157); 136. Oereanu Victoria (Sft. Gheorghe) (pag. 157); 137. Olarul Grigore (Tg. Jiu) (pag. 120); 138. Oprea A. Aurelian (Tîrgovişte) (pag. 120, 157, 400); 139. Oprea Constantin (Bucureşti) (pag. 400); 140. Opriş Ion (Cîmpulung Muscel) (pag. 400); 141. Oproiu Corne (Petroşani-Piteşti) (pag. 83); 142. Pala hia Gheorghe (Botoşani) (pag. 157); 143. Pandrea Nicolae (Focşani) (pag. 83, 157, 257, 354, 400, 4 6); 144. Pîrcălabu Marin (Giurgiu) (pag. 157); 145. Paşcan .i St. Eugen (Tîrgu Mureş) (pag. 120); 146. Petu I. Dumitru (Giurgiu) (pag. 83, 120, 157, 354, 456; 147. Petrică Zamfira (Bucureşti) (pag. 83; 157); 148. Petrovici Radu (Focşani) (pag. 27, 354, 400); 149. Pieleanu I. Dumitru (Giurgiu) (pag. 120, 354); 150. Popa A. Ioan (Piatra Neamţ) (pag. 120); 151. Popa Stancu (Corabia) (pag. 354, 400); 152. Popescu Cireşica (Craiova) (pag. 120); 153. Popescu Al. Dan (Reşiţa) (pag. 157, 354, 400); 154. Popescu I. Mihai (Craiova) (pag. 27); 155. Popescu Sergiu (Slatina) (pag. 120, 257, 400); 156. Popovici Iulian (Ploeşti) (pag. 354); 157. Popovici I. Radu (Bucureşti) (pag. 400); 158. Pricâ Constantin (Craiova) (pag. 157, 354); 156. Pristavu V. Ion (Piatra Neamţ) (pag. 83, 120); 160. Pupăză N. Nicolae (Tîrgu Mureş) (pag. 83, 258); 161. Pupăzan. V. Nicolae (Predeal) (pag. 27, 257, 354); 162. Purecel Remus (O aşul Stalin) (pag. 120); 163. Puşcaşu Alexandru (Ploeşti) (pag. 157); 164. Răduţ Nicolae (Predeal) (pag. 157); 165, Răileanu Gheorghe (Cîmpulung Mold.) (pag. 83); 166.

Răzuș Alexandru (București) (pag. 83); 167. Robănescu Adrian (Focșani) (pag. 258, 354); 168. Roșca Ion (București) (pag. 258); 169. Roșianu Dragomir (Rîmnicu Vîlcea) (pag. 354); 170. Rotaru N. Constantin (Suceava) (pag. 120); 171. Rus A. Ioan (Oradea) (pag. 157, 258, 354, 400, 456); 172. Rusu Constantin (Vîișoara) (pag. 157); 173. Sandu Ion (București) (pag. 157); 174. Sandu Iulian (Pitești) (pag. 120); 175. Sandu Titu (Craiova) (pag. 354); 176. Săraci M. Dumitru (Pitești) (pag. 83, 120, 258); 177. Săsărman Ion (Predeal) (pag. 83); 178. Savin Dan (Cîmpulung Muscel) (pag. 157, 354); 179, Schauermann Nicolae (Agnita) (pag. 157); 180. Schiopu Eugenia (Craiova) (pag. 120, 157); 181. Serb Gabriel Adrian (Pitești) (pag. 120, 257, 354, 400, 456); 182. Silion Dinu (Ploești) (pag. 120, 257, 354, 400); 183. Stăncic Octavian (Focșani) (pag. 354); 184. Stanciu E. Mirel (Giurgiu) (pag. 120, 400); 185. Stanciu N. Toma (Ploești) (pag. 120). 186. Stănescu Viorel (Vaslui) (pag. 456); 187. Stănuleț Mihai (Turnu Severin) (pag. 157); 188. Stavăr Iuga (Orașul Stalin) (pag. 157); 189. Steinberg Victor (Predeal) (pag. 83); 190. Stepan Ionel (Constanța) (pag. 157, 400); 191, Stroe Radu (Ploești) (pag. 120, 157, 354, 400, 496); 192. Stoian Gheorghe (Tîrgoviște) (pag. 157, 354, 456); 193. Stoicescu Dumitru (Buzău) (pag. 157); 194. Stoleru Gghoeghe (București) (pag. 157); Tănase Dumifru (București) (pag. 83, 120, 157, 258); 196. Teodorescu Mihai (București) pag. 157 354); 197. Teodorescu Ștefan (Ploești) (pag. 456); 198. Timpoc Dinu București) (pag. 258); 199. Todică Petre (Iași) (pag. 157); 200. Tofan V. Ionel (Bacău) (pag. 83, 120); 201. Tofan Liliana (Codlea, Orașul Stalin) (pag. 83); 202. Torjescu Florin (Ploești) (pag. 83, 157, 400); 103. Torsan Ilie (Predeal) (pag. 83); 204. Traian Vasile (Craiova) (pag. 120); 205. Tomescu Dan (București) (pag. 456); 206. Tugui E. Emil (Turnu Măgurele) (pag. 120); 207. Turcanu Ion (Tecuci) (pag. 83); 208. Uță Marin (Predeal) (pag. 27, 83, 400); 209. Vaisman Izu (Iași) (pag. 157); 270. Vasilescu Aurel (Călărași) (pag. 83, 157); 211. Vasilescu Constantin (Călărași) (pag. 83, 157); 212. Vasilescu Stelian (Piatra Neamț) (pag. 120); Velicescu Mitu (Giurgiu) (pag. 27, 120, 157, 354); 214. Velicescu Mircea (Tîrgu Jiu) (pag. 157); 215. Vidan Marius (Giurgiu) (pag. 120, 157, 400); 216. Vlădescu Gheorghe (București) (pag. 27, 157); 217. Vlaga Marius (Arad) (pag. 258, 400); 218. Voicu Traian (Craiova) (pag. 354), 496; 219. Vrăjitoru Dan (Aiud) (pag. 83, 354, 400, 456); 220. Vulpescu Dumitru (Ploești) (pag. 83, 400); 221. Weszelly Tiberiu (Tîrgu Mureș) (pag. 120, 400); 222. Zaharescu Marius (București) (pag. 400); 223. Zaharia Gheorghe (Focșani) (pag. 354); 224. Zamfirescu Mihnea (București) (pag. 258); 225. Zidăroiu G. Corneliu (București) (pag. 120); 226. Zigulescu Marin (Rîmnicu Vîlcea) (pag. 157, 257, 400, 456, 496);

ERATĂ

In G.M.F. (B) nr. 11, pagina 412, la articolul « Despre analiza luminiscentă », rîndul 5 de sus, se va citi: De aproape trei secole și jumătate.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Markuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ioneseu** (lei 7)
8. *Arii şi logaritmi* de **A. I. Markuşevici** (lei 1.70)

* * *

ABONAMENTELE LA GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B) PE ANUL 1955

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE SAU PRIN FACTORII POŞTALI SAU DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII. TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI, TEHNICIENI, ELEVI LEI 10 (12 numere)

C. 1408. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

338, 339, 342, 344, 346, 347, 349, 350, 381). *Şcoala medie tehnică de agricultură din Voiceşti*, anul II. Manea I. Nicolae (986, 988, E: 371, 379, 382, 389, 396, 400, 401, 408, 409), Stelea I. Florea (1079, E: 371, 379, 387, 389, 391, 394, 396, 399, 400, 402), Hodoroagă I. Gh. (E: 331, 365, 370, 371, 382, 389, 391).

PLOEŞTI. Liceul «I. L. Caragiale», clasa VI-a Predescu Mihai (E: 365, 370, 371, 382, 398); clasa VIII-a. Georgescu Doru (E: 384, 389, 391, 392, 39, 397), Cheşa I. Valentin 353, 382, 387, 398, 409), Chiţu Radu (384, 385, 389, 392, 396, 397, 398), Bogdan Mircea (972, 973, 999, E: 305, 309, 384, 389, 392, 397), Pătraşcu Eugen (354, 357, 358, 361, 389); clasa IX-a. *Lupuţiu Ion* (1013, 16, 21, 24, 48, 51, 52, 53, 54, 57, 60, 63, 66, 72, 82, 87, 90, 91, 104, 107, 110, 118, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 134, 135, 137, 139, 142, 145, 148, 149, 151, 152, 154, 162, P); clasa X-a. *Dogaru T. Mihai* (900, 901, 902, 904, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 927, 929, 930, 931, 935, 937, 938, 940, 941, 942), Negrea Sorin (1097, 98, 121, 124, 125, 128), Parepa C. Grigore (902, 972, 974, 992, 993, 1000, 12, 33, 38, 78, 84, 93, 98, 127), Ungureanu Gheorghe (946, 964, 963, 966, 978, 988, 993, 996, 1001, 16, 61, 70, 89, 90, 91, 106, 118, 126, 127, 128), Hohoiu Dan (946, 950 1058, 69, 74), Teodorescu I. Ştefan (944, 945, 946, 949, 950, 952, 954, 957, 971, 972, 973, 974, 975), Drosu N. Alexandru (943, 944, 948, 950, 954, 959, 960), Somboth Alexandru (E: 352, 358, 361, 370, 375, 380, 381, 382), Anghelescu Alexandru (387, 389, 392, 394, 400), *Radu Stroe* (998, 1002, 5, 11, 19, 23, 29, 33, 35, 36, 37, 42, 55, 62, 79, 87, 88, 97, 110, 124, 127, 128, 140, 152, 159, P), Dăscălescu Gh. (943, 946, 951, 959, 964, 966, 970, 971, 972, 973, 974, 976, 978, 985, 988, 999. 1001, 2, 25, 66); clasa XI-a *Puşcaşu A. Alexandru* (904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 916, 917, 923, 925, 927, 928, 930, 931, 934, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 945, 950, 952, 954, 957, 969, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 986, 988, 990, 993, 994, 996, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 18, 20, 23, 24, 25, 29, 33, 35, 37, 40, 53, 61, 65, 68, 73, 78, 98, 80, 81, 84, 85, 86, 87, 88, 94), *Torjescu S. Florin* (901, 918, 919, 920, 924, 945, 946, 948, 950, 951, 958, 985, 991—1009, 11—16, 18—26, 29, 31, 33, 34, 35—45, 47, 48, 50—56, 58, 59, 60—63, 65, 66, 67—76, 78, 79, 80—91, 93, 95, 97—104, 106—114, 118, 121, 122, 124—130, 137—140, 142, 146, 148, 154, 157, 158, 159, 161, 162, 163, P), Vulpescu D. (998, 999, 1000, 1002, 9, 25, 38, 40, 42, 52, 58, 62, 63, 66, 69, 70, 76, 79, 84, 86, 87, 88, 90, 110, 118, 124, 128). *Liceul de fete*, clasa VII-a. Georgescu Liliana (371, 373, 375, 393, 396, 398). *Şcoala medie tehnică de petrol*, anul III. Costache V. Mihail (1068, 69, 78, 81, 69, 89, 126, E: 329, 335, 349, 350, 352, 357, 358, 364, 382, 388), Grigore N. Ioan (985, 986, 999, 1084, 124, 126, E: 323, 370, 389), Elovici Dorin (1007, 73, 141, 143, E: 325, 358, 402, 407), Bobeică I. Dumitru (906, 908, 946, 948, 954, 957, 964, 968, 986, 1007, 18, 22, 24, 38, 42, 54, 62, 68, 69, 73, 78, 79, 81, 84, 87, 91, 113, P). *Şcoala elementară din Puchenii Mari*, clasa V-a. Grigore C. Sonia (354, 371, 376, 382, 396). *Şcoala elementară din Scăeni*, clasa VI-a. Dinu C. Florica (304, 324, 328, 354, 371, 398); clasa VII-a. Stănescu N. Constantin 304, 318, 324, 327, 328, 371, 387, 391, 398, 400).

(va urma)

Erată. La problema propusă 1209 în loc de a^4 se va scrie a^2.

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu aplicațiile necesare, iar figurile să fie desemnate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceeași foaie, iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunțul complet și numele propunătorului. După soluționarea fiecărei probleme scrieți citeț numele clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa și apoi trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică.

— *Se primesc soluții* numai la problemele și exercițiile din ultimele cinci numere apărute din « Revista Matematică și Fizică ». Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor, în tot cursul anului 1954, se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1954.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme deja propuse în R. M. F. mai există publicate în cărți sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul și pagina unde s-a mai publicat enunțul sau soluția problemei respective.

— *In redactarea unei soluții* trebuie alese notații potrivite, subliniate părțile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clare, cu linii pline sau punctate. De multe ori, aceste reguli îndeplinite, conduc la soluția problemei. Adesea, dintr-o problemă simplă pot ieși chestiuni interesante. Soluțiile mai dificile se obțin uneori, prin încercări succesive și studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *Corespondentul nostru* care a citit și a înțeles deplin multe din soluțiile publicate în R. M. F., a rezolvat multe din problemele propuse, poate și este îndemnat să încerce să schițeze cîte o notă scoasă dintr-o observare făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele și în fine, cei mai avansați pot să ne trimită și cîte un articol cu o chestiune generală sau cu o apropiere originală între chestiuni cunoscute. Aceste note sau articole este bine să fie refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise pentru a evita ca în expunerea făcută să fie scrise vorbe fără rost; iar ideile să deștepte interes pentru cititor. Ordinea și îngrijirea în prezentarea unei idei pot fi îndeplinite dacă harnicul nostru corespondent a făcut mai multe rezolvări, dacă a citit și a înțeles deplin, multe din soluții și articole publicate în R. M. F. și dacă a studiat îndeajuns, chestiunea de care se ocupă.

— *Tovarășii colaboratori* elevi sînt rugați să ne trimită date asupra activității lor extrașcolare la matematică și fizică, asupra activității cercurilor de matematică sau de fizică la care iau parte și asupra modului de desfășurare ale « Olimpiadei matematice », pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experiență.

— *Fiecare cititor al G. M. F* mai este rugat a face cunoscută revista și altor cunoscuți și a ne trimite propuneri și sugestii care să fie de folos în munca noastră redacțională.

— *Redacția nu face abonamente*, nici expediții de reviste, de aceia, reclamațiile de neprimirea G. M.F. sau comenzi de numere vechi și propuneri sau sugestii în legătură cu tirajul sau întîrzierea revistei, se pot face la Oficiul poștal sau Oficiului special de Expediție a Presei din București, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

BIBLIOTECA SOCIETĂŢII DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de **E. Rusu** (lei 6,23)
2. *Şiruri recurente* de **A. I. Marcuşevici** (lei 1,64)
3. *Numerele lui Fibonacci* de **N. N. Vorobiev** (lei 1,83)
4. *Introducere în teoria grupurilor* de **P. S. Alexandrov** (lei 4,91)
5. *Metoda inducţiei matematice* de **I. S. Sominschi** (lei 1,96)
6. *Elemente de calculul probabilităţilor* de **Gh. Mihoc** (lei 5,45)
7. *Calcule numerice* de **H. Ionescu** (lei 7)

* * *

ABONAMENTELE PE ANUL 1954

SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

TARIF PENTRU PROFESORI, MUNCITORI TEHNICIENII ELEVI

LEI 10

C. 524. — Intreprinderea Poligrafică Nr. 4 — Bucureşti

Preţul Lei 1 exemplarul

[illegible]
KAT

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE
MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

Institutul de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEN - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIA B

PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Anul V — iunie 1954

6

EDITURA TEHNICĂ

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

(Revista Matematică şi Fizică, în continuare)

Anul V, Nr. 6 — iunie 1954

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Despre « Olimpiada Matematică 1954 » pentru elevii şcolilor medii*	169
2.	*Rezultatul « Olimpiadei Matematice 1954 »*	173
3.	*Gheorghe Lazăr (1779 — 1823) de Constantin Cristea*	174
4.	*Gama undelor electromagnetice de N. Stănescu*	179
5.	*Probleme rezolvate: (896, 901, 907, 929, 922, 933, 934, 936, 937, 941, 944, 945, 946, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 958, 959, 960, 961, 962)*	191
6.	*Probleme propuse (1273—1293)*	204
7.	*Olimpiada tinerilor matematicieni, etapa II, (problemele propuse (E: 491 — E: 503)*	208
8.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	212

ANUL V 6 IUNIE 1954

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

(SERIA B)

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Spiru Haret, 12 — Tel. 42400 — Bucureşti XII

★

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi de fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar putea interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

GAZETA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ (SERIA B)
PUBLICAŢIE LUNARĂ PENTRU TINERET
ANUL V * Nr. 6 iunie 1954

DESPRE «OLIMPIADA MATEMATICĂ 1954» PENTRU ELEVII ŞCOLILOR MEDII

DEOARECE «Olimpiadele (concursurile) de Matematică» organizate cu începere din anul şcolar 1950 de Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. — cu sprijinul Ministerului Învăţămîntului şi al Uniunii Tineretului Muncitor — şi-au dovedit eficacitatea pentru dezvoltarea interesului elevilor şi antrenarea lor la o pregătire cît mai temeinică, de specialitate, pentru stimularea în muncă atît a elevilor cît şi a profesorilor, şi în cursul acestui an şcolar o astfel de acţiune — sub numele de «Olimpiada Matematică 1954» — s-a desfăşurat în majoritatea şcolilor medii din ţară.

Încă în luna ianuarie a.c. «Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. (S.S.M.F.) a trimis tuturor direcţiilor şcolilor medii o circulară care indica etapele acestei «Olimpiade», grupele în care sînt repartizaţi elevii diferitelor clase, organizarea comisiilor locale de «Olimpiadă» cît şi indicaţii cu privire la subiectele diferitelor etape. In acelaşi timp, s-au trimis instrucţiuni de activitate tuturor filialelor «Societăţii» cît şi copia circularei Ministerului Învăţămîntului — Direcţia Generală a Învăţămîntului Elementar şi Mediu şi al Educaţiei Preşcolare — adresată secţiilor de învăţămînt ale sfaturilor populare regionale, care le cerea să sprijine filialele «Societăţii» în toate acţiunile legate de «Olimpiadă».

Structura organizatorică a «Olimpiadei» din acest an s-a caracterizat prin iniţiativa largă acordată filialelor din centrele universitare şi prin sarcinile de mare răspundere care le reveneau lor ca şi celorlalte filiale.

O noutate în organizarea «Olimpiadei» din acest an a constat în faptul că «Olimpiada şcolii» rămînea să se desfăşoare sub conducerea directă a colectivului profesorilor şcolii — cu sprijinul organizaţiei U.T.M. — şi în posibilitatea ca ea să conste fie dintr-o lucrare scrisă, fie dintr-o serată matematică, o «victorină» matematică, un concurs prin corespondenţă al gazetei de perete matematice, etc.

In general, anunţarea «Olimpiadei» şi popularizarea ei au fost întîmpinate cu bucurie şi în multe şcoli a fost aşteptată cu nerăbdare data primei etape. De asemenea, în consiliile pedagogice ale mai multor şcoli s-au luat o serie de măsuri concrete pentru a asigura succesul acestei acţiuni. Au fost însă, şi condiţii obiective care au împiedicat larga desfăşurare a acestei etape şi care deci, au făcut ca pe deoparte, tocmai efectul de stimulare a masei elevilor să fie scăzut şi ca pe de altă parte, selecţia pentru etapa următoare să fie făcută direct de profesori. Aceste condiţii au fost: suspendarea cursurilor şcolilor din multe regiuni din cauza vremii defavorabile şi vacanţa de iarnă — în multe locuri prelungită — a şcolilor medii tehnice şi pedagogice.

Acolo însă, unde această etapă s-a desfăşurat în bune condiţii (ca de exemplu la liceul nr. 1 băieţi şi nr. 2 de fete din Tg. Mureş, unde s-a organizat o seară matematică, şcoala medie tehnică de minereuri din Brad, unde gazeta de perete matematică şi-a intensificat activitatea, unele licee din Bucureşti, unde s-au organizat «Olimpiade» prin corespondenţă, Bacău — unde filiala şi-a asigurat sprijinul organizaţiei U.T.M. —, etc.) interesul elevilor a fost stimulat şi studiul acestei discipline a căpătat un nou avînt.

Etapa locală a «Olimpiadei» s-a desfăşurat în peste 70 localităţi şi au participat aproape 7500 elevi din toate tipurile de şcoli.

Deoarece comisiile centrelor universitare Bucureşti şi Cluj, au trimis cu întîrziere subiectele, în unele din localităţile zonelor respective, etapa locală — în loc să se ţină la 7 martie a.c., cum era programată — s-a desfăşurat în zilele următoare. Subiectele elaborate de comisiile celor patru centre universitare au fost în general, adecuate nivelului elevilor, au ţinut seamă că şi această etapă cuprinde un număr însemnat de elevi şi nu s-au depărtat prea mult de cunoştinţele şi îndemînarea de calcul pe care o cer culegerile de probleme. Chiar dacă subiectul propus pentru clasa VIII-a la Timişoara sau la clasa X-a la Bucureşti, a depăşit într-o mică măsură materia parcursă, sau dacă cele propuse pentru şcolile medii tehnice la Cluj sau pentru şcolile pedagogice la Iaşi, au fost alcătuite de profesori cari nu lucrează în astfel de şcoli, şi deci, nu au ţinut seama întru totul de specificul lor, totuşi subiectele au corespuns scopului urmărit: selecţionarea participanţilor la etapa următoare şi fixarea unui nivel de cunoştinţe în toate localităţile centrului universitar respectiv. Acest din urmă scop ar trebui să fie îndeplinit prin aceea că filialele regionale ale S.S.M.F. — în colaborare cu secţiile de învăţămînt — să analizeze lucrările scrise şi să tragă concluzii cu privire la lipsurile generale, caracteristice elevilor din clase diferite. Astfel de concluzii sînt bine venite pentru a fi publicate în rubrica «învăţămînt» a Gazetei Matematice şi Fizice seria A.

Ca lipsuri de ordin general semnalate cu ocazia acestei etape, se pot menţiona: slaba participare a şcolilor medii tehnice (de exemplu, la Turda din 5 şcoli tehnice s-au prezentat doar 5 elevi; în Cluj, din 10 şcoli tehnice au participat numai elevi din 5 şcoli; la Iaşi, dela şcoala medie tehnică de mecanică din 600 elevi ai anilor I şi II, nu au participat decît 3 elevi, etc.); slaba disciplină în muncă a unor elevi şi profesori care a dus la existenţa şi chiar evidenţierea de lucrări identice (Baia Mare, din 26 lucrări evidenţiate, 16 lucrări identice două cîte două, Cluj — 5 perechi şi un grup de cinci, Oraşul-Stalin trei lucrări, Timişoara, Craiova, Bucureşti, etc. teze asemănătoare); generalizarea şi discutarea problemelor se poate obţine în foarte puţine cazuri, cu toate indicaţiile date în probleme, forma de redactare a soluţiilor suferă foarte mult prin lipsă de metodă, desene neîngrijite, slaba evidenţiere a ordinei raţionamentului.

In buna pregătire şi desfăşurare a etapei locale s-au evidenţiat filialele: Satu Mare (care a organizat în întreaga regiune, «Olimpiada» deşi nu este în oraşul de reşedinţă), Arad (care a realizat o organizare deosebită asigurînd îndeplinirea la timp şi în bune condiţii a tuturor sarcinilor), Suceava (în care au participat 896 elevi din 8 localităţi — cea mai bună participare pe ţară), Bacău şi Deva (care a organizat din timp, comisiile locale, le-a instruit şi a colaborat strîns cu U.T.M.), Cluj (ca filială regională, organizînd în bune condiţii defăşurarea «Olimpiadei» în regiune), Iaşi (ca centru universitar, pentru organizarea în întreaga zonă). Alte filiale însă, au dat dovadă de lipsuri serioase în pregătirea şi organizarea acestei etape: Galaţi (nu s-a interesat deloc de această acţiune, astfel încît în nicio localitate din regiune nu s-a ţinut

« Olimpiada »,) Oradea şi Tîrgu-Mureş (care nu s-au interesat de celelalte centre şcolare din regiune, deşi au pregătit în bune condiţii etapa în oraşul de reşedinţă), Craiova, Piteşti, Timişoara şi Bîrlad (care nu au îndrumat centrele şcolare din regiune). O lipsă importantă este nerespectarea termenelor indicate în instrucţiunile de organizare a « Olimpiadei » ceea ce a îngreuiat informarea centrelor universitare şi a Consiliului de Conducere şi a contribuit la obţinerea de rezultate slabe în unele regiuni.

Etapa pe centre universitare s-a desfăşurat în ziua de 4 aprilie a. c. cu participarea a peste 1300 elevi din 70 localităţi reprezentînd toate tipurile de şcoli şi cu diferite limbi de predare (romînă, maghiară, germană, slovacă). Dintre aceştia peste 700 elevi s-au deplasat din diferite localităţi spre cele 4 centre universitare. Pentru a asigura condiţiile materiale necesare, s-au folosit nu numai mijloacele puse la dispoziţie de S.S.M.F. ci s-a recurs şi la mobilizarea unor resurse locale. Aceasta dovedeşte nu numai interesul pe care şcolile, părinţii, comitetele de sprijin, profesorii, l-au acordat « Olimpiadei » ci şi avîntul pe care învăţămîntul matematicii îl poate trezi, dorinţa elevilor fruntaşi de a-şi încerca forţele într-o întrecere tovărăşească, ştiinţifică.

Această etapă s-a ţinut în localurile facultăţilor de matematici şi fizică a universităţilor şi a Institutului Pedagogic din Timişoara constituind un mijloc de legătură a elevilor şi profesorilor de şcoli medii cu aceste institute de învăţămînt superior către care trebuie îndrumaţi absolvenţii şcolilor medii cei mai legaţi de matematică şi bine pregătiţi la această disciplină.

Subiectele date la această etapă au cerut un nivel mai înalt de pregătire, generalizări, vederi în spaţiu mai ample, legături mai strînse între diferite discipline matematice, etc.

Cadrele didactice care au corectat lucrările participanţilor la această etapă, au depus un efort deosebit şi merituos pentru ca în cursul aceleiaşi zile să se poată da rezultatele în cadrul unor şedinţe festive, în prezenţa comitetelor filialelor, a decanilor facultăţilor de fizico-matematici, a reprezentanţilor secţiilor de învăţămînt şi ai U.T.M.-ului. Cu această ocazie au fost premiaţi 137 de elevi şi menţionaţi 111 elevi care au primit cărţi de matematică şi fizică de nivel mediu şi superior. Majoritatea acestor elevi fac parte dintre rezolvitorii şi evidenţiaţii « Revistei de Matematică şi Fizică » ceea ce dovedeşte că activitatea lor susţinută, extraşcolară, le-a servit în formarea şi dezvoltarea logicii, a deprinderilor de calcul, a vederii în spaţiu, etc.

Dintre cei care au obţinut premiul I s-au distins:

Iosifescu Marius, clasa XI-a, Şcoala de 10 ani, Piteşti, —

Cristea Ion, clasa IX-a, Şcoala de 10 ani, Constanţa, —

Călămar Ioan, anul II, Şcoala medie tehnică de minereuri, Brad şi

Rus Ioan, clasa IX-a, Şoala medie de 10 ani, Oradea.

Etapa pe ţară a « Olimpiadei Matematice 1954 » s-a desfăşurat La Bucureşti în ziua de 2 mai a. c. în sălile Facultăţii de matematică şi Fizică a Universităţii « C. I. Parhon ». Au participat 144 elevi din 40 localităţi reprezentînd toate tipurile de şcoli medii, cu limba de predare romînă, germană şi maghiară şi de diferite naţionalităţi (romîni, germani, maghiari, tătari, evrei şi un coreean).

Problemele date la această etapă se publică în acest număr al « Gazetei Matematice şi Fizice » — seria B petru tineret. In general, ele sînt de un nivel superior celor din etapele precedente şi au permis o selecţionare riguroasă a celor evidenţiaţi.

Participanţilor la etapa pe ţară şi profesorilor însoţitori li s-a oferit un program special: participarea la demonstraţia de 1 Mai a oamenilor muncii din

Capitală, vizionarea spectacolelor: «O scrisoare pierdută» la Teatrul Național «I. L. Caragiale» și «Simeon Albac» la Teatrul Tineretului, a reprezentațiilor din Piața Republicii, vizitarea Muzeului Național, și a orașului.

Ședința festivă de închidere a «Olimpiadei Matematice 1954» a avut loc în după amiaza zilei de 2 mai a.c. în sala «Filimon Sîrbu», la care au participat sute de elevi din Capitală, profesori, părinți, reprezentanți ai Academiei R.P.R., ai Facultății de Matematică și Fizică, ai secției de învățămînt a sfatului popular al Capitalei, ai U.T.M.-ului și Conducerea Societății de Matematică și Fizică.

In cuvîntările lor, tovarășii Acad. Gr. C. Moisil, prof. univ. N. Teodorescu, prof. C. Petricu (șeful secției de învățămînt a sfatului popular al Capitalei), tov. Nina Olteanu (din partea organizației U.T.M.) au subliniat rolul matematicii în cunoașterea legilor naturii și importanța ei în dezvoltarea tehnicii moderne, în formarea de specialiști necesari construirii socialismului în țara noastră. In numele elevilor participanți la «Olimpiadă» a luat cuvîntul Iosifescu Marius din Pitești, care mulțumind pentru organizarea diferitelor forme de stimulare a învățămîntului și studiului matematicii pe care Societatea de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. le pune la îndemîna tineretului și-a luat angajamentul să continue efortul de pînă acum pentru a-și ridica necontenit nivelul de cunoștințe necesare înfloririi Patriei noastre.

După prezentarea de ansamblu a rezultatelor acestei etape a «Olimpiadei» făcută de tov. secretar general al S.S.M.F. conf. univ. Tiberiu Roman, s-au înmînat premiile celor 31 premianți și 13 menționați din 16 orașe, a căror listă este dată în pagina următoare.

In concluzie, «Olimpiada Matematică 1954» s-a desfășurat în general, la un nivel superior celui din anul precedent, atît prin lărgirea numărului de școli și de elevi participanți, prin nivelul mai înalt al exigențelor științifice, cît și prin interesul sporit arătat pentru această acțiune din partea elevilor, școlilor și părinților.

Rezultatele obținute de către elementele fruntașe, dovedesc dezvoltarea lor intelectuală și profesională, perspectivele largi pe care studiul ulterior al matematicii le va deschide.

Nu toate filialele Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. și secțiile de învățămînt ale sfaturilor populare regionale au primit cu toată răspunderea și seriozitatea sarcinile care le reveneau pentru asigurarea deplinului succes al «Olimpiadei» din regiunea respectivă.

Ministerul Invățămîntului — Direcția Generală a Invățămîntului Elementar Mediu și Educației Preșcolare și Conducerea Ministerului, au sprijinit «Olimpiada Matematică 1954» atît moral cît și material recunoscînd importanța pe care această acțiune o are pentru stimularea dragostei și interesului pentru învățămîntul matematicii. Secția de învățămînt București, ca și cele din celelalte centre universitare și Institutele de învățămînt superior — gazdă, au contribuit pentru a asigura cazarea și masa elevilor și profesorilor însoțitori la ultimile două etape.

Fără contribuția amplă, cu dragoste și interes pentru învățămîntul matematicii și pentru tinerele cadre care se formează, din partea a sute de profesori din toată țara, «Olimpiada Matematică 1954» nu ar fi putut avea loc. Pe această cale Conducerea Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. le exprimă mulțumirile sale și le urează noi succese în creșterea avîntului tinerei generații pentru cucerirea cetății științei.

Pentru buna desfășurare și pentru obținerea de rezultate din ce în ce mai bune la «Olimpiadele Matematice» este indicat ca etapa pe școală să se desfășoare

într-o perioadă mai lungă de timp (eventual, încă în primele două pătrare ale anului şcolar), cu forme variate şi atrăgăto re de activitate extraşcolară la matematică, cu întreceri între şcoli, între oraşe, pe plan local. Etapa pe localitate ar putea avea loc după vacanţa de iarnă a şcolilor pedagogice şi medii tehnice, urmată de o etapă regională. Etapa pe centru universitar ar putea să fie dublată de o a doua ediţie a «Olimpiadei şcolii», etapă de consolare pentru elevii care nu participă la etapa pe centru universitar.

Etapa pe ţară, încununarea întregii acţiuni, este bine să fie legată de data de 1 Mai, însoţită fiind de un program mai larg cultural, artistic.

Facultăţile de Matematică şi Fizică, presa centrală de învăţământ, şi cea locală pot şi e bine să sprijine «Olimpiada Matematică» contribuind şi pe această cale la îmbunătăţirea învăţământului de specialitate.

REZULTATUL «OLIMPIADEI MATEMATICE 1954»

Etapa IV, finală, pe ţară – Bucureşti 3 mai 1954

Premiul I cu distincţie: *Iosifescu V. Marius* din clasa XI-a, Piteşti.

Premiul I: Anton Ion din anul III, şcoala pedagogică de băieţi, Bucureşti; *Buzuloiu Vasile* din clasa X-a, Oradea; *Eremia Dan* din clasa IX-a, liceul de băieţi nr. 3, Bucureşti; *Esrig Paul* din anul III, s.m.t.e.e. «Iosif Rangheţ», Bucureşti; *Gion Elfriede* din anul *III*, şcoala pedagogică germană de fete, Timişoara; *Harnik Victor* din clasa VIII-a, liceul de băieţi Nr. 2, Bucureşti; *Iordache Dan* din clasa IX-a, Constanţa; *Marin Ion* din clasa VIII-a, Piteşti; *Matei Ion* din clasa VIII-a, Piteşti; *Şerb Adrian* din clasa IX-a, Piteşti; *Stănăşilă Octavian* din clasa IX-a, liceul de băieţi nr. 10 «Aurel Vlaicu», Bucureşti; *Tomescu Constantin Dan* din clasa IX-a, liceul de băieţi nr. 3, Bucureşti.

Premiul II: Constantinescu Paul din clasa X-a Buzău; *Bocu Mircea* din clasa X-a, Oradea; *Dogaru Mihai* din clasa XI-a Ploeşti; *Dragomir Constantin* din clasa XI-a, Piteşti; *Galaţky Gheorghe* din clasa IX-a, Tîrgovişte; *Hogaş Constantin* din clasa IX-a, Iaşi *Lupuţiu Ion* din clasa IX-a, Ploeşti; *Popescu Corneliu* din anul III s.m.t.e.e. «Iosif Rangheţ», Bucureşti; *Vasiliu Mihai* din clasa VIII-a, liceul de băieţi nr. 3, Bucureşti.

Premiul III: Cîmpu Eugen din clasa X-a, liceul de băieţi nr. 10 «Aurel Vlaicu», Bucureşti; *Corduneanu A.* din clasa VIII-a, Iaşi; *Iordache Petre* din anul IV, şcoala pedagogică de băieţi, Craiova; *Kestenband Barbu* din clasa X-a, liceul de băieţi nr. 6, Bucureşti; *Panaitescu Alexandru* din clasa X-a, Ploeşti; *Popa Victor* din clasa VIII, liceul de băieţi nr. 3, Bucureşti; *Pop V. Ioan* din anul I s.m.t.c.f.r., Cluj; *Roceric Maria* din clasa X-a, Centrul şcolar de fete 2—10—13, Bucureşti; *Weszely Tiberiu* din clasa XI-a, Tîrgu-Mureş.

Menţiuni: Cristea Ion din clasa IX-a, Constanţa; *Dabija Sorin* din clasa XI-a, Galaţi; *Dumitrescu M. Constantin* din anul I s.m.t. drumuri, Botoşani; *Eremia Mircea* din clasa VIII-a liceul de băieţi nr. 3, Bucureşti; *Guiaşu Silviu* din clasa IX-a, Oradea; *Lupei Voicu* din anul II s.m.t. minereuri, Brad; *Micu Emil* din anul I s.m.t. electricitate, Cluj; *Popescu Dan* din clasa IX-a, Cluj; *Popovici Mihai* din clasa IX-a, Brad; *Roitman Abraham* din clasa VIII-a, Constanţa; *Sandor Vasile* din anul III s.m.t. construcţii, Oradea; *Vasu Gheorghe* din anul III s.m.t. mecanică, Sibiu; *Vlădescu Mariana* din clasa X-a, Centrul şcolar de fete 2—10—13, Bucureşti.

GHEORGHE LAZĂR

(1779—1823)

CONSTANTIN CRISTEA

Asistent universitar

ORICE tînăr din patria noastră îşi poate satisface azi dorinţa de a cunoaşte, setea de a învăţa. Lucrul acesta pare firesc, deoarece porţile şcolilor şi universităţilor sînt deschise pentru toţi fiii oamenilor muncii.

Să nu uităm însă, că nu totdeuna a fost aşa !

Exploatarea capitalistă şi moşierească, taxele şcolare prohibitive, făceau ca şcoala să devină aproape inaccesibilă pentru tineret; dezinteresul statului burghezo-moşieresc pentru învăţămîntul public, se manifesta prin mizeria şi şomajul cronic la care erau condamnate cadrele didactice, deşi an de an, sute de mii de copii îngroşau rîndurile analfabeţilor. In aceste condiţii, apar mai luminoase figurile unor dascăli curajoşi, care şi-au închinat toată viaţa lor dezvoltării învăţămîntului şi culturii naţionale, luptînd împotriva tuturor obstacolelor puse în cale de cercurile conducătoare.

Una din aceste figuri progresiste, care au intrat în istoria culturii naţionale, a fost Gheorghe Lazăr, dela a cărui naştere se împlinesc 175 ani.

Gheorghe Lazăr este fondatorul învăţămîntului ştiinţific în limba romînă, de numele lui fiind legată şcoala de inginerie dela Sft. Sava, deschisă în Bucureşti în 1818.

Activitatea lui Georghe Lazăr la Sibiu şi la Bucureşti, s-a desfăşurat într-o perioadă de mari frămîntări sociale, perioadă de coacere a luptei împotriva feudalismului şi asupririi turceşti. Ajutat de către oastea rusă în izgonirea hoardelor turceşti, poporul nostru încerca să se scuture de jugul străin, de exploatare; aceste încercări s-au concretizat în domeniul politic în revoluţia lui Tudor Vladimirescu, iar în domeniul cultural, ca o completare a revoluţiei, în activitatea neobosită a lui Gheorghe Lazăr şi a urmaşilor săi.

Gheorghe Lazăr s-a născut în comuna Avrig, la 5 iunie 1779, fiind fiul cel mai mic al unor ţărani iobagi de pe moşia baronului Bruckenthal.

Dorinţa de a învăţa, cît şi aptitudinile de care dă dovadă de mic, fac ca tînărul Lazăr să birue toate lipsurile şi să studieze la Sibiu şi apoi, la Cluj.

Distingîndu-se la învăţătură, obţine dela împăratul Francisc al II-lea, în 1806, « dreptul » de a continua studiile la facultatea de teologie din Viena, precum şi o bursă în bani. Trimis în străinătate, pentru a face studii teologice şi a se pregăti pentru cariera bisericească, Lazăr începe să se manifeste ca o fire independentă şi se simte atras mai ales de alte domenii; e cert că el a studiat la Viena, în afară de teologie şi istoria, dreptul, filozofia, pedagogia şi matematica.

In acest timp, Viena era ocupată de trupele franceze şi se făceau rechiziţii în folosul armatei; Lazăr e luat ca topograf. Munca aceasta îi răpeşte din timpul de învăţătură, dar îi dă ocazia de a face o bună practică în aplicarea ştiinţelor matematice la măsurători terestre.

E probabil că tot prin intermediul francezilor să fi cunoscut şi îmbrăţişat ideile de libertate ale revoluţiei burgheze din Franţa. Aceste idei îl frămîntă şi el începe să-şi dea seama de starea de robie a poporului său. El scrie din Viena, părinţilor săi: « Să nu vă fie jale de mine pentru că eu am venit aici tocmai ca să lucrez pentru uşurarea vieţii noastre triste ».

Lazăr stă la Viena 3 ani (pînă în 1809) şi activitatea sa şcolară este încununată de succes.

Intors în ţară, teologul Lazăr nu devine preot ci profesor la şcoala de preoţi din Sibiu, deoarece nu inspiră prea multă încredere mitropolitului Ştefan Stratimirovoci din Carlovitz; printre altele, mitropolitul obiecta lui Lazăr, faptul că este învăţat şi necăsătorit, deci aspiră la trepte înalte şi că... a arătat indiferenţă pentru biserica ortodoxă.

In realitate, guvernul austriac deşi îl pregătise pe Lazăr în această direcţie, nu avea destulă încredere în el; de aceia, guvernul numeşte în postul de episcop al Sibiului — pe care îl merita mai degrabă Lazăr — pe un preot obscur, Vasile Moga. Acesta va fi mereu în conflict cu Lazăr încercînd să împiedice în orice chip, activitatea culturală a acestuia la Sibiu.

Pentru a se pregăti ca profesor, Lazăr este trimis a doua oară la Viena unde stă un an (1810 — 1811). El traduce printre altele, un manual de pedagogie şi o geografie matematică pentru copii de şcoală. Reintors în ţară, se izbeşte de activitatea ostilă a episcopului Moga, care voia să-l înlocuiască pe Lazăr din postul de profesor, cu rude ale sale. Găsind un pretext, el îi intentează lui Lazăr un proces disciplinar; în 1815, toamna, în urma unui raport trimis la Viena, Lazăr e destituit din funcţia de profesor, chipurile « pentru indisciplină şi neglijenţă în serviciu». In raport este menţionat faptul că Lazăr este un om arogant, violent, nesupus, turbulent şi care, prin felul său de gîndire este primejdios. Era normal ca guvernul austriac, care voia linişte în această parte a imperiului, să-şi piardă încrederea într-un astfel de om învăţat, demn şi independent şi să prefere lipsa de voinţă şi caracter a episcopului Moga.

In felul acesta se încheie activitatea lui Lazăr la Sibiu. Urmărit de poliţia imperială, el apucă drumul peregrinărilor, angajîndu-se ca profesor particular la Braşov; Lazăr nu disperă pentru că nu putuse realiza la Sibiu o şcoală. In mintea sa se clarifică ideia de a creia la Bucureşti « o şcoală romînească de diferite învăţături şi ştiinţe, pe care să le predea romînilor, pe limba maicii lor ». El se decide încă din 1816 să vină la Bucureşti şi înaintează către Eforia Şcoalelor, proiectul său de a deschide prima şcoală în limba romînă.

In primăvara lui 1818 îl găsim instalat în Bucureşti, preocupat de organizarea unei astfel de şcoli; el exercita, pentru a-şi cîştiga existenţa şi meseria de inginer (ne-a rămas un astfel de plan, datat 1818). Situaţia învăţămîntului

public din ţara noastră la sfîrşitul veacului al 18-lea şi începutul celui de-al 19-lea era deosebit de precară, marea masă a poporului fiind ţinută în întuneric.

In Bucureşti şi Iaşi existau şcoli mai înalte, cunoscute sub numele de Academiile greceşti şi deschise numai fiilor boierilor. La acestea se adăugau şcolile bisericeşti în limba romînă, unde se învăţa doar mecanismul scrisului, cititului şi socotelii. La sfîrşitul sec. 18-lea, limba greacă, considerată singura limbă aptă pentru a face ştiinţă, incetează de a mai deţine acest monopol, la Academiile greceşti începînd să predea şi profesori francezi şi italieni. Ceea ce este caracteristic acestei epoci, este lupta împotriva şcolii greceşti decadente, ostilă poporului şi afirmarea conştiinţei naţionale, prin preocuparea de a utiliza limba romînă în studierea unor ştiinţe abstracte; apar primele manuale de matematică în limbă romînă (Şincai, Amfilochie).

Lui Asachi, în Moldova, şi lui Lazăr în Muntenia, le este dat să ducă acest proces la bun sfîrşit, prin întemeirea unor şcoli romîneşti superioare.

Lazăr a avut de înfruntat totuşi, între 1816 şi 1818, împotrivirea elementelor reacţionare greceşti şi autohtone; descriind această situaţie, el arată că a găsit: « o mulţime de mărăcini şi lăcuste, legile ţării stricate, tradiţiile romîneşti ale limbii, uitate ». El ajunge pînă la divanul domnesc, unde susţine cu înflăcărare posibilitatea şi folosul înfiinţării unei şcoli în limba romînă. El spune: « Toate putem a le dobîndi.... numai vrere să avem ! « Lazăr arată că poporul romîn, la fel de înzestrat ca şi celelalte popare, poate scoate matematicieni, filozofi, ingineri, deoarece: « Adevărul este Unul în orice limbă s-ar spune, numai să fie spus pe înţeles... Aşa dar, ştiinţele adăpătoare de înţelepciune trebuie să învăţăm, care şi în limba maicii noastre putem face ».

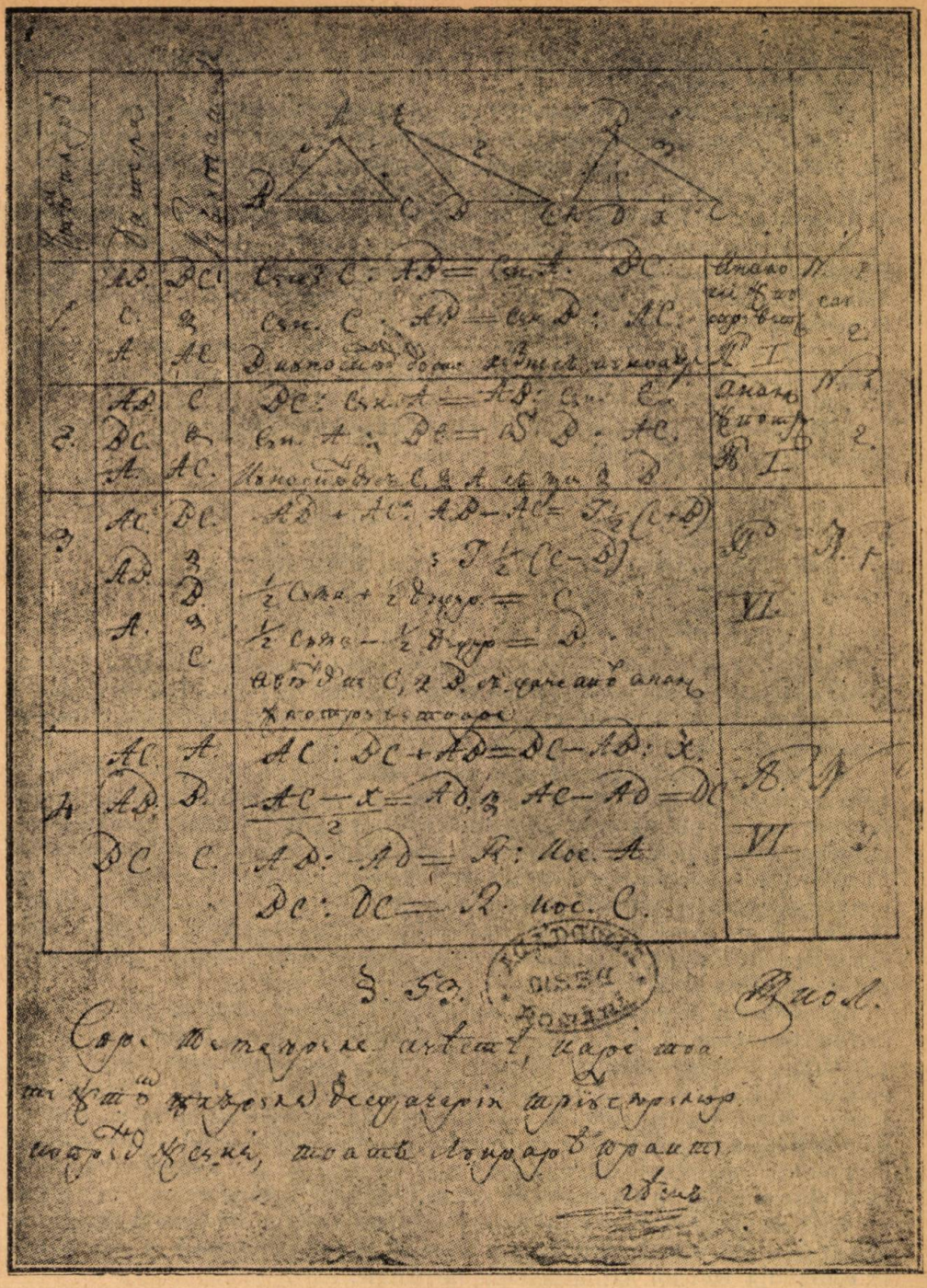
Bătrînul ban Constantin Bălăceanu, om neînvăţat, însă cu bun simţ, îndoindu-se de aceste cuvinte şi de ştiinţa lui Lazăr, îl pune să îi măsoare un loc, pentru a confrunta rezultatele cu calculele unui inginer neamţ (care îl măsurase anterior); confecţionîndu-şi singur, instrumentele, Lazăr găseşte aceleaşi rezultate, uimindu-l pe bătrîn.

Sprijinit de elemente ale burgheziei în formare (pe atunci, antifeudală), bazat pe renumele pe care şi-l făcuse şi răspunzînd unei necesităţi vitale, Lazăr îşi deschise şcoala fără prea multă pompă, în toamna anului 1818, în cîteva odăi improprii ale mînăstirii Sft. Sava, pe locul din faţa Universităţii de azi.

Primii auditori ai lui Lazăr au fost meseriaşi, scriitori de cancelarie, prăvăliaşi, atraşi de entuziasmul şi ideile pe care le propaga Lazăr. Planurile sale erau cuprinzătoare şi şcoala lui deveni în cei 3 ani cît a funcţionat Lazăr ca profesor, un centru important al culturii romîneşti. El publică imediat după deschiderea şcolii, un apel către tineret, îndemnîndu-l să urmeze cursurile, cu cuvintele: « Patriei nu-i poate fi tot una măcar ce feliu de creştere vor primi mădularele următoare.... Că cu ruşine vine un popor şi neam ce este aşa vechiu, aşa vestit, proslăvit şi înzestrat cu toate rodurile pămîntului,.... să nu aibă şi el o şcoală mai de treabă, o Academie cu ştiinţă ».

In programa şcolii lui Lazăr se disting patru etape: prima etapă avea scopul să înveţe pe elevi, să scrie, să citească, să socotească; în a două etapă se urmărea formarea unei culturi generale, elevul învăţînd gramatică, geografie şi istorie: « cei mai în vîrstă şi deprinşi cu toate acestea », treceau la etapa a treia, în care se studia matematica şi pregătirea inginerească; în etapa a patra, Lazăr socotea că e nevoie să studieze filozofia şi dreptul.

Lăsînd pe seama ajutoarelor sale primele 2 etape, Lazăr îşi asumă sarcina de a învăţa pe elevii mai pregătiţi, rezervîndu-şi ultimele 2 etape.



O pagină din Trigonometria drept liniară

El a predat elevilor, aritmetică şi algebră, geometrie şi trigonometrie; ne-au rămas dela el manuscrisele cursurilor de Aritmetică matematicească şi Trigonometria drept liniară.

Din analiza acestor manuscrise reiese osteneala, dar mai ales, talentul didactic, pedagogic al lui Lazăr, de a expune la nivelul elevilor şi pe înţelesul lor, matematica. Manualele, deşi nu sînt originale, sînt lucrări didactic bune, după care se poate învăţa şi astăzi. O importanţă deosebită are cursul său de Trigonometrie, primul de acest fel în limba romînă, mic ca număr de pagini, cu un material bine ordonat şi concentrat. Cursul e împărţit în patru capitole. El tratează pe rînd, despre: funcţiile trigonometrice, relaţiile dintre ele, rezolvarea triunghiurilor, explicarea alcătuirii şi folosirii tablelor de logaritmi, terminîndu-se cu probleme rezolvate pînă la capăt.

Cursul scris cu slove cirilice, are un stil curgător; Lazăr adoptă — uneori trebuie să creeze ! — o terminologie matematică, destul de apropiată de cea actuală.

Iată cîteva exemple din care se vede preocuparea de a exprima prin cuvîntul romînesc cel mai potrivit, pe cel străin:

rezolvare	desfacere
definiţie	hotărîre
teoremă	privire
transformare	strămutare
triunghi isoscel	triunghi asemenea piciorat
triunghi oarecare	triunghi piezeşat
unghi obtuz	unghi teşit

Funcţiile trigonometrice sînt numite şi notate astfel: sinul (sin), cosinul (cos), atingătoarea (at), coatingătoarea (coat), tăietoarea (t) şi cotăietoarea (cot).

Relaţiile dintre funcţiile trigonometrice Lazăr le stabileşte uşor, deoarece demonstraţiile însoţite de figuri, sînt foarte simple.

In cîteva locuri, Lazăr dă mai multe demonstraţii aceleiaşi teoreme (la teorema sinusurilor) sau o demonstraţie din care să se poată deduce mai multe teoreme cum face la sin $(a+b)$, fapt care trădează grija lui Lazăr pentru elevi; el atrage atenţia asupra unor lucruri mai puţin importante pentru calculul practic (utilizarea secantelor sau a cologaritmilor) şi în acelaşi timp arată cum, cunoscînd numai o singură valoare (sin 30°), se pot alcătui tablele trigometrice. Toate acestea arată pe dascălul preocupat să nu încarce prea mult capul elevului, dîndu-i acestuia totuşi, cunoştinţele necesare pentru a se putea descurca pe teren.

Izvorită din necesităţile vieţii, şcoala lui Lazăr nu putea să nu aibă şi o orientare practică; Lazăr a fost unul din oamenii care a legat ştiinţa de munca practică. Cursurile sale teoretice erau urmate de lucrări practice pe teren, conduse de Lazăr şi la care participau toţi elevii. Unul din elevii săi relata mai tîrziu: « Era o bucurie să vadă cineva elevii îndreptînd linia cu mîna, scoţind pălăria şi făcînd semn strigînd: la dreapta, la stînga; alţii îndreptînd şi scuturînd lanţul ce şerpuia prin iarbă, alţii aşezînd şi nivelînd masa ». Devenise un obicei ca hărţile moşiilor să fie făcute de şcolarii lui Lazăr, deoarece ei lucrau eftin.

Ieşit din popor şi strîns legat de el, Lazăr nu s-a mărginit numai la expunerea destul de aridă, a matematicilor; el a predat şi lecţii de istorie în care trezea în conştiinţa elevilor săi dragostea de patrie.

Mai mult decît atît, deoarece nu mai era în amvonul dela Sibiu, el îşi permitea să critice moravurile societăţii, atacînd nedreptăţile conducătorilor

vremii. Nu-i de mirare că înflăcărați de aceste idei, elevii lui Lazăr și însăși Lazăr, au fost participanți activi la răscoala lui Tudor Vladimirescu.

Georghe Lazăr mai are meritul, deși a predat doar 3 ani, că și-a crescut elevi ca Petre Poenaru, Simion Marcovici, Alesandru Tell, Ion Eliade, care au continuat opera sa și au contribuit la dezvoltarea culturii românești.

Afluența mare de elevi la școala dela Sft. Sava, care concura cu succes școala grecească dela biserica Măgureanu, ca și atacurile lui Lazăr împotriva elementelor reacționare, au făcut ca oficialitatea să suspecteze pe Lazăr. Cînd izbucnește revoluția din 1821, școala se închise, iar Lazăr și elevii săi, dormind în unele nopți în tabăra lui Tudor dela Cotroceni, învățau pe panduri cum să tragă cu tunurile. Petrache Poenaru, secretarul lui Tudor Vladimirescu, vorbind despre răscoală, spune: « Școala lui Lazăr devenise unul din focarele din care scînteia entuziasmul patriotic. Inima lui Lazăr sălta de satisfacție că vedea realizate dorințele sale de redeșteptare a românilor ». După înnăbușirea revoluției, Lazăr este atacat cu ură de clica conducătoare; el încearcă să redeschidă școala dar nu mai reușește decît pentru cîteva luni; e scos încă din primăvara lui 1821, din funcția de director; manualele pe care le redactase așteptau să fie tipărite. Lazăr adresează un apel « către iubitorii de muze compatrioți » în care anunță că « voim a da la lumină în limba patriei, filozofia, matematica și geometria, după aceasta va urma și istoria universală ».

Acest apel rămîne însă, fără răspuns. In ultimii doi ani (1821—1823) petrecuți la București, ultimii și din viața lui scurtă, mulți prieteni îl părăsesc. Sînt ani în care, lipsit de sprijin, ros de mizerie și boală, Lazăr devine un om de nerecunoscut. Simțind apropierea morții, el părăsește (în iunie 1823) Bucureștiul, sărac și în mijlocul unei indiferențe generale. Se desparte cu greu de școală, de elevii săi care nu-l puteau uita. El moare în satul său natal, în ziua de 17 septembrie 1823.

Opera începută de Gheorghe Lazăr nu s-a irosit ci s-a consolidat an cu an, figura lui de dascăl luptător devenind o pildă vie pentru urmași.

Lupta lui Lazăr pentru o școală națională, pentru un învățămînt științific prin introducerea științelor naturii în școală, pentru creșterea unui tineret educat în spiritul dragostei de patrie, a fost încununată de succes de-abia azi, cînd clasa muncitoare a doborît puterea burgheziei și a efectuat reforma învățămîntului de toate gradele.

Viața lui, dedicată în întregime învățămîntului, plină de străduințe ca și de amărăciuni, să fie de exemplu pentru cei ce luptă azi în condiții mai bune, pe tărîmul școlar și pe frontul cultural.

GAMA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

NICOLAE R. STĂNESCU

ÎN viața de toate zilele auzim deseori vorbindu-se despre radiații, raze X, raze infraroșii, raze ultraviolete, unde electromagnetice, lumină invizibilă lumină neagră, etc. și nu totdeauna putem preciza ce reprezintă fiecare, ce legătură este între ele, ce aplicații au și cum se obțin. E tocmai ceea ce urmărește să lămurească articolul de față.

1. Lumina este undă

Studiul luminii s-a dezvoltat odată cu tehnica, într-o lungă evoluție istorică. Dezvoltarea necontenită a tehnicii a dus pe fizicieni la descoperirea instrumentelor optice, pentru perfecționarea cărora era necesară o cunoaștere adîncă a legilor de *propagare a luminii*. Studiind propagarea razelor de lumină s-au descoperit o serie de fenomene optice: dispersia, difracția, interferența, dubla refracție, polarizația luminii. Descompunerea luminii cu ajutorul prizmei optice (dispersia) în mai multe culori simple și recompunerea acestora pentru a da lumina albă, au dovedit că lumina este un amestec de culori ce se observă în curcubeu, adică în spectrul solar. Interferența și difracția luminii (a se vedea « Revista Matematică și Fizică » Nr. 3 din 1952) au arătat că lumina este o undă, iar diferitele culori ale spectrului sînt unde luminoase de diferite lungimi de undă, cuprinse între 0,39 μ pentru violet și 0,78 μ pentru roșu. S-a constatat experimental că viteza luminii (v) într-o substanță este mai mică decît în vid (c), iar raportul $n = \frac{c}{v}$ a fost numit indice de refracție al substanței. Dispersia luminii se datorește faptului că lumina de diferite culori nu are aceeași viteză de propagare prin aceeași substanță. De exemplu, în apă lumina roșie are viteza de 225500 km/s, iar lumina violetă are viteza de 223200 km/s. Deoarece lungimea de undă reprezintă spațiul pe care îl parcurge o undă în timpul unei singure oscilații, urmează că lungimea de undă λ într-o substanță este mai mică decît lungimea de undă λ_0 a aceleiași unde în vid: $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ unde $n = \frac{c}{v}$ este indicele de refracție al substanței. Ca să aflăm frecvența ν, adică numărul de oscilații dintr-o secundă trebuie să împărțim viteza la lungimea de undă. De exemplu, în vid $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ iar într-o substanță de indice n, frecvența aceleiași unde va fi $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{n} \cdot \frac{n}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0} = \nu_0$ adică, frecvența undei luminoase nu depinde de natura substanței prin care se propagă unda de lumină. De aceea lumina de diferite culori *se caracterizează prin frecvență*, ori *prin lungimea de undă în vid*, care sînt constante. Frecvența diferitelor culori se înșiră între $3{,}75 \cdot 10^{14}$ Hz pentru roșu și $7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz pentru violet, adică în jurul unei jumătăți de milion de miliarde oscilații într-o secundă ! Descoperirea polarizației luminii a adus o contribuție nouă la lămurirea naturii luminii (R.M.F. nr. 10 din 1952). S-a găsit anume, că lumina reflectată pe o oglindă nu mai are acțiunea luminoasă repartizată simetric în jurul razei, ci asimetric.

Acțiunea maximă a luminii reflectate este concentrată într-o direcție, iar în direcție perpendiculară pe aceasta, acțiunea luminoasă este minimă: spunem atunci, că lumina este polarizată. Explicația fenomenului a fost dată de Fresnel (1818) pe baza teoriei ondulatorii a luminii, presupunînd că lumina este o undă *transversală*. Undele luminoase fiind transversale, oscilațiile se fac perpendicular pe direcția razei R (fig. 1). Înainte de reflexie oscilațiile se fac în toate direcțiile perpendiculare pe rază (fig. 1 *a*); prin reflexie lumina se polarizează, adică oscilațiile se fac într-o singură direcție (fig. 1 *b*). Întrucît pe atunci fenomenele fizice se interpretau pe baza mecanicii, și Fresnel a conceput lumina

ca o undă elastică a unui fluid universal, imponderabil, numit eter. Unda luminoasă era socotită ca propagarea oscilaţiilor mecanice ale eterului. Această teorie ondulatorie, mecanică, a lui Fresnel, a reuşit să explice calitativ şi cantitativ fenomenul de interferenţă, difracţie şi polarizaţie a luminii, de aceea secolul XIX este dominat de ea, mai ales cînd s-a găsit experimental (1850) că viteza luminii în apă este mai mică decît în aer, tocmai cum cerea teoria ondulatorie. S-au ivit însă o serie de dificultăţi cu privire la acel ipotetic eter şi mai cu seamă la analiza propagării luminii în corpurile în mişcare. Ar trebui ca eterul să fie un mediu mecanic mai rigid decît oţelul pentru a se putea explica enorma viteză de propagare a undelor luminoase, ca şi uriaşul număr de oscilaţii pe secundă. Cu toate acestea un asemenea mediu mecanic nu poate exista în spaţiu, căci ar frîna mişcarea planetelor şi astrelor prin frecarea ce s-ar produce. Pe de altă parte, Pămîntul mişcîndu-se prin eter în jurul Soarelui, ar trebui să se producă « vîntul eteric », care să influenţeze propagarea luminii, dar experienţe de înaltă precizie, repetate zeci de ani, au arătat că acesta nu se produce. Concluzia este clară: eterul nu există. Atunci, ar urma că lumina nu este o undă transversală, neexistînd un mediu care să oscileze. Acest lucru este însă, împotriva experienţei, care arată că lumina este o undă transversală. Se pune deci, întrebarea: de ce natură este unda de lumină? Răspunsul l-a dat teoria electromagnetică a lui Maxwell, după cum vom vedea.

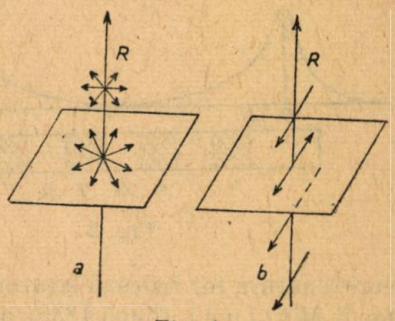


Fig. 1

2. Se descoperă lumina « invizibilă »

In timp ce se adînceau cunoştinţele despre natura razelor de lumină, s-a cercetat şi energia transportată de lumină. Energia radiaţiilor solare întreţine circulaţia apei şi aerului pe pămînt, ele dau energia necesară sintezei clorofiliene, deci a cărbunilor care mişcă motoarele, într-un cuvînt condiţiile de viaţă pe pămînt sînt legate de transformările energiei razelor solare în alte forme de energie. S-a constatat că energia radiantă trece prin mediile transparente fără să le încălzească, dar încălzesc substanţele care le absorb. Mariotte a aprins un corp (1682) concentrînd pe el razele solare cu ajutorul unei lentile de ghiaţă. Ca să cerceteze repartiţia energiei calorice în spectrul solar, Herschell (1800) a aşezat un termometru sensibil, cu rezervorul înegrit, pe rînd, în diferitele culori ale spectrului şi a constatat că energia calorică creşte dela violet spre roş ($C \rightarrow B$, fig. 2), dar ea este maximă în A, dincolo de roş; cu alte cuvinte Soarele trimite şi raze invizibile odată cu lumina. Aceste radiaţii invizibile sînt mai bogate în energie calorică decît cele vizibile. Ele au fost numite *infraroşii* sau *radiaţii termice* (a se vedea R.M.F. nr. 8/951 şi nr. 1/951). Imediat s-a pus întrebarea dacă nu se prelungeşte spectrul solar şi dincolo de violet? Intrucît acţiunea termică a razelor solare dispare dincolo de violet, fizicienii au recurs la altă acţiune. Incă din 1777 se descoperise că acţiunea chimică de înnegrire a AgCl creşte spre violet. Ritter dovedeşte (1803) că AgCl este înnegrită mai puternic, dincolo de violet, în D (fig. 2), adică Soarele trimite radiaţii invizibile şi dincolo de violet, care au o energică acţiune

chimică. Aceste raze invizibile au fost numite *ultraviolete*. Aşa dar, la începutul veacului XIX se descoperise că razele trimise de Soare sînt de 3 feluri: unele invizibile, cu puternică acţiune calorică, altele vizibile şi altele tot invizibile, care au acţiune chimică. Deşi acţiunile lor se suprapun parţial, totuşi ele au fost considerate ca fiind de natură fizică deosebită. Pentru întîia oară Ampère (1835) a făcut presupunerea că ele ar fi de aceeaşi natură, deosebindu-se doar prin lungimea de undă. Deosebirile dintre ele erau cantitative, nu calitative: lumina vizibilă produce căldură şi impresionează bine placa fotografică; razele infraroşii impresionează plăci fotografice speciale, iar cele ultraviolete dezvoltă şi ele căldură, care poate fi constatată cu aparate sensibile. Trebuia dar, cercetate proprietăţile razelor invizibile pentru a descoperi natura lor fizică şi legătura dintre ele şi lumină. Numeroase cercetări a făcut Melloni (după 1830), asupra radiaţiilor termice. Ca receptor, a folosit pila termoelectrică adică o baterie de termoelemente. Acestea transformă energia calorică transportată de radiaţie în energie electrică, iar curentul electric obţinut este măsurat cu un galvanometru foarte sensibil, mărimea curentului fiind proporţională cu energia radiaţiei incidente. S-a găsit astfel, că razele infraroşii se reflectă şi se refractă după aceleaşi legi ca şi lumina, dar au indicele de refracţie mai mic decît razele roşii, deci viteza de propagare în diferite medii este mai mare decît a luminii roşii $n_{ir} < n_r$; $\frac{c}{v_{ir}} < \frac{c}{v_r}$ deci $v_{ir} > v_r$. Mai departe s-a găsit că razele infraroşii — ca şi cele ultraviolete — interferă, se difractă şi se polarizează, adică posedă toate însuşirile luminii, numai că au lungimea de undă mai mare decît cele roşii, iar razele ultraviolete au lungimea de undă mai mică decît lumina vizibilă. Pentru determinarea lungimii lor de undă s-au folosit reţele optice şi prisme. Insă sticla este absorbantă pentru infraroşu ca şi pentru ultraviolet, de aceea trebuiau găsite substanţe din care să se facă prisme şi lentile. S-a găsit că cuarţul este o substanţă potrivită pentru acest scop. In 1852 s-a descompus lumina solară cu o prismă de cuarţ şi spectrul a fost proiectat pe un ecran fluorescent, făcîndu-se astfel vizibil spectrul ultraviolet pînă la 0,3 μ = 3.000 Å. Cercetînd spectrul solar produs printr-o prismă de cuarţ, s-a găsit că el se prelungeşte prin razele infraroşii, pînă la 2 μ. S-au analizat apoi, razele infraroşii emise de diferite izvoare. Orice corp cald emite raze infraroşii: corpul omenesc, soba, cana cu ceai, fierul de călcat, corpurile incandescente, etc. Lungimile lor de undă sînt însă, foarte variate. Deoarece cuarţul devine opac pentru $\lambda > 3\,\mu$, spectrul infraroşu mai îndepărtat se obţine cu prizme din sare de bucătărie (pînă la 10 μ), fluorină şi silvină. S-a ajuns astfel, să se găsească raze infraroşii cu λ pînă la 100 μ. In ultraviolet s-a obţinut $\lambda = 0{,}103\,\mu$. Studiul repartiţiei energiei pentru fiecare lungime de undă din spectrul radiaţiei termice a dus la concluzii extrem de importante şi cu consecinţe teoretice nebănuite la început. Să considerăm o bară de fier pusă în foc. La început se înfierbîntă la temperatura T_1 şi devine izvor de unde infraroşii cu lungimi de undă diferite. Cea mai mare parte din energia radiată de bara de fier încălzită la temperatura T_1 revine unor lungimi

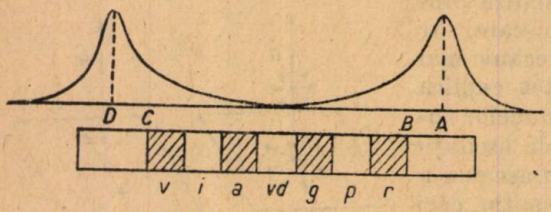


Fig. 2

de undă λ_1 (fig. 3); celorlalte lungimi de undă, mai mari sau mai mici decît λ_1, le revin energii din ce în ce mai mici, pînă la dispariţie. Dacă bara este încălzită mai departe, începe să se înroşească din ce în ce mai luminos. La o altă temperatură $T_2 > T_1$, emite mai multă energie (aria închisă între curbă şi axa absciselor) dar cea mai mare parte din ea, revine unei lungimi de undă $\lambda_2 < \lambda_1$, adică unei frecvenţe $\nu_2 > \nu_1$. Încălzindu-se mai departe, bara devine galbenă, apoi capătă o culoare albă strălucitoare. Măsurătorile arată că energia emisă este mai mare decît la T_2, iar maximul de energie emisă revine unei lungimi de undă $\lambda_m < \lambda_2 < \lambda_1$ deci unei frecvenţe $\nu_m > \nu_2 > \nu_1$. Aceasta este legea lui Wien, numită legea deplasării, care arată că la creşterea temperaturii, maximul de energie radiată se deplasează spre λ mici, adică spre ν mari. Cantitativ, această lege se exprimă astfel: $\lambda_m T = 2896$, unde λ_m este lungimea de undă care corespunde energiei maxime, iar T este temperatura absolută a corpului emiţător de radiaţii infraroşii (termice). Ea este riguros valabilă pentru corpul numit « negru ». Denumirea nu se referă la culoarea corpului, ci la faptul că acest corp trebuie să absoarbă toate radiaţiile ce cad pe el şi să emită toate lungimile de undă. Această lege are o deosebită importanţă practică: pe baza ei se poate determina temperatura cuptoarelor, a stelelor etc., şi tot pe baza ei se poate ameliora randamentul izvoarelor de lumină. Se analizează spectrul infraroşu trimis de corpul cald, se trasează curba în clopot (fig. 3) şi se determină λ_m. Introducînd valoarea lui λ_m în formulă, obţinem pe T. Soarele emite maximul de energie corespunzătoare lui $\lambda_m = 0{,}50\,\mu$. Temperatura Soarelui va fi $T = \frac{2896}{0{,}50} = 6000°K$. Ţinînd seama că temperatura corpului omenesc este $T = 37°C = 310°K$, găsim că fiecare din noi emite radiaţii infraroşii cu $\lambda_m = \frac{2896}{310} \cong 9\,\mu$. Trăim prin urmare, într-o adevărată baie de raze infraroşii. Ţinînd seama de faptul că filamentul unui bec electric are temperatura în jurul a 2500°C, constatăm că maximul de energie radiată de filament corespunde lungimii de undă $\lambda = \frac{2896}{2773}\,\mu = 1{,}03\,\mu$ care este în infraroşu, nu în vizibil! Deci, becul electric produce mai multă lumină « invizibilă » decît lumină vizibilă, e mai mult « sobă » decît lampă! Pentru ca maximul energiei emise de becul electric să fie în vizibil, filamentul ar trebui să aibă temperatura de aproximativ 6000°K adică temperatura dela suprafaţa Soarelui, ceea ce greu s-ar putea realiza cu mijloacele tehnicii actuale, deoarece filamentul s-ar topi înainte de a atinge această temperatură.

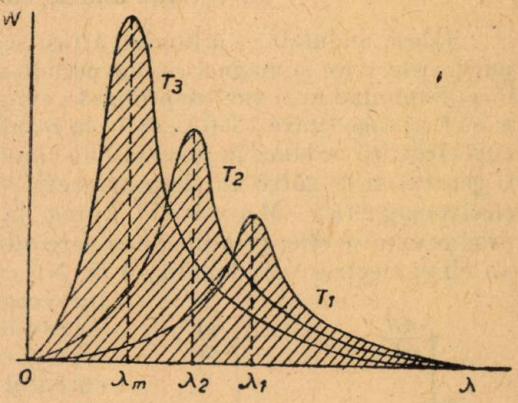


Fig. 3

Prin urmare, razele infraroşii precum şi cele ultraviolete, se dovedesc a fi de aceeaşi natură fizică cu lumina. Am văzut însă, că problema naturii elas-

tice a luminii ridicase probleme dificile la începutul celei de-a doua jumătăţi a veacului trecut.

3. Ce sînt undele electromagnetice?

Teoria ondulatorie a luminii a fost scoasă din impas de către studiul cîmpurilor electrice şi magnetice, dovedindu-se că undele luminoase nu sînt mecanice. Supunînd unei analize profunde, cîmpurile electric şi cel magnetic, Maxwell ajunge (între 1860 şi 1870) la rezultate surprinzătoare. Se ştie că o sarcină electrică produce în jurul său un cîmp electric E; dar cîmpul electric poate fi generat şi de către un cîmp magnetic variabil (fig. 4 *a*) adică prin inducţie electromagnetică. Maxwell ajunge la concluzia că şi cîmpul magnetic H, produs cum se ştie, prin mişcarea sarcinilor electrice, poate fi generat de către un cîmp electric variabil (fig. 4 *b*). Nu cîmpul magnetic (electric) ci variaţia lui creează în jur cîmpul electric (magnetic). Aceste fenomene prezintă importanţa deosebită în cazul curenţilor variabili, cum ar fi, curentul alternativ sau descărcarea oscilatorie a unui condensator. Spaţiul dintre armăturile şi din jurul unui condensator este ocupat de un cîmp electric constant E, fiecare cm³ din acest cîmp conţinînd energia $W_e = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ ergi. Acest cîmp durează cît rămîne condensatorul încărcat.

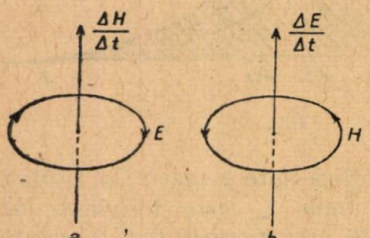


Fig. 4

Spaţiul din interiorul şi din jurul unei bobine parcurse de un curent continuu este ocupat de un cîmp magnetic constant H, fiecare cm³ din acest cîmp conţinînd energia $W_m = \frac{\mu H^2}{8\pi}$ ergi. Acest cîmp durează cît timp bobina este parcursă de curent. Dacă o porţiune de spaţiu este ocupată simultan de către un cîmp electric E, produs de un condensator încărcat la o tensiunea constantă şi de un cîmp magnetic H, produs de o bobină parcursă de un curent continu, atunci în fiecare punct din acest spaţiu se găsesc suprapuse cele 2 cîmpuri, iar fiecare cm³ din acest spaţiu conţine energia $W = \frac{\varepsilon H^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi}$ ergi. Cele două cîmpuri coexistente sînt însă, de sine stătătoare, nu depind unul de celălalt. Ele pot rămîne în acea porţiune de spaţiu atîta timp cît se menţine cauza fiecăruia. Cu totul altfel se prezintă lucrurile dacă într-o porţiune de spaţiu se află un cîmp electric variabil, produs de exemplu, de o tensiune alternativă aplicată la plăcile unui condensator. Variaţiile în timp $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ ale cîmpului electric, generează cîmp magnetic *H variabil*, etc. Cu alte cuvinte, spaţiul ocupat de un cîmp electric variabil sau de un cîmp magnetic variabil, va fi în mod necesar ocupat şi de un cîmp magnetic, respectiv electric variabil. Acest spaţiu va fi ocupat de către un cîmp electric şi unul magnetic, coexistente, încît în fiecare punct se găsesc suprapuse cele două cîmpuri avînd liniile de forţă perpendiculare una pe alta. De data aceasta însă, cele două cîmpuri coexistente nu mai sînt de sine stătătoare ci sînt interdependente, *se generează unul pe altul.* Ele formează un *cîmp electromagnetic.* Prin urmare, cîmpul electromag-

netic nu este simpla suprapunere a unui cîmp electric şi unul magnetic, constante, chiar dacă sînt perpendiculare unul pe altul; el este o înlănţuire a două cîmpuri, unul electric şi altul magnetic, transversale, avînd aceiaşi origină, deci legate cauzal unul de altul. Maxwell a găsit că orice cîmp electromagnetic are o proprietate deosebită: nu poate rămîne limitat la o porţiune de spaţiu ci *se propagă în tot spaţiul cu o viteză finită* $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ unde ε este constanta dielectrică şi μ permeabilitatea magnetică a mediului prin care se propagă cîmpul electromagnetic. De ce este mobil cîmpul electromagnetic? Deoarece cîmpul electric variabil crează în jur cîmp magnetic variabil, acesta generează alt cîmp electric variabil, etc. In felul acesta cîmpul electromagnetic se manifestă ca un fenomen ondulatoriu mobil, care cuprinde treptat întregul spaţiu. Prin urmare, cîmpul electromagnetic ia naştere în jurul unui circuit oscilant şi se propagă în tot spaţiul, transportînd cu sine energia pe care a primit-o dela circuitul oscilant care l-a generat. Deplasarea în spaţiu a cîmpului electromagnetic se numeşte *undă electromagnetică* (fig. 5). Intr-o undă electro-

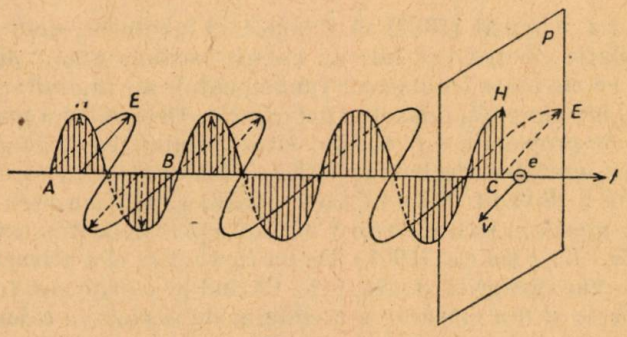


Fig. 5

magnetică cele 2 cîmpuri, electric E şi magnetic H, sînt perpendiculare unul pe altul şi se propagă într-o direcţie perpendiculară la planul lor. In vid, viteza lor de propagare este $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c$ adică tocmai *viteza luminii*, deoarece în vid $\varepsilon = \mu = 1$. Un circuit oscilant generează cîmp electromagnetic, care se propagă sub formă de unde electromagnetice, deci *radiază* energie electromagnetică, în spaţiu. (Fig. 5). Maxwell ajunge la concluzia că undele electromagnetice trebuie să trasnporte nu numai energie ci şi *cantitate de mişcare*, adică ele trebuie să exercite o apăsare asupra corpurilor pe care cad. In adevăr, un electron e din suprafaţa P (fig. 5) pe care cad unde electromagnetice va fi pus în mişcare în direcţia v de către cîmpul electric E al undei incidente; electronul în mişcare va fi acţionat de cîmpul magnetic al undei cu o forţă electromagnetică F, îndreptată în direcţia propagării, adică, unda *apasă* corpul pe care cade. Calculele arată că presiunea produsă de o undă electromagnetică p este reprezentată numeric tocmai de valoarea energiei adusă de undă şi absorbită de fiecare cm² din suprafaţa corpului într-o secundă, adică va fi dată de $p = \frac{W}{c}$. Toate aceste deducţii teoretice ale lui Maxwell au fost verificate experimental abia după 20 de ani.

4. Teoria electromagnetică a luminii

Din faptul că undele electromagnetice sînt transversale şi se propagă cu viteza luminii. Maxwell a tras concluzia că şi *lumina este o undă de natură electromagnetică*. In felul acesta erau înlăturate dificultăţile ridicate de teoria mecanică a luminii, care are nevoie de existenţa unui eter cu însuşiri mecanice pentru a putea fi interpretată. Lumina nu mai este deci, concepută ca o oscilaţie mecanică a eterului, ci ca o *variaţie* a cîmpului electromagnetic. Maxwell arată că undele electromagnetice trebuie să aibă toate proprietăţile luminii; acţiunile luminii sînt efectul oscilaţiilor vectorului cîmp electric E al undei. Undele luminoase nu sînt decît un caz particular al undelor electromagnetice, deosebindu-se de ele doar cantitativ, prin λ şi ν. Fizicianul sovietic I. E. Tamm, scrie: «descoperirea naturii electromagnetice a luminii este una din realizările cele mai importante şi mai sigure ale fizicii din sec. XIX». Erau necesare noi dovezi experimentale care să confirme justeţea teoriei electromagnetice a luminii, deci, experienţe care să arate că: există unde electromagnetice; acestea au toate proprietăţile luminii; există o presiune a radiaţiei.

H. Hertz a reuşit (1888) să producă în laborator, unde electromagnetice prin oscilaţia electronilor într-un circuit oscilant numit dipol şi a reuşit să reproducă cu ele toate fenomenele fundamentale ale luminii: reflexie, refracţie, dispersie, interferenţă, difracţie, polarizaţie. Determinări precise au arătat că viteza lor de propagare este tocmai viteza luminii, egală în acelaşi timp cu raportul dintre unitatea electromagnetică şi cea electrostatică de sarcină electrică, aşa cum a dovedit Stoletov (1876) şi Hurmuzescu.

Existenţa presiunii luminii a fost dovedită prin delicatele experienţe realizate de *P. N. Lebedev* (1901). De un fir subţire el a atîrnat în vid 2 aripioare uşoare, una înnegrită şi alte lucie. Căzînd pe o aripioară lumina o apasă, firul se răsuceşte şi din măsurarea unghiului de răsucire a calculat presiunea. A găsit în acord cu experienţa, că există presiune a luminii, că are valoarea prevăzută de teoria electromagnetică şi este de 2 ori mai mare pe suprafeţele lucii decît pe cele absorbante. Dar existenţa presiunii de radiaţie nu este numai o confirmare a justeţii teoriei electromagnetice a luminii, ci are o consecinţă mult mai profundă. După legile mecanicii, presiunea este o forţă pe unitatea de suprafaţă, adică variaţia unei cantităţi de mişcare pe secundă: $p = mc$. Prin urmare, lumina, deci *undele electromagnetice, posedă masă*. Egalînd cele 2 expresii pentru p obţinem celebra relaţie de conexiune dintre masă şi energie relaţia Einsten-Lorenz $mc = W$. Orice flux de lumină *transportă energie* şi *posedă masă*, ca orice formă de materie în mişcare. Cîmpul electromagnetic are existenţă obiectivă, deci nu are nevoie de nici un fel de eter ca suport. Lumina, ca undă electromagnetică, poate fi explicată fără a recurge la eter, deci, toate contradicţiile ridicate de unda elastică a lui Fresnel, sînt înlăturate. Pentru fizica actuală este în afară de orice îndoială că razele infraroşii, vizibile şi ultraviolete sînt de aceiaşi natură cu undele folosite în radiotehnică, de care se deosebesc doar prin frecvenţă (deci prin lungime de undă, perioadă). Se obişnuieşte chiar, a se numi toate felurile de radiaţii, vizibile sau nu, *lumină* sau *cîmp electromagnetic*. Materia se prezintă sub două aspecte fundamentale: *substanţa* formată din atomi şi *lumina* formată din unde electromagnetice. Pentru confirmarea deplină a teoriei electromagnetice a luminii mai rămăsese totuşi, ceva de rezolvat. Undele luminoase se prelungesc

şi se întrepătrund deoparte şi de alta a lungimilor de undă, cu cele infraroşii spre A şi cu cele ultraviolete spre B (fig. 6). Intre undele electrice şi cele infraroşii rămăsese o lacună. Cele mai lungi raze infraroşii aveau $\lambda = 342\mu =$ $= 0{,}342$ mm, pe cînd cele mai scurte unde cu care a lucrat Hertz (Fig. 6) aveau circa 60 cm. Lucrînd cu oscilatori foarte mici, Nichols şi Tear a reuşit (1923) să producă unde electrice cu $\lambda = 2$ mm, micşorînd lacuna. Racordarea între domeniul undelor electrice şi domeniul celor infraroşii au făcut-o fizicienii sovietici. In 1924, M. Levitskaia şi A. Glagoleva-Arkadieva, folosind ca emiţători oscilatori formaţi din pulberi metalice în ulei, au reuşit să obţină unde electrice cu λ de 0,2 mm şi 0,082 mm $= 82\ \mu$, avînd prin urmare, proprietăţile razelor infraroşii. Sudura este completă, natura electromagnetică a luminii nu mai putea fi pusă la îndoială. In domeniul de suprapunere GY (fig. 6), aceleaşi unde pot fi produse şi considerate fie ca electrice, fie ca infraroşii.

Cercetînd posibilităţile de perfecţionare a izvoarelor de lumină s-a îndreptat atenţia înspre problema interacţiunii dintre substanţă şi lumină, adică spre lămurirea procesului de emisie şi absorbţie a luminii de către atomi. S-a des-

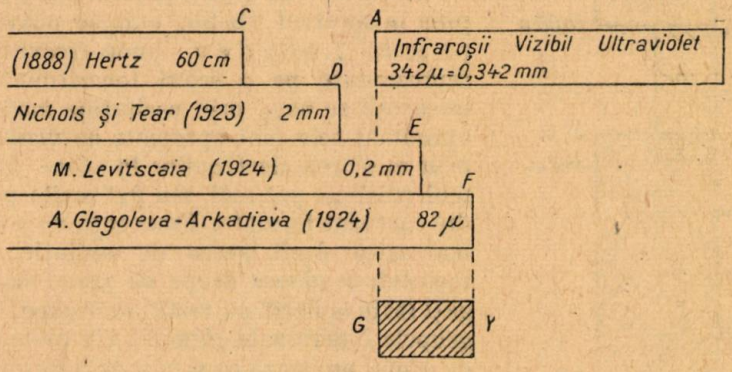


Fig. 6

coperit astfel, că acţiunile luminii se produc ca şi cum moleculele şi atomii de substanţă n-ar putea absorbi sau emite lumina decît în cantităţi bine determinate şi depinzînd de frecvenţa luminii, numite cuante de energie sau *fotoni*. Experienţele arată că energia unui flux de lumină nu este distribuită uniform şi continuu pe frontul de undă al luminii incidente, ci este concentrată în diferite puncte ca nişte particule avînd fiecare energia $E = h\nu$ (h este o constantă egală cu $6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg s). Această problemă a fost analizată în « Revista Matematică şi Fizică » nr. 1 din 1951. Se înţelege că aspectul corpuscular al luminii se manifestă cu atît mai evident cu cît fotonii posedă o energie mai mare. Aspectul fotonic al luminii scade şi se face nesimţit cu cît lumina considerată are ν mai mică, adică mergînd înspre infraroşu şi unde electrice; aspectul fotonic se accentuiază însă, mergînd spre raze ultraviolete, raze Roentgen şi mai ales raze γ. Aşa dar, cîmpul electromagnetic se propagă ondulator şi transportă energie repartizată corpuscular.

5. Gama undelor electromagnetice

Undele electromagnetice iau naştere în jurul unei sarcini electrice care oscilează, cum am văzut în cazul undelor electrice. Oscilatorul are dimensiuni

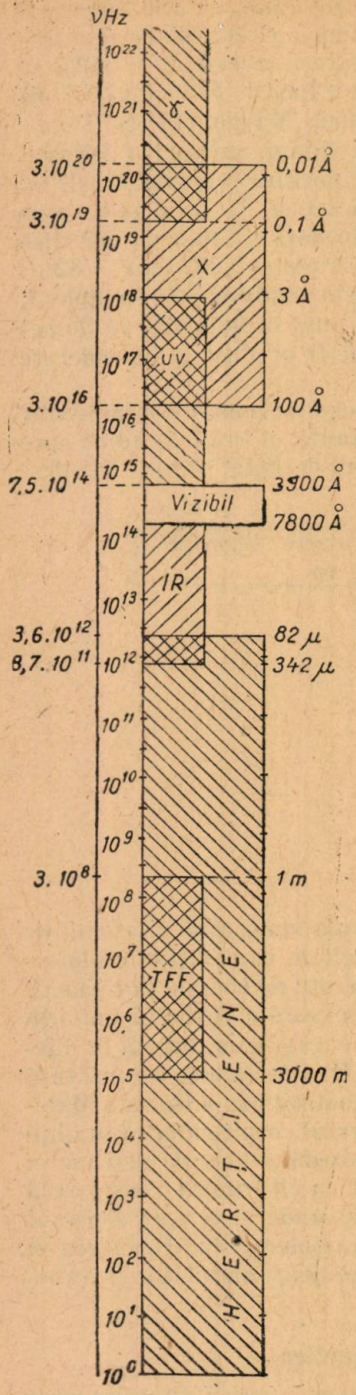


Fig. 7

cu atît mai mici cu cît lungimea de undă radiată scade. Pentru infraroşu, vizibil, ultraviolet sau Roentgen dimensiunile oscilatorului scade la dimensiuni atomice şi chiar electronice. Prin urmare, în aceste cazuri, oscilatori sînt moleculele, atomii şi electronii din atomi. Aceşti oscilatori atomici şi moleculari emit radiaţii transformînd energia pe care ei o primesc din exterior. Dacă energia primită din exterior este calorică, atunci corpul care emite îşi ridică temperatura şi devine *incandescent*, iar radiaţia emisă se numeşte termică. Dacă însă energia primită de oscilator este de altă formă decît termică, emisia se numeşte *luminiscentă sau emisie rece*. Nu vom insista asupra undelor herţiene şi aplicaţiile lor: radio, radiolocaţie, televiziune, telecomandă, etc. fiind mai cunoscute.

a) *Infraroşii*. Se întind între 342 μ şi 7 800 Å, pînă în spectrul vizibil, cum se poate observa pe scara L e b e d e v, unde frecvenţele sînt reprezentate pe o scară logaritmică. Razele infraroşii se nasc prin oscilaţiile moleculelor şi atomilor; cele mai apropiate de vizibil se nasc prin mişcarea electronilor în atom. Atomii sau moleculele se pot roti, sau pot oscila particulele din care sînt formate. Frecvenţa de rotaţie este mai mică decît aceea de oscilaţie. In unele molecule se găsesc grupe de atomi mai solid legaţi între ei decît cu restul moleculei, cum ar fi grupele funcţionale chimice. Un asemenea grup de atomi oscilează ca şi cum ar fi izolat de restul moleculei şi poate emite o frecvenţă caracteristică grupului. Dacă o moleculă capabilă să emită o frecvenţă ν este luminată cu radiaţii infraroşii de aceeaşi frecvenţă, atunci se produce fenomenul de rezonanţă, adică energia undei incidente de frecvenţă ν este absorbită de către moleculă şi în spectru apare o bandă de absorţie în infraroşu. Studiind spectrul de absorbţie a unei substanţe, constatăm frecvenţa bandelor de absorbţie, din care deducem frecvenţele caracteristice grupelor de atomi şi a legăturilor lor, adică putem stabili structura moleculei acestei substanţe. Spectrele de absorbţie în infraroşu formează o metodă practică de analiză, folosită în tehnologia chimică. Razele infraroşii au cele mai variate aplicaţii în tehnică, fotografie, medicină, etc. Pirometria, adică măsurarea temperaturilor ridicate, se bazează pe formulele radiaţiilor infraroşii.

Cercetarea spectrelor infraroşii ale planetelor şi stelelor, dă indicaţii asupra temperaturii şi constituţiei lor. Alegerea izvoarelor de lumină se bazează tot pe studiul razelor infraroşii. Deoarece ele trec prin fum sau prin ceaţă, sînt folosite pentru fotografierea în ceaţă, în noapte, adică pentru fotografierea în invizibil.

b. *Ultraviolete.* Aceste unde se întind începînd dela vizibil 3900 Å şi pînă la 3 Å, adică au frecvenţele cuprinse între 10^{15} şi 10^{18} HZ. Ca şi între roşu şi infraroşu, nu există o delimitare netă între razele luminoase şi cele ultraviolete. Tot aşa se face trecerea nesimţită între razele ultraviolete şi cele Roentgen sau X, domeniile lor suprapunîndu-se între 3 şi 100 Å (a se vedea scara L e b e d e v). Razele ultraviolete se obţin prin electroluminiscenţa gazelor rarefiate. Electronii liberi din gaz sînt acceleraţi de către tensiunea aplicată între electrozi şi capătă o mare energie cinetică dela cîmpul electric $\frac{mv^2}{2} = eU$.

Ciocnind elastic atomii sau moleculele de gaz le comunică o parte din energia lor pe care o primesc electronii din interiorul atomului sau moleculei ciocnite, (a se vedea R.M.F. nr. 8/951), care trec într-o nouă stare de mişcare. Atomul sau molecula are astfel un exces ΔW de energie faţă de starea normală şi se spune că sînt în stare excitată. Această stare de excitaţie este foarte trecătoare căci atomul sau molecula revine la starea iniţială, emiţînd energia absorbită W ca o radiaţie electromagnetică vizibilă, ultravioletă sau Roentgen, cu o frecvenţă ν dată de legea cuantică $\nu = \frac{\Delta W}{h}$ unde h este constanta lui P l a n c k. Dacă energia primită ΔW este suficient de mare, atunci poate fi smuls un electron din atomul sau molecula ciocnită, care devine un ion. Fenomenul se numeşte ionizare.

Pentru a fi emise prin incandescenţă, ar trebui ca corpul emiţător să aibă o temperatură mare, ca de exemplu Soarele. Acesta emite şi raze ultraviolete, cum am văzut, dar o bună parte din ele sînt absorbite în atmosferă. Razele ultraviolete pot fi recepţionate prin metode fotografice sau prin luminiscenţa pe care o produc asupra unor substanţe. Luminiscenţa produsă de o anumită regiune a ultravioletului asupra diferitelor substanţe este specifică acestora, de aceea în tehnică este folosită ca o metodă rapidă de analiză, numită analiză luminiscentă. Ea constă în observarea culorii de luminiscenţă produsă şi compararea ei cu un etalon cunoscut al substanţei cercetate. Spectrul de absorbţie în ultraviolet a unei substanţe, dă indicaţii asupra structurii ei şi completează informaţiile obţinute în spectrele de absorbţie în infraroşu şi vizibil. In medicină, în fotografie şi diferitele ramuri ale tehnicii se folosesc mult, undele ultraviolete.

c) *Razele X.* Se întind între 100 Å şi 0,01 Å, unde se contopesc cu razele γ. Ele iau naştere prin ciocnirea de o placă metalică M a unui flux de electroni liberi, acceleraţi în vid de către o tensiune electrică de cîteva zeci de mii de volţi (fig. 8 *a*). Energia cîmpului electric eU se transformă în energie cinetică $\frac{mv^2}{2}$ a electronilor, iar aceasta se transformă în energie $h\nu$ a razelor X, adică $eU = \frac{mv^2}{2} = h\nu$ Razele X au însuşirile undelor electromagnetice, însă caracterul fotonic al energiei lor este mult mai accentuat. Căzînd pe o placă metalică

M (fig. 8 *b*) smulg din aceasta electroni; aceasta este fenomenul fotoelectronic ale cărui legi au fost stabilite de către S t o l e t o v şi stau la baza teoriei cuantelor (R.M.F. nr. 9/952). Au mare putere de pătrundere, de aceea sînt întrebuinţate în radioscopie şi radiografie, precum şi în tehnica metalografică. Au proprietatea de a ioniza gazele prin care trec, cum a descoperit întîia oară fizicianul romîn, D. H u r m u z e s c u. Ele se pun în evidenţă tocmai prin acţiunea lor ionizantă; apoi, prin metode fotografice sau prin fluorescenţa anumitor substanţe.

d) *Razele* γ. Se întind începînd dela 0,1 Å pînă la 0,3 Å, unde începe domeniul razelor cosmice. Fotonul de raze γ are o energie de zeci de milioane de ori mai mare decît fotonul de lumină vizibilă. De aceea caracterul corpuscular al razelor γ este mult mai vădit decît cel al razelor ultraviolete sau vizibile. Ele iau naştere în cursul proceselor nucleare, însoţind totdeauna transmutările radioactive.

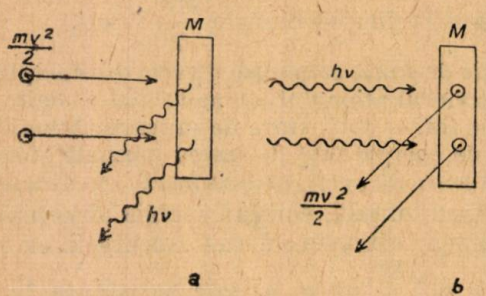


Fig. 8

Se constată aşa dar, că toate radiaţiile vizibile ori invizibile sînt unde electromagnetice, care se întind pe un domeniu foarte larg. Dela undele lungi folosite în radiotehnică şi pînă la razele cosmice, ele formează o gamă compusă din peste 60 de octave, dintre care ochiul percepe doar una. Ele se deosebesc numai cantitativ, prin lungime de undă în vid, deci prin frecvenţă. Odată cu creşterea treptată a frecvenţei apar şi deosebiri calitative manifestîndu-se din ce în ce mai evident proprietăţile lor corpusculare, fotonice, alături de cele ondulatorii. Deşi toate sînt în esenţă cîmp electromagnetic în mişcare, origina lor este diferită. Cele electrice sînt generate prin oscilaţia electronilor în conductori metalici. Cele infraroşii sînt emise de către atomi şi molecule în rotaţie sau în oscilaţie. Undele luminoase şi cele ultraviolete sînt produse prin mişcările electronilor din atom, aflaţi spre marginea lui, pe cînd razele X sînt cauzate prin mişcările electronilor din vecinătatea nucleului atomic. Razele γ iau naştere în procese nucleare.

Toate aceste radiaţii se mai numesc *lumină*, deşi cele mai multe nu se văd; se mai numesc şi cîmp electromagnetic.

Cîmpul este purtătorul unei energii, precum şi a unui impuls, deci are masă ca şi substanţa, este o realitate fizică.

« Lumea material existentă, materia în mişcare, ni se prezintă sub două forme fundamentale: *substanţa* şi *lumina* » (S. I. V a v i l o v). Substanţa este discontinuă, şi cu o mare concentrare de materie. Cîmpul este însă continu, cu o densitate redusă de materie şi face legătura între particulele substanţei.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 886

Două particule identice străbătînd respectiv un cîmp magnetic și unul electric, astfel ca forța ce acționează asupra lor să fie perpendiculară pe direcția mișcării, suferе o deplasare respectiv S_H și S_E, după ce au parcurs spațiul a. Știind că intensitatea fiecărui cîmp este H și E și că avem relația

$$\frac{E}{S_E}\left(\frac{S_H}{H}\right)^2 : \frac{1}{a^2} = 72.10^{12}\ u.c.s./g.$$

Să se stabilească natura particulelor.

C. Em. Racoveanu, elev, Tr.-Severin

Soluție. Fie m, e, v, respectiv masa, sarcina și viteza unei particule.
Vom avea:

$$S_H = \frac{a^2eH}{2mv} \quad ; \quad S_E = \frac{a^2eE}{2mv^2}.$$

(Vezi R.M.F. nr. 4/1952 sau E. V. Spolski «Fizica Atomică» vol. I pag. 14—18).
Inlocuind în relația din enunț găsim:

$$e/m = 1{,}44.10^{14}\ \text{u.e.s./g.}$$

Valoarea acestui raport caracterizează particulele α

$$(e = 0{,}96.10^{-9}\ \text{u.e.s} \quad ; \quad m = 6{,}644.10^{-24}\ \text{g}).$$

Problema 901

Un tub sonor are lungimea de 0,5 m. Să se calculeze numărul de vibrații ale sunetului fundamental și numărul de vibrații ale armonicei a două superioare în următoarele cazuri: a) *Tubul este deschis la ambele capete*; b) *Tubul este închis la ambele capete*; c) *Tubul este închis la un capăt și deschis la celălalt.*

Viteza sunetului în aer este de 340 m/s.

* * *

Soluție. a)

$$\nu_1 = \frac{V}{2l} = 340\ \text{Hz.}$$

Primele două armonice superioare au 680 Hz și 1360 Hz.

b)

$$\nu_2 = \frac{V}{4l} = 170\ \text{Hz.}$$

Primele două armonice superioare au 340 Hz și 680 Hz.

c)

$$_3 = \frac{V}{4l} = 170\ \text{Hz.}$$

însă armonicele superioare au $3.170 = 510$ și $5.170 = 850$ Hz.

Problema 907

Intr-un triunghi ABC se duce bisectoarea unghiului A care taie latură opusă în punctul D. Pe latura AB şi pe prelungirea ei se ia $BE = BE' = BD$. La fel pe latura AC şi pe prelungirea ei se ia $CF = CF' = CD$.

a) *Să se arate că EF şi $E'F'$ sînt paralele cu BC*; b) *Să se demonstreze că triunghiul AED şi triunghiul ADF' precum şi triunghiul AFD şi triunghiul ADE' sînt asemenea şi să se deducă relaţiile*:

$$AD^2 = AE \cdot AF' \quad ; \quad AD^2 = AF \cdot AE'.$$

* * *

Soluţie. a) Avem:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Insă $BD = BE = BE'$ şi $DC = CF = CF'$, deci,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} \quad \text{sau} \quad EF \parallel BC$$

şi

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE'}{CF'} \quad \text{sau} \quad E'F' \parallel BC;$$

b) $$\sphericalangle EDA = \sphericalangle ADB - \sphericalangle EDB = C + \frac{A}{2} - 90° + \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$$

$$\sphericalangle AF'D = \frac{1}{2} \sphericalangle ACD = \frac{C}{2} \quad \text{şi} \quad \sphericalangle DAE = \sphericalangle DAF' = \frac{A}{2}.$$

Rezultă că triunghiurile AED şi ADF' sînt asemenea. Analog, triunghiurile ADF' şi ADF sînt asemenea. Din asemănarea acestor perechi de triunghiuri avem:

$$\frac{EA}{AD} = \frac{AD}{AF'} \quad \text{sau} \quad AD^2 = EA \cdot AF'$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AE'} \quad \text{sau} \quad AD^2 = AE' \cdot AF.$$

Problema 929

Se dă ecuaţia:

$$\frac{x + 3 + \sqrt{6}}{x - 3 + \sqrt{6}} - \frac{x - m}{x + m} + \frac{x + 3 - \sqrt{6}}{x - 3 - \sqrt{6}} = 1$$

şi se cere:

a) *Să se determine m astfel ca produsul rădăcinilor acestei ecuaţii să fie egal cu -5.*;

b) *Să se rezolve complet ecuaţia de mai sus pentru valoarea găsită a lui m şi să se verifice apoi rădăcinile respective*; c) *Să se rezolve ecuaţia*

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{y} = x$$

unde x are ca valoare una sau alta din rădăcinile ecuaţiei precedente.

d) *Să se pună rădăcinile ecuaţiei de mai sus sub forma cea mai simplă.*

* * *

Soluție. a) Scăpînd de numitori și făcînd toate reducerile posibile, ecuația devine:

$$(m+6)\,x^2 - 18x - 15m = 0.$$

Produsul rădăcinilor fiind -5, vom avea:

$$\frac{-15m}{m+6} = -5$$

$$m = 3$$

b) Pentru $m = 3$ ecuația este:

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

cu rădăcinile $1 + \sqrt{6}$. Verificarea rădăcinilor se face ușor.

c) și *d)* Vom avea:

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{y} = 1 \pm \sqrt{6};$$

$$y^2 - 2(1 \pm \sqrt{6})\,y + 2 = 0; \quad \text{de unde} \quad y = 1 \pm \sqrt{6} \pm \sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}},$$

sau $\quad y_1 = 1 \pm \sqrt{6} + (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$; semnele se corespund

$\quad y_2 = 1 \pm \sqrt{6} - (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$; semnele se corespund.

sau $\quad y_1 = (1 + \sqrt{3})(1 \pm \sqrt{2})$ și $y_2 = (1 - \sqrt{3})(1 \pm \sqrt{2})$.

Problema 922

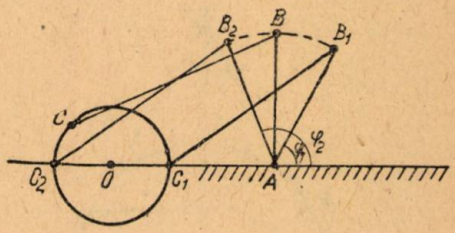
Un mecanism este format din: o roată de rază R cu centrul fix O, biela BC și balansierul AB care oscilează în jurul punctului fix A. Se cunosc lungimile $OA = m$ și $R\,(R < m)$ precum și unghiurile $\varphi_1 < \varphi_2 < \pi$. Se cere:

a) *Să se calculeze lungimile $a = AB$ și $b = BC$*

b) *Să se construiască grafic aceste lungimi*

c) Condiția de posibilitate a problemei.

* * *



Soluție. a) In triunghiurile AB_1C_1 și AB_2C_2 avem:

$$b^2 = (m-R)^2 + a^2 + 2a(m-R)\cos\varphi_1 = (m+R)^2 + a^2 + 2a(m+R)\cos\varphi_2 \qquad (1)$$

de unde

$$a = \frac{2mR}{(m-R)\cos\varphi_1 - (m+R)\cos\varphi_2}.$$

Din relațiile (1) avem:

$$b^2 = (m^2 + R^2) + a^2 + a[(m-R)\cos\varphi_1 + (m+R)\cos\varphi_2]$$

și înlocuind valoarea lui a găsită mai sus:

$$b = \frac{\sqrt{(m^2-R^2)^2(\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2) - 2(m^4 - R^4)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 4m^2R^2}}{(m-R)\cos\varphi_1\,(m+R)\cos\varphi_2}.$$

b) Lungimea a este a patra proporțională a lungimilor m, $2R$ și $[(m-R)\cos\varphi_1 - (m+R)\cos\varphi_2]$.

Ultima lungime se construește ușor pe figură, remarcînd că segmentele care o compun sînt proiecțiile segmentelor AC_1, AC_2 respectiv pe AB_1 și AB_2.

c) Intrucît condiția de existență a triunghiurilor AB_1C_1, AB_2C_2 este exprimată de relațiile (1) singura condiție necesară și suficientă de posibilitate a problemei este

$$(m - R)\cos\varphi_1 - (m - R)_2 < 0.$$

Problema 933

Un observator situat pe verticala centrului unei sfere așezată pe un plan orizontal, vede sfera sub unghiul 2a. Înălțimea la care se află observatorul deasupra planului fiind h, se cere:

a) *să se arate că spațiul nevăzut de observator, cuprins între sferă și plan, exprimat în funcție de a și h este*

$$V = \frac{\pi h^2}{3}\sin a\,\mathrm{tg}^2 a.$$

b) *Să se determine unghiul a astfel ca volumul aflat să fie* $\pi h^3/18$.

c) *Să se calculeze pentru valoarea lui a mai sus determinată, bazîndu-se pe considerații geometrice, volumul spațiului nevăzut, în funcție de raza sferei.*

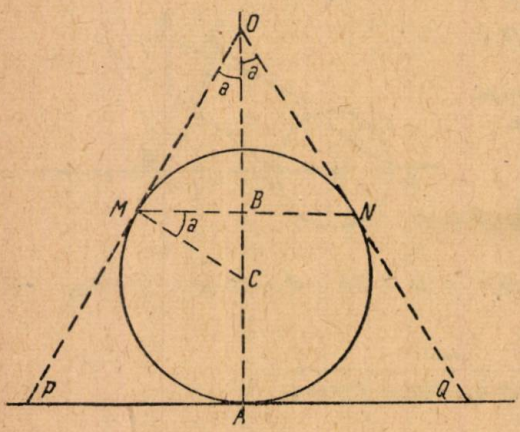
* * *

Soluție. In triunghiul MOC avem:

$(h - R)\sin\alpha = R$, de unde $R = \dfrac{h\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$. Mai avem:

$$CB = R\sin\alpha \;;\quad AB = R + CB = h\sin\alpha;$$

$$MB = R\cos\alpha = \frac{h\cos\alpha\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} \;;\quad PA = h\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$



Volumul spațiului nevăzut este egal cu diferența dintre volumele trunchiului de con $MNQP$ și calotei sferice MAN

$$V = \frac{1}{3}\pi h\sin\alpha\left[\frac{h^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)} + \right.$$

$$\left. + h^2\,\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{h^2\sin^2\alpha}{1 + \sin\alpha}\right] -$$

$$- \frac{1}{3}\pi h^2\sin^2\alpha\left(\frac{3h\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} - h\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^3\sin^3\alpha\left[\frac{\cos^2\alpha}{(1 + \sin\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{2}{1 + \sin\alpha} + 1\right] = \frac{1}{3}\pi h^3\sin^3\alpha\,\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{3}h^3\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha.$$

b) Va trebui să avem: $\sin a\,\mathrm{tg}^2 a = \dfrac{1}{6}$. Notînd $\sin a = \dfrac{1}{x}$, avem: $x(x^2 - 1) = 6$. Singura rădăcină reală a acestei ecuații este $x = 2$. Rezultă $\sin a = \dfrac{1}{2}$, $a = 30°$.

c) Intrucît $\alpha = 30°$, în triunghiul MOC, $MC = \frac{1}{2} OC$ sau $R = \frac{1}{2}(h - R)$, $h = 3R$.

Apoi în triunghiul MBC, $BC = \frac{1}{2} MC = \frac{1}{2} R$, $AB = \frac{3}{2} R$. Mai avem $MB = \frac{\sqrt{3}}{2} R$,

$AP = \frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\, R$.

Deci,

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}R\right)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 + (\sqrt{3}\,R)^2 + \frac{3}{2}R^2\right] - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}R\right)^2\left(3R - \frac{3}{2}R\right) = \frac{3}{2}\pi R^3.$$

Problema 934

Să se afle valorile arcului x pentru care numerele $\sin x$, $\sin\frac{3}{2}x$, $\sin 3x$ formează o progresie geometrică. Să se afle raţia progresiei.

* * *

Soluţie. Vom avea

$$\sin^2\frac{3x}{2} = \sin x \sin 3x \quad \text{sau} \quad \sin^2\frac{3x}{2} = 2\sin x \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

de unde

$$\sin\frac{3x}{2} = 0;\ x_1 = \frac{2}{3}k\pi \quad \text{şi} \quad \sin\frac{3x}{2} = 2\sin x\cos\frac{3x}{2}.$$

Ultima ecuaţie se scrie:

$$\left(3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}\right) = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2}\right),$$

de unde $\sin\frac{x}{2} = 0;\ x_2 = 2k\pi$ şi $3 - 4\left(1 - \cos^2\frac{x}{2}\right) = 4\left(4\cos^4\frac{x}{2} - 3\cos^2\frac{x}{2}\right)$

de unde

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\frac{1}{4}(\sqrt{6} \pm \sqrt{2});\ \frac{x_3}{2} = k\pi \pm \frac{\pi}{12};\ \frac{x_4}{2} = k\pi \pm \frac{5\pi}{12};\ \text{sau}$$

$$x_3 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6};\ x_4 = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}.$$

Rădăcinile x_1 şi x_2 nu răspund problemei deoarece: anulează în parte ($x = x_1$) sau total ($x = x_2$), termenii progresiei.

Rădăcinile x_3 şi x_4 sînt singurele care răspund problemei. Raţia progresiei este

$$q = \sin 3x : \sin\frac{3x}{2} = 2\cos\frac{3}{2}x.$$

Pentru $x = x_3$; avem

$q = \sqrt{2}$ pentru k = par şi $q = -\sqrt{2}$ pentru k = impar.

Pentru $x = x_4$, avem

$q = \sqrt{2}$, pentru k = impar şi $q = -\sqrt{2}$ pentru k = par.

Problema 936

Se dă expresia binomială:

$$\left(a - \frac{a^{-2} + a^{-\frac{3}{3}} - a^{-1}}{-a^2 + a^{\frac{2}{3}} + a}\right)^{16}.$$

a) *Să se calculeze coeficientul binomial al lui* a^4,

b) *Să se calculeze expresia pentru* $a = 1 + i$.

* * *

Soluție. a) Se găsește că expresia este echivalentă cu

$$\left(a - \frac{1}{a^3}\right)^{16};$$

Fie m rangul termenului ce conține a^4. Vom avea:

$$a^{16-m+1}\left(\frac{1}{a^3}\right)^{m-1} 1 = a^4$$

de unde:

$$16 - m + 1 - 3m + 3 = 4 \quad \text{deci} \quad m = 4.$$

Coeficientul binomial al lui a^4 este deci, C_{16}^3.

b) Ținînd seamă că $1 + i = 2 : (1 - i)$ expresia se scrie

$$\left(a - \frac{1}{a^3}\right)^{16} = \left(1 + i - \frac{(1-i)^3}{8}\right)^{16} = \left(\frac{5}{4}(1+i)\right)^{16}$$

$$\left(a - \frac{1}{a^3}\right)^{16} = \left[\frac{5\sqrt{2}}{4}(\cos 45° + i \sin 45°)\right]^{16}.$$

Folosind formula lui Moivre, avem:

$$\left(a - \frac{1}{a^3}\right)^{16} = \frac{5^{16} \cdot 2^8}{4^{16}}(\cos 720° + i \sin 720°) = \frac{5^{16}}{2^{24}}.$$

Problema 937

Intr-o gospodărie agricolă de stat s-a recoltat de pe două parcele 3297 *q grîu cîte* 23 *q și* 55 *kg la hectar. De pe prima parcelă s-a recoltat cu* 942 *q mai mult decît de pe a doua. A* 3*-a parte din recoltă se oprește pentru sămînță, iar a* 21*-a parte din recoltă se repartizează SMT-ului pentru muncile agricole prestate. Restul de grîu se întrebuințează pentru fabricarea pîinii. Știind că dintr-un kg de grîu se scot* 500 *g făină, iar dintr-un kg făină se fac* 1,200 *kg pîine, se cere: ?) Cantitatea de pîine fabricată, b) Suprafața fiecărei parcele.*

* * *

Soluție. a) Cantitatea de grîu din care se face pîine este

$$3297 - \frac{3297}{3} - \frac{3297}{21} = 2141 \text{ q} = 214100 \text{ kg}.$$

Cantitatea de pîine fabricată este:

$$214\,100 \times 0{,}9 \times 1{,}2 = 231\,228 \text{ kg}.$$

b) De pe a doua parcelă s-au recoltat

$$\frac{3297 - 942}{2} = 1177{,}5 \text{ q grîu}$$

iar de pe prima $3297 - 1177{,}5 = 2119{,}5$ q grîu

Suprafaţa primei parcele este $2119{,}5 : 23{,}55 = 90$ ha

iar a celei de-a doua $1177{,}5 : 23{,}55 = 50$ ha.

Problema 941

La ora 7 dimineaţa pleacă din gara A spre C, capitala ţării, un tren a cărui viteză este de 65 km/oră. El se întîlneşte în C, la ora 14 şi 30 minute cu un alt tren ce vine din direcţia opusă şi a plecat din gara B situată la distanţa de 604,5 km de A, la ora 12 şi 15 minute.

Se cere: a) *Viteza trenului al doilea;* b) *Cantitatea de cărbuni repartizată fiecărei locomotive pentru dus şi întors;* c) *Consumul unei locomotive pentru un km de drum, ştiind că: pe aceste direcţii circulă zilnic 4 trenuri pe direcţia AC şi 6 trenuri pe distanţa BC. Locomotivele celor 10 trenuri consumă 3,978 tone cărbuni pe zi. (Cărbunele se repartizează proporţional cu lungimea drumului parcurs).*

* * *

Soluţie. a) Viteza celui de-al doilea tren este:

$$\frac{604{,}5 - (14\tfrac{1}{2} - 7) \times 65}{(14\tfrac{1}{2} - 12\tfrac{1}{2})} = 52 \text{ km/oră}$$

b) Avem

$$4x + 6y = 3{,}978 \text{ şi } \frac{x}{y} = \frac{487{,}5}{117}$$

de unde

$x = 0{,}732$ tone pe traseul ACA

$y = 0{,}175$ tone pe traseul BCB

c) Consumul pe km este:

$$\frac{0{,}732}{2 \times 487{,}5} = \frac{0{,}175}{2 \times 117} = 0{,}74 \text{ kg}$$

Problema 944

Un ciocan de fier de 1,8 kg lucrînd continuu timp de 3 minute s-a încălzit cu 36°C. Ştiind că el primeşte căldura numai 40% din cea rezultată prin transformarea lucrului mecanic, să se calculeze puterea ciocanului.

* * *

Soluţie. Ciocanul primeşte

$$\frac{3 \times 60}{1{,}8 \times 0{,}115 \times 36} = 0{,}00414 \text{ kcal/s.}$$

Putinţa ciocanului este deci, $\frac{0{,}0414 \times 427}{0{,}4} = 4{,}41945$ kgm/s

Problema 945

Să se demonstreze că oricît de mare ar fi n, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

S. Bernstein

Soluție. Avem:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}\ ;$$

$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}\ ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}\ ;$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\sum_{3}^{n}\frac{1}{(n-1)\,n}\,.$$

Insă

$$\sum_{2}^{n}\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{2}^{n}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

Rezultă

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Problema 946

Se dă

$$\cos x+\cos y=a$$
$$\sin x+\sin y=b$$

Să se calculeze cos $(x+y)$ *și sin* $(x+y)$

* * *

Soluție. Putem scrie

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b$$

de unde prin împărțire deducem:

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{b}{a}\,.\ \text{Rezultă:}\ \cos(x+y)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\ \text{și}\ \sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}\,.$$

Problema 948

Să se rezolve ecuația: $ax^3-4x^2+1=0$ *știind că o rădăcină este sin* $18°$.

* * *

Soluție. Făcînd $x=\sin 18°=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$ obținem:

$$a=-4\,(3+\sqrt{5}).$$

Notînd cu x_2, x_3 celelalte două rădăcini ale ecuației vom avea:

$$x_2 + x_3 = \frac{4}{a} - \sin 18^\circ \quad x_2 + x_3 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 x_3 = -\frac{1}{a \sin 18^\circ} \quad ; \quad x_2 x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}$$

x_2 și x_3 vor fi rădăcinile ecuației:

$$x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{5} - 1}{8} = 0$$

de unde:

$$x_2 x_3 = \frac{-1 \pm \sqrt{3 - 2\sqrt{5}}}{4} \text{ (complexe)}$$

Problema 949

O mașină termică funcționează între 20°C și 120°C și dă 1,5 kW/oră cu randamentul de 0,9. Cîtă căldură se ia dela isvorul cald și cîtă căldură se cedează isvorului rece?

* * *

Soluție. Mașina dă

$$A = \frac{1{,}5}{0{,}9} = \frac{5}{3} \text{ kW/oră.}$$

Randamentul ei este

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{120 - 20}{120 + 273} = \frac{100}{393}.$$

Sursa caldă cedează

$$Q_1 = \frac{A}{\eta} = 6{,}55 \text{ kw/oră} = 6{,}55.860 = 5363 \text{ Kcal}$$

Isvorul rece primește

$$Q_2 = \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot A = -4{,}883 \text{ kW/oră} = -4199{,}7 \text{ Kcal}$$

Problema 950

Să se arate că

$$\frac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ} = 2$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

* * *

Soluție. Avem:

$$\frac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ} = \frac{\sin 15^\circ \cos 5^\circ - \cos 15^\circ \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ \cos 5^\circ} = \frac{\sin (15^\circ - 5^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 10^\circ} = 2$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

Problema 951

Să se găsească constanta de desintegrare a radiului dacă perioada sa de înjumătățire este $T = 1550$ *ani.*

* * *

Soluție.

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T}$$

$$T = 1550 \cdot 365{,}25 \text{ zile} = 1550 \cdot 365\,,25 \cdot 86400 \text{ secunde.}$$

Deci,

$$\lambda = \frac{0{,}693}{1550 \cdot 365{,}25 \cdot 86400}\,; \quad \lambda = 1{,}4176 \cdot 10^{-11}$$

Problema 952

Să se demonstreze că mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfurile și ortocentrul unui triunghi oarecare sînt ortocentrele triunghiurilor care au ca vîrfuri respective cîte unul din vîrfurile triunghiului considerat și mijloacele laturilor ce pleacă din acest vîrf.

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC, (BC, CA, AB). In triunghiul $AB'C'$ spre exemplu, înălțimea din A coincide cu înălțimea triunghiului ABC, întrucît BC și $B'C'$ sînt paralele.

Înălțimea din B' pe AC' este paralelă cu BH și întrucît $AB' = B'C$, ea taie AH în mijlocul acesteia.

Problema 953

Să se găsească numerele x *întregi, astfel ca suma* $ab + x^2$ *să fie un patrat perfect,* a *și* b *fiind numere prime absolute mai mari decît doi.*

* * *

Soluție. Va trebui să avem:

$$ab + x^2 = m^2$$

$$ab = m^2 - x^2 = (m - x)(m + x)$$

a și b fiind prime absolute, nu putem avea decît:

$$\begin{cases} m - x = ab \\ m + x = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m - x = a \\ m + x - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} m - x = 1 \\ m + x = ab \end{cases} \qquad \begin{cases} m - x = b \\ m + x = a \end{cases}$$

de unde:

$$x = \pm \frac{b - a}{2} \text{ sau } x = \pm \frac{1 - ab}{2}.$$

Problema 958

Să se calculeze tensiunea U, *exprimată în volți, aplicată unui tub Roentgen, dacă în spectrul continuu emis de acest tub nu există radiații cu lungimi de undă mai mici de* $\lambda = 0{,}206$ Å.

* * *

Soluție. Din formulele

$$U = \frac{m_e v^2}{2e} \text{ și } m_e v\lambda = h \text{ obținem } \lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2m_e eU}}$$

(h = constanta lui Planck, m_e și e, respectiv masa și sarcina electronului)

de unde

$$\lambda = \frac{12{,}24}{\sqrt{U}}$$

(λ în Å, iar U în volți).

Înlocuind $\lambda = 0{,}306$ Å, găsim:

$$U = 3522{,}8 \text{ volți},$$

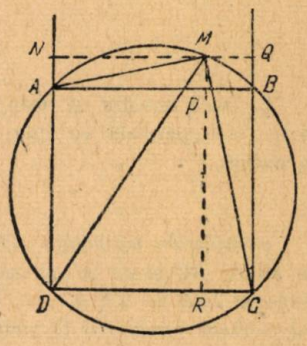
Problema 959

Dacă M este un punct mobil pe cercul AB al cercului circumscris patratului $ABCD$, să se arate că:

$$MD \cdot MC = MD \cdot MA + MA \cdot MB + MB \cdot MC.$$

N. Păun, student

Soluție. Fie N, P, Q, R proiecțiile lui M pe laturile patratului dat. Vom avea:



$$MN + MQ = MR - MP = AB$$

sau

$$MN + MQ + MP = MR$$

deci,

aria MCD = aria MAD + aria MAB + aria MBC însă,

$\sphericalangle AMD = \sphericalangle DMC = \sphericalangle CMB = 180° - \sphericalangle AMB = 45°$.

Relația scrisă mai sus devine:

$$MD \cdot MC = MD \cdot MA + MA \cdot MB + MB \cdot MC$$

Problema 960

Se dau într-un plan două drepte D și D'. Să se așeze un cerc (C), de rază dată R, *cu centrul pe dreapta D și un al doilea cerc (C')*, de rază dată R', *cu centrul pe dreapta D'*, astfel încît:

a) cercurile (C) și (C') să fie tangente (interior sau exterior);

b) tangenta lor comună să aibă o direcție dată (Δ).

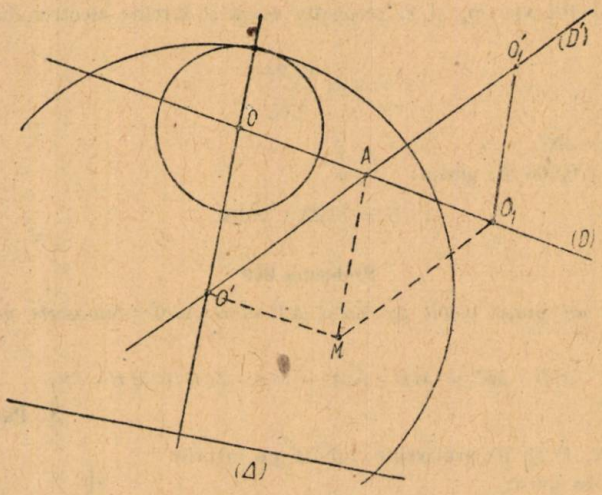
Gh. D. Simionescu

Soluția. Cercuri tangente interior. Cunoscînd direcția (D) a tangentei comune, cunoaștem direcția liniei centrelor, perpendiculare pe (Δ). Distanța centrelor este $OO' = R' - R$. Problema revine la așezarea unui segment de lungime dată, cu direcția cunoscută, astfel ca extremitățile să fie pe două drepte date. Pentru aceasta se ia $AM = R' - R$ (A fiind intersecția lui D cu D') și se duc prin M paralele la D și D'. Obținem două soluții: O; O_1 și O_1'.

II. *Cercuri tangente exterioare.* Construcția este asemănătoare, ținînd seama că de data aceasta $OO' = R' + R$. Se obține încă două soluții.

În total problema are patru soluții.

Discuție. 1. Dacă $R = R'$ soluția cu cercurile tangente interior nu interesează căci $OO' = R' - R = O$, deci, centrul comun este A, iar cercurile sînt suprapuse. Orice tangentă este tangentă comună.



2. Dacă direcția (Δ) este perpendiculară pe D sau D' nu avem soluții, căci linia centrelor este paralelă cu una din aceste drepte și centrul corespunzător este aruncat la infinit.

Problema 961

Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul (O). Notăm cu D' intersecția diametrului cu latura BC și cu A' piciorul înălțimii dusă din vîrful A. Fie P și Q simetricele lui A' respectiv față de AB și AC, iar M și N mijloacele lui $A'P$ și $A'Q$. Dreptele PB și QC intersectează cercul (O) în punctele M' și N', iar dreapta PQ taie respectiv pe AB și AC în punctele C' și B'.

Să se demonstreze că:

1°. *B' și C' sînt picioarele celorlalte două înălțimi ale triunghiului ABC.*

2°. *Dreptele AD, BP, CQ sînt concurente în punctul P'.*

3°. *Punctele M', D', N' sînt colineare.*

4°. *Punctul D este centrul cercului înscris triunghiului $M'N'P'$.*

5°. *Există relația:*

$$AB' \cdot A'M + AC' \cdot A'N = AA' \cdot B'C'.$$

Popescu I. Mihail

Soluție: 1°. Dreapta MN fiind antiparalelă față de BC rezultă că și $B'C'$ este antiparalelă lui BC. Ținînd seamă că $A'N = NQ$, rezultă: $\sphericalangle A'B'C = \sphericalangle CB'Q = \sphericalangle CB'C' = \sphericalangle AB'C' = \sphericalangle B$ de unde putem conchide că patrulaterul $ABA'B'$ este inscriptibil și deci: $\sphericalangle AA'B = \sphericalangle AB'B = 90°$, adică $BB' \perp AC$.

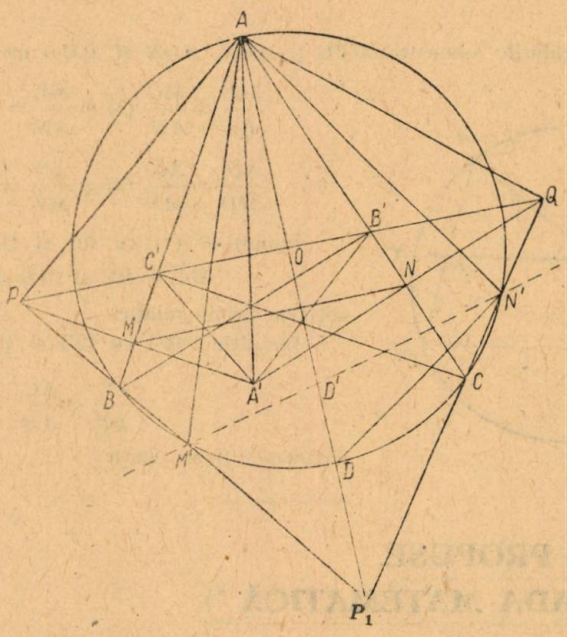
Analog avem: $CC' \perp AB$.

2°. Ținînd seama că: $AP = AQ = AA'$ și de faptul că diametrul AD este perpendicular pe dreapta $B'C'$ (teorema lui Nagel), rezultă că AD este mediatoarea segmentulpi PQ. Însă $\sphericalangle OOB' = \sphericalangle B'A'C = \sphericalangle C'A'B = \sphericalangle BPC'$ de unde deducem că dreptele BP și QC se întîlnesc în punctul P' situat pe AD.

3° Datorită simetriei, avem: $P'B = P'N'$. Ţinînd seamă că $AC = AM'$ şi $AB = AN'$ (drept coarde care subîntind arce egale), rezultă:

$$BC = M'N'$$

De aici deducem că dreapta $M'N'$ va trece prin intersecţia (BC, AD), fapt care dovedeşte colinearitatea punctelor M', D', N'.



4°. Din rezultatele obţinute mai sus, deducem: $\sphericalangle M'P'D = N'P'D$. Este deajuns să arătăm că $\sphericalangle CN'D = \sphericalangle M'N'D$ pentru a stabili că punctul D este centrul cercului înscris triunghiului $M'N'P'$. Deoarece:

$$\sphericalangle CN'M' = \sphericalangle CBM_1 = 180° - 2B,$$

iar

$$\sphericalangle CN'D \sphericalangle CAD = \sphericalangle A'AB = 90° - B = \frac{180° - 2B}{2}, \text{ rezultă } \sphericalangle C'ND = \sphericalangle M'N'D.$$

5°. Aplicînd teorema lui Ptolomeu în patrulaterele inscriptibile $A'B'AP$ şi $A'C'AQ$, obţinem:

$$(1)\ AP \cdot A'B' + AB' \cdot AA' \cdot B'P.$$

$$(2)\ AQ \cdot A'C' + AC' \cdot A'Q = AA' \cdot C'Q.$$

Ţinînd seamă de relaţiile: $B'P = B'C' + A'C'$, $AP = AA'$, $A'P = 2\ A'M$ şi de cele analoage, relaţiile (1) şi (2) devin:

$$(3)\ AB' \cdot A'M = \frac{1}{2} AA' (B'C' - A'B' + A'C')$$

$$(4)\ AC' \cdot A'N = \frac{1}{2} AA' (B'B' + A'B' - A'C').$$

Prin adunarea relaţiilor (3) şi (4) se obţine relaţia din enunţ.

Problema 962

In cercul circumscris unui triunghi ABC, o coardă MN paralelă cu BC, taie laturile AB și AC în D și E. Să se arate că:

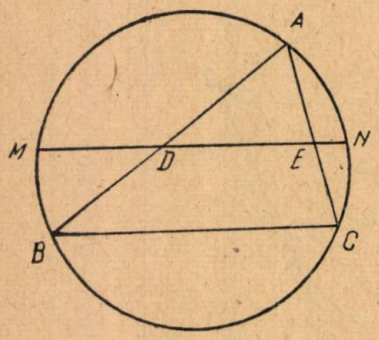
$$MD \cdot EN \cdot AE = AD \cdot CN \cdot ME$$

și

$$NE \cdot CM \cdot AB = AC \cdot ND \cdot BM$$

D. C. Panu

Soluție. Triunghiurile asemenea MEC și AEN, ADN și BMD ne dau respectiv



$$\frac{ME}{EA} = \frac{MC}{AN} \quad (1) \text{ și } \frac{MC}{AN} = \frac{EC}{EN} \quad (1')$$

$$\frac{AD}{MD} = \frac{AN}{MB} \quad (2) \text{ și } \frac{AN}{MB} = \frac{DN}{BD} \quad (2')$$

Înmulțind (1) cu (2) și ținînd seamă că:

$$MC = BN \text{ și } MB = CN,$$

obținem prima relație.

Înmulțind (1') cu (2') și ținînd seamă că

$$\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

obținem a doua relație.

PROBLEME PROPUSE LA OLIMPIADA MATEMATICĂ *)

(Etapa finală — pe țară — București 2 mai 1954)

Clasa VIII-a

1273. Pe laturile AB, AC ale unui triunghi dat se iau, dela B și C către vîrful A, segmentele egale BD și CE; $(AB < AC)$.

a) Să se arate că dacă M este punctul de intersecție al dreptelor BC și DE, avem relația $AB \cdot MD = AC \cdot ME$;

b) Să se examineze cazul particular cînd punctul D coincide cu punctul A;

c) Să se determine lungimea segmentului BD în funcție de laturile triunghiului astfel ca $MC = CB$.

1274. Două mașini-auto pornesc în același timp din același loc în aceiași direcție. Prima merge cu 50 km/oră, iar a doua cu 40 km/oră. După 30 minute pornește din același loc în aceiași direcție o a treia mașină și ajunge una din aceste mașini cu $1\frac{1}{2}$ ore mai tîrziu decît pe cealaltă. Ce viteză are mașina a treia?

Clasa IX-a

1275. Se dă un plan P și un punct O exterior planului. Fie A piciorul perpendicularei dusă din O pe plan iar B și C alte două puncte în acest plan. Fie un punct D situat pe dreapta OA și E și F proiecțiile lui D pe OB și OC.

---

*) La aceste probleme se primesc soluții dela corespondenții revistei pînă la 1 noiembrie 1954, indiferent de clasa pe care o urmează rezolvitorul.

a) Ce condiție trebuie să îndeplinească oblicele OB și OC pentru ca să avem $DE = DF$.

b) Să se arate că pentru ca triunghiul DEF să fie echilateral trebuie să avem

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BC}.$$

c) Să se arate că dacă oblicele OB și OC sînt oarecare, patrulaterele $ABED$, și $ACFD$ și $BCFE$ sînt inscriptibile.

1276. Se dau progresiile aritmetice

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ldots$$

$$4,\ 15,\ 26,\ 37,\ldots$$

Să se găsească termenii comuni ai acestor progresii și să se arate că acești termeni comuni formează o nouă progresie.

1277. Să se demonstreze că

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c N$$

unde $\log_a x$ este logaritmul lui x în baza a (indicii arată baza sistemului de logaritmi).

Clasa X-a

1278. Intr-un triunghi ABC se cunosc laturile $BC = a$; $CA = b$ și relația între unghiuri $\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

a) Se cere să se exprime unghiul B și latura c în funcție de laturile a și b, iar apoi să se construiască pe cale grafică, triunghiul.

1279. Intr-o excursie au plecat 40 persoane, care dispun de 2 cabane a cîte 20 locuri.

a) In cîte moduri se pot împărți ei între cele două cabane pentru a dormi?

b) Cu cîte zeruri se termină numărul dela punctul precedent?

c) Să se demonstreze că

$$(11\cdot 20)^5 < 11\cdot 12 \ldots\ldots 19\cdot 20 < (15\cdot 16)^5$$

$$(21\cdot 30)^5 < 21\cdot 22 \ldots\ldots 29\cdot 30 < (25\cdot 26)^5$$

$$(31\cdot 40)^5 < 31\cdot 32 \ldots\ldots 39\cdot 40 < (25\cdot 36)^5$$

Să se deducă pe baza acestor inegalități, numărul de cifre al rezultatului dela punctul *a)*.

Se dau:

$\log 10 = \log 3\,628\,800 = 6{,}560$; $\log 11\cdot 20 = \log 220 = 2{,}341$; $\log 21\cdot 30 = \log 630 = 2{,}800$;
$\log 31\cdot 40 = \log 1240 = 3{,}092$; $\log 15\cdot 16 = \log 240 = 2{,}380$; $\log 25\cdot 26 = \log 650 = 2{,}812$;
$\log 35\cdot 36 = \log 1260 = 3{,}100$.

1280. Să se arate că dacă într-un tetraedru $ABCD$, muchiile AB și BD sînt perpendiculare, și de asemenea, AC și CD sînt perpendiculare, piciorul înălțimii din vîrful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.

Clasa XI-a

1281. Se dă o placă triunghiulară ABC cu laturile a, b, c și unghiurile A, B, C. Placa se așează cu vîrful A pe un plan orizontal (P), B și C fiind de aceiași parte a planului

(P), astfel ca latura AC să facă cu planul (P) un unghi ascuţit β, iar latura AB să facă cu acelaşi plan (P) un unghi ascuţit γ.

a) Să se arate că α fiind unghiul format de latura BC cu planul (P) are loc relaţia.

$$\sin A \sin \alpha = |\sin B \sin \beta - \sin C \sin \gamma|$$

Să se stabilească o relaţie analoagă pentru cazul cînd B şi C sînt de o parte şi de alta a planului (P).

b) Să se determine unghiul ω dintre proiecţiile laturilor AB, AC. Ce relaţie trebuie să existe între β şi γ ca să avem: $\omega = 0$, $\omega = 90°$, $\omega = 180°$. Se va face cîte un desen pentru fiecare din aceste cazuri.

c) Să se arate că φ fiind unghiul format de ABC cu planul (P) are loc relaţia

$$\sin A \cos \varphi = \cos \beta \cos \gamma \sin \omega.$$

1282. Să se arate pentru care valori reale ale lui a, avem:

$$\sqrt{a + \sqrt{a - 0{,}25}} + \sqrt{a - \sqrt{a - 0{,}25}} = 1$$

şi pentru care valori *reale* ale lui a avem:

$$\sqrt{a + \sqrt{a - 0{,}25}} - \sqrt{a - \sqrt{a - 0{,}25}} = 1,$$

radicalii fiind consideraţi cantităţi *reale* luate cu semnul dinaintea fiecăruia.

1283. Considerînd globul pămîntesc ca o sferă perfectă se cere:

a) Să se afle locul geometric al proiecţiei pe planul ecuatorului al punctelor M de pe pămînt care au latitudinea egală cu longitudinea.

b) Să se arate locul geometric generat de dreapta AM, A fiind punctul de pe ecuator de longitudine nulă.

Anul I şcoli pedagogice

1284. O persoană a trăit în secolul al XIX-lea. Suma cifrelor anului naşterii este egală cu suma cifrelor anului morţii sale. Ştiind că această persoană a murit la o vîrstă care începe cu cifra 8, să se afle în ce an s-a născut.

1285. Două segmente AB şi CD se taie în punctul H, astfel că $AH = 3$ m, $HB = 16$ m, $CH = 6$ m, $HD = 8$ m.

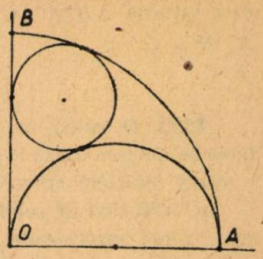
a) In mijlocul segmentelor AB şi CD se duc perpendiculare respectiv pe AB şi CD. Aceste perpendiculare se taie în punctul K. Suma patratelor distanţelor dela punctul K la dreptele AB şi CD este egală cu 159,75 m^2. Să se calculeze aceste distanţe.

b) In punctele A, B, C şi D se duc perpendiculare respectiv pe KA, KB, KC şi KD Perpendicularele în A şi în D se intersectează în punctul M; cele din C şi B se intersectează în punctul N; cele din C şi B se intersectează în punctul P; iar cele din C şi A, în punctul R. Să se arate că, oricare ar fi datele numerice, $NR + MP = NP + MR$.

Anul II şcoli pedagogice

1286. Un tractor poate să termine aratul unui lot în 48 ore. In timpul aratului el a fost înlocuit cu alt tractor care ar fi terminat singur aratul întregului lot, în 40 ore. Aratul lotului a durat în total, 42 de ore. Cîte ore a lucrat fiecare tractor? (Să se rezolve prin algebră şi prin aritmetică).

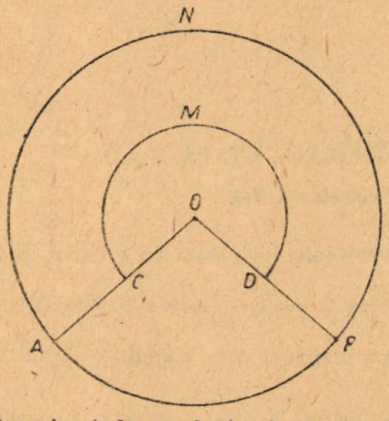
1287. Fie un sfert de cerc OAB (centrul în O) și semicercul descris pe OA ca diametru. Să se afle raza cercului tangent interior la sfertul de cerc, exterior la semicerc și tangent la segmentul OB.



Anul III școli pedagogice

1288. Pe un șantier lucrează muncitori de trei categorii de salarizare. Suma salariilor încasate pe o lună este de 42.700 lei. Muncitorii din categoria a doua de salarizare sînt cu $\frac{1}{3}$ mai puțin decît cei din categoria a treia de salarizare, iar cei din categoria a treia de salarizare sînt $66\frac{2}{3}$ % din numărul salariaților primelor două categorii de salarizare. Numărul muncitorilor din prima categorie de salarizare este 25. Patru muncitori din prima categorie de salarizare primesc atîția lei cît trei muncitori din categoria a doua de salarizare, iar trei muncitori din categoria a treia de salarizare primesc atîția lei cît cinci muncitori din categoria întîia de salarizare. Ce salariu primește un muncitor din fiecare categorie de salarizare?

1289. Avem o tablă de zinc în formă de cerc cu raza r, care se taie ca în figură, arcul de cerc CMD avînd raza egală cu jumătate din raza tablei. Din porțiunea OAB se confecționează un con, iar din porțiunea $ANBDMC$ un trunchi de con.



a) Cum trebuie făcută tăietura pentru ca conul să se suprapună cu baza exact pe baza mică a trunchiului de con?

b) Care este înălțimea totală a corpului obținut prin această suprapunere?

Anul I școli tehnice

1290. Muncitorii unei fabrici au construit un panou semicircular pe care au afișat succesele lor în producție în cinstea zilei de 1 mai. Textul înconjurat de un chenar de șnur ocupă o suprafață în formă de trapez isoscel înscris în semicercul panoului și avînd bazele paralele cu diametrul care mărginește acest semicerc. Baza mică a acestui trapez este de 1,5 m; laturile neparalele sînt înclinate la 45° față de baza mare, iar aria lui este de 7,56 m². Se întreabă:

a) Cîți metri de șnur au fost necesari pentru facerea chenarului?

b) La ce distanță de diametrul de bază al panoului au fost așezate porțiunile paralele ale chenarului?

c) Care a fost aria suprafeței din afara chenarului rămasă disponibilă pentru așezarea de fotografii?

1291. Trei discuri circulare de tablă de mărimi diferite sînt prinse pe un perete vertical cu ajutorul a trei ace A, B, și C care trec prin găurile făcute în acest scop în centrul fiecărui disc. În această poziție, fiecare disc se sprijină cu marginea lui pe marginile celorlalte două discuri; iar acele A, B, C sînt vîrfurile unui triunghi dreptunghic ABC cu unghiul drept în A și cu aria de 384 cm². Dacă însă, am prinde toate trei discurile cu un singur ac, atunci marginea discului de mărime mijlocie, ar trece pe la jumătatea distanței dintre marginile celorlalte două discuri. Se întreabă:

a) care sînt razele celor trei discuri?; *b)* care sînt distanţele dintre acele *A*, *B* şi *C*?

c) Să se arate că se poate găsi un punct M pe latura *BC* şi numai unul singur, din care laturile *AB* şi *AC* se văd sub cîte un unghi drept; să se afle depărtările lui de, *A*, *B* şi *C*.

Anul II şcoli tehnice

1292. O uzină are nevoie de un rezervor în formă de prizmă dreaptă cu muchiile laterale de 4 m. Baza acestui rezervor este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, a cărui înălţime este de 5 m. Se întreabă:

a) Cîţi litri de combustibil va cuprinde rezervorul?; *b)* cîtă tablă este necesară pentru construirea rezervorului fără capac, dacă trapezul de bază are punctul de intersecţie al diagonalelor situat la 3/5 din înălţimea acestui trapez şi dacă 3% din tabla consumată se pierde la încheieturi şi în deşeuri?

1293. O plăcă metalică patrulateră *OABC* are latura *OA* de 4 cm şi *OC* de 5 cm. Unghiul *O* este drept, unghiul *B* este de 45°, iar depărtarea *BI* a punctului *B* de dreapta *OA* este de două ori mai mare decît lungimea segmentului *AI*. Se cere să se calculeze aria acestei plăci.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

«OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI» ETAPA II-a

Problemele pentru absolvenţii claselor a V-a

E: 481. Din cauza variaţiei de temperatură, un ceasornic înaintează cu $\frac{1}{2}$ minut ziua şi rămâne în urmă cu $\frac{1}{3}$ minut noaptea. Socotind ziua şi noaptea fiecare de câte 12 ore să se calculeze peste câte zile acel ceasornic va arăta o diferenţă de 5 minute.

E: 482. Ce sumă a avut cineva dacă după ce a cheltuit $\frac{2}{5}$ din sumă, a mai cheltuit încă $\frac{3}{4}$ din cît îi mai rămăsese după prima cumpărătură şi i-au mai rămas necheltuiţi lei 293,10. (Verificare).

E: 483. Prin calcule aritmetice să se afle numărul care trebuie pus în locul literei x pentru a avea loc egalitatea:

$$\left\{\left[\left(\frac{3x-4}{5}-15\frac{1}{3}\right)\cdot 3-2+\frac{3}{4}\right]:\frac{2}{5}+1\frac{1}{8}\right\}:\frac{1}{48}=144.$$

După aflarea lui x să se facă verificarea.

E: 484. Dacă împărţim numerele 9428 şi 3235 prin acelaşi număr se obţine respectiv restul 13 şi 7. Care este împărţitorul?

E: 485. Doi călători discutau în tren, privind stîlpii de telegraf care se perindau înaintea lor. Unul din ei l-a întrebat pe celălalt dacă poate să afle cît timp trebuie să numere inter-

valele dintre doi stîlpi consecutivi, astfel ca rezultatul numărătorii să fie numărul de kilometri pe oră cu care se mişcă trenul. Celălalt, care ştia că distanţa între doi stîlpi consecutivi este de 62,50 metri, i-a dat rezultatul după o mică socoteală.

Care sînt calculele pe care le-a făcut acest călător pentru a răspunde la problemă?

E: 486. Frăţiorul lui Ionel s-a jucat cu guma şi a şters din caietul de notiţe, cîteva cifre dela o împărţire de numere. Apoi, în locul cifrelor şterse a desenat cîte un pătrăţel rămînînd scris astfel.

$$3\square 7\square 2 : 2\square 2 = \square 4\square$$

Arătaţi cum se pot găsi cifrele şterse şi apoi faceţi verificarea.

E: 487. Un kilogram de cafea prăjită şi amestecată avînd 60 % cafea naturală şi restul năut, se vinde cu 128 lei. Cît costă kilogramul de cafea naturală neprăjită ştiind că prin prăjire se pierde $\frac{1}{5}$ din greutate şi că un kilogram de năut prăjit costă 20 lei.

E: 488. Un gospodar vinde statului un porc în greutate de 103 kg, o vacă în greutate de 416 kg, 2 purcei în greutate totală de 32,500 kg, 2 miei în greutate de 13 $\frac{1}{2}$ kg şi 4 gîşte, 1 curcan şi 6 găini. Un kilogram de carne este plătit astfel: 7 lei cea de porc, 4 lei carnea de bovine şi 4,50 lei cea de miel. Gospodarul a primit în total suma de lei 2929,25 iar cantitatea totală de carne predată a fost 617 kg.

Se întreabă cîte kilograme de carne de pasăre a predat şi cu cît s-a plătit kg de carne de pasăre.

Problemele pentru absolvenţii claselor a VI-a

E. 489. Intr-un triunghi latura AB este mai mare decît latura AC. Notînd cu M mijlocul laturii BC, să se demonstreze că unghiul MAB este mai mic decît unghiul MAC.

E: 490. O sumă de bani a fost împărţită în două părţi: prima parte egală cu $\frac{1}{2}$ din întreaga sumă minus 153 lei, iar a doua, egală cu $\frac{3}{5}$ din rest şi încă 452. Să se afle suma întreagă şi fiecare parte.

E: 491. Să se afle valoarea lui x din egalitatea:

$$\frac{3 - \dfrac{0{,}045}{0{,}012}}{0{,}17\,x} = \frac{3\frac{1}{2} - \left(3\dfrac{0{,}2}{1{,}5} - \dfrac{2}{3}\right)}{\dfrac{8}{7} - \dfrac{4{,}2}{6\dfrac{1}{5}}}$$

apoi să se verifice rezultatul.

E: 492. Două comune sînt aşezate de o parte şi de alta a unui canal navigabil aşezat în linie dreaptă, avînd malurile sale la aceeaşi distanţă între ele. Sfaturile populare ale celor două comune propun să se construiască un pod perpendicular pe direcţia canalului astfel ca cele două localităţi să fie egal depărtate de capetele podului.

Arătaţi construcţia geometrică prin care se poate determina poziţia podului şi justificaţi construcţiile grafice pe care le faceţi. Faceţi desenul în creion cu rigla şi compasul lăsînd să se vadă construcţile ajutătoare.

E: 493. Două roți dințate sînt angrenate astfel: roata cea mai mare are 1954 dinți și fiind fixă nu se poate roti, iar roata cea mică are 36 dinți și se poate roti în jurul celeilalte roți. Inainte de a se începe mișcarea se însemnă cu cretă cei doi dinți care sînt în contact.

Se întreabă, cîte ture face roata mică în jurul centrului său și cîte ture face în jurul roții mari pînă ce dinții însemnați vor avea iarăși poziția ca la începutul mișcării?

E: 494. Un elev privind ceasornicul școalei observă că acele sînt în prelungire și așezate astfel: acel care arată orele este situat între 12 și 1, iar minutarul între 6 și 7. Cît este ora?

E: 495. Ca să ridice la pătrat un număr terminat cu cifra 5, pionerul Georgescu înmulțește zecile numărului cu consecutivul acestuia și alătură la produs numărul 25. De pildă, pentru ridicarea la pătrat a numărului 125, el înmulțește pe 12 cu 13 și la rezultatul înmulțirii, 156, alătură pe 25 și obține $125^2 = 15625$.

Explicați acest procedeu simplificat de ridicare la pătrat a numerelor care se termină cu cifra 5.

E: 496. Plecînd de acasă, elevul Ionescu se uită la ceas și vede că ora este 8 și 35 minute. Cînd ajunge la gară el constată că ceasul căilor ferate arată ora 8 și 30 minute. Ionescu pleacă dela gară la ora 10 și 48 minute după ceasul căilor ferate și ajunge acasă la ora 11 și 23 minute, după ceasul lui. Știind că ambele ceasuri funcționează bine însă ora oficială este aceea a căilor ferate se întreabă cum trebuie să-și potrivească Ionescu, ceasul, pentru a arăta ora oficială, drumurile de acasă la gară și dela gară înapoi fiind parcurse în timpuri egale.

Probleme pentru absolvenții claselor a VII-a

E: 497. Grădina unei școli are 966 m² și este împărțită în patru părți, în modul următor: aria primei părți reprezintă $\frac{2}{3}$ din aria celei de a doua; aria celei de-a treia reprezintă $\frac{8}{9}$ din aria celei de-a doua, iar aria celei de patra reprezintă $16\frac{2}{3}$ % din ariile primelor trei părți luate împreună. Cîți metri pătrați are fiecare din cele patru părți?

E: 498. Să se construiască un triunghi cunoscîndu-se două unghiuri și perimetrul său. Aplicație: $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 45°$ și perimetrul 9 cm.

E: 499. Intr-o împărțire, citul a fost 31 și restul 11. Deîmpărțitul plus împărțitorul fac 555. Să se reconstituie împărțirea. (Explicați scopul fiecărei operații ce faceți în vederea rezolvării, scrieți judecata problemei și faceți apoi proba).

E: 500. Două trenuri merg în sensuri contrarii pe două linii paralele alăturate; primul tren merge cu o iuțeală de 48 kilometri pe oră și are o lungime de 85 metri, mai mare decît a celui de al doilea tren. O persoană din primul tren vede trecînd prin dreptul ei celălalt tren în 12 secunde, iar o persoană din al doilea tren vede trecînd primul tren prin dreptul ei în timp de 15 secunde. Se cere să se afle care sînt lungimile trenurilor și cît timp ar fi trecut cele două trenuri pe dinaintea celor două persoane, dacă trenurile ar fi mers în același sens păstrîndu-și vitezele lor.

E: 501. Ion și Nicolae lucrînd împreună, ar termina o lucrare în 24 ore, Nicolae și Dumitru ar termina aceeași lucrare în 24 ore și 30 minute; iar Ion și Dumitru ar termina aceeași lucrare în 21 ore. Au lucrat toți trei împreună și au primit suma de lei 260. Se cere să se afle în cît timp s-a efectuat lucrarea și ce sumă se cuvine fiecăruia.

E: 502. Să se construiască trapezul $ABCD$, unde AB este paralelă cu CD, cunoscîndu-se laturile $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 10$ cm şi $DA = 4$ cm. Din A şi C se duc perpendicularele AE şi CF pe diagonala BD. Să să arate că $5.AE = 3\ CF$. Faceţi construcţia exactă, cu rigla şi compasul în creion, lăsînd să se vadă şi construcţiile ajutătorare.

E: 503. Se construiesc trei cercuri concentrice. Dintr-un punct oarecare al cercului celui mai mare se duc două tangente la fiecare din celelalte două cercuri. Să se arate că unghiul format de cele două tangente nu poate avea decît două valori oriunde ar fi aşezat punctul de pe cercul cel mare din care se duc tangentele.

E: 504. Bisectoarele interioare ale unui triunghi ABC întâlnesc cercul circumscris triunghiului respectiv în punctele $A_1B_1C_1$. Să se demonstreze că bisectoarele triunghiului ABC se suprapun peste înălţimile triunghiului $A_1B_1C_1$. In cazul când $\hat{A}=75°$, $\hat{B}=45°$, să se calculeze unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$. Faceţi construcţiile grafice necesare cu rigla şi compasul.

*
* *

INDICAŢII PENTRU PARTICIPANŢII LA OLIMPIADĂ

Şcolarii, în frunte cu pionerii, sînt sfătuiţi să popularizeze problemele propuse pentru elevii clasei respective. Aveţi grijă ca fiecare elev să cunoască enunţurile problemelor propuse.

Soluţiile problemelor să fie alcătuite personal de către fiecare participant la « Olimpiadă ». Este o cinste pentru fiecare şcolar de a trimite doar soluţiile acelor probleme pe care le-a rezolvat singur.

Acele probleme pe care şcolarul le rezolvă cu ajutorul altora trebuie să constituie doar un prilej de a-şi lichida lipsurile sale de cunoştinţe.

Se socotesc participanţi la « Olimpiadă » toţi elevii dela care se primesc soluţii la problemele propuse pentru clasa din care fac parte.

Fiecare soluţie va fi scrisă pe o singură faţă a hîrtiei, cu îngrijire, însoţită de numărul problemei sau exerciţiului. Elevii vor avea grijă ca la sfârşitul soluţiei să fie trecut numele complet al rezolvitorului urmat de numele localităţii, al şcoalei şi clasei din care face parte.

La clasificarea participanţilor se va ţine seamă de fiecare soluţie trimisă dacă este completă clar explicată, cu soluţia cît mai simplă şi însoţită de proba şi toate calculele făcute.

Participantul la « Olimpiadă » este rugat să expedieze o singură dată problemele pe care a putut să le rezolve. Ele se vor prinde laolaltă şi se vor introduce într-un plic pe care se va scrie numele elevului participant, clasa în care a promovat, şcoala şi localitatea. Se pot trimite mai multe plicuri într-unul mai mare sau într-un pachet pînă la 15 august, pe adresa: *Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R.* « OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI » — str. Spiru Haret 12, Bucureşti XII.

Elevii care au participat la ambele etape ale olimpiadei şi care au soluţionat bine un număr mare de probleme, vor fi premiaţi, iar rezultatul « Olimpiadei » va fi adus la cunoştinţă în primul pătrar al anului şcolar 1954/55.

POPULARIZAŢI PROBLEMELE PROPUSE LA ETAPA A II-a!

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Pînă la 1 aprilie 1954, s-au mai primit soluții bune la problemele din ultimele cinci numere ale « Revistei Matematice și Fizice » dela rezolvitorii la care sînt trecute numerele problemelor rezolvate după numele fiecăruia, probleme propuse (P), articole (A) și note (N), după cum urmează :

(urmare)

PREDEAL. Clasa XI-a, Aposcu I. Gheorghe (986, 998, 999, 1001, 7, 25, 68, E: 327, 329, 333, 335, 336, 346, 354, 357, 358, 359, 365), Budin I. Constantin (906, 908, 915, 948, 986, 992, 994, 998, 999, 1007, 25, 33, 35, 48, 73, 74), *Epuraș Mircea* (802, 809, 810, 812, 813, 816, 819, 821, 822, 823, 827, 829, 830, 831, 833, 834, 835, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 845, 846, 850, 852, 853, 854, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 950, 951, 963, 964, 966, 968, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 985, 986, 988, 989, 992, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 14, 18, 19, 20, 22, 25, 38, 40, 71, 79, 80, 81, E: 325, 327, 328, 329, 330, 331, 337, 338, 344, 345, 346, 347, 348, 358, 364, 365, 368), *Grabcev Boris* (808, 809, 810, 812, 813, 814, 815, 816, 819, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 833, 834, 835, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 845, 846, 848, 850, 852, 857, 858, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 876, 875, 877, 878, 944, 946, 948, 950, 951, 952, 953, 954, 957, 959, 960, 962, 963, 964, 966, 968, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 978, 979, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 991, 993, 994, 996, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 18, 19, 20, 24, 25, 78, 84, 85), *Greculescu V. Ioan* (808, 809, 810, 812, 813, 814, 815, 816, 819, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 833, 834, 835, 937, 838, 839, 840, 841, 842, 845, 846, 848, 850, 852, 853, 854, 855, 859, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 948, 951, 952, 963, 964, 966, 968, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 986, 989, 992, 993, 994, 998, 999, 1000, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 19, 20, 25, 38, 40, 42, 52, 65, 68, 78, 80, 81, E: 327, 329, 330, 331, 335, 336), *Alexa Ion* (943, 946, 950, 951, 952, 953, 954, 962, 964, 965, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 995, 986, 989, 991, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 18, 19, 20, 22, 25, E: 315, 318, 320, 321, 322, 323, 324, 329, 336), *Huștiuc Nicolae* (943, 946, 949, 951, 952, 953, 954, 962, 964, 965, 972, 973, 975, 979, 987, 988, 994, 997, 998, 1001, 2, 5, 6, 8, 14, 19, 20, 22, 23, 25, 33, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 58, 62, 68, 76, 78, 79, 80, 81), *Răduț Nicolae* (810, 814, 819, 822, 823, 824, 826, 829, 831, 835, 837, 839, 840, 841, 842, 845, 848, 853, 854, 857, 859, 861, 863, 867, 871, 872, 873, 857, 876, 987, 988, 992, 993, 994, 997, 998, 999, 1000, 2, 5, 8, 9, 19, 22, E: 276, 277, 279, 281, 285, 286, 288, 289, 290, 292, 293 294, 298, 300, 315, 317, 318, 320, 321, 322, 323, 324, 328, 329, 331, 335, 336), Stoia Aurel (971, 972, 973, 974, 975, 976, E: 315, 317, 318), Steinberg (950, 972, 973, 974 974, 976, E: 317, 318, 322, 323, 324), *Duțu Gheorghe* (978 982, 986, 988, 989, 992, 993, 994, 996, 997, 999, 1000, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 22, 25, 33, 38, 40, 42, 68, 84, 91, 93, 95, 113, 152, E: 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 335, 336, 337, 338, 339, 341, 342, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 354, 358, 368), Roșulescu D. Grigore (986, 988, 989, 999, 1005, 19, 27, 40).

PUCIOASA — comuna Brănești. Clasa VIII-a. Bucur D. Gheorghe (1128, 129, E: 374, 376, 383, 386, 388, 391, 395, 396, 397, 398, 399, 400,P).

RĂDĂUȚI. *Școala elementară Burla.* Clasa VII-a. Jurovle Ion (321, 324, 323, 356, 361).

RÂMNICU-SĂRAT. Clasa VIII-a. Cristea Aurel (345, 351, 353, 352, 354, 355, 357, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 375, 380, 384, 387, 388, 389, 394, 396, 398, 400, 402, 404, 406, P); clasa X-a. Voiculescu Cezar (904, 905, 908, 912, 913, 915, 916, 917, 927, 928, 937, 938, 944, 971, 972, 986, 987, 1000, P).

RÂMNICU-VÂLCEA. Clasa VI-a. Andrei C. Gheorghiță (1159, E: 369, 370, 371, 373, 382, 391, 394); clasa VIII-a. Andrei C. Aurica (1159, E: 371, 373, 378, 382, 391, 394); clasa IX-a. Zigulescu D. Maria (1159, E: 346, 369, 370, 371, 373, 378, 391, 392, 394); clasa XI-a. Roșianu C. Dragomir (973, 974, 988, 996, 999, 1001, 15, 25, 30, 38, 42, 65, 68, 78, 79, 88, 98, 126, 149, 152, E: 318, 329, 353, 358, 362, 370, 384, 387, P), Friedman Zita (1084, 87, 88, 98, E: 369, 370, 371, 373, 377,381, 382), *Zigulescu D. Marin* (950, 952, 977, 978, 980, 986, 988, 997, 999, 1001, 20, 24, 26, 27, 30, 45, 54, 58, 59, 66, 68, 69, 70, 73, 80, 83, 84, 85, 89, 94, 97, 110, 113, 118, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 139, P).

REȘIȚA. *Liceul mixt*, clasa XI-a. *Popescu Al. Dan* (952, 954, 971, 972, 974, 992, 993, 994, 995, 998, 1000, 9, 23, 26, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 54, 55, 57, 58, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 76, 78, 79, 80, 81, 82, (7, 89, 93, 96, 100, 104, 118, 122, 124, 125, 126, 127, P), *Ienciu Doru* (943, 946, 950, 952, 954, 959, 971, 972, 974, 976, 986, 988, 992, 996, 1000, 16, 25, 29, 33, 40, 43, 58, 61, 62, 68, 76, 84, 98, 113, 126, 127, 128, P).

ROȘIORI DE VEDE. Clasa V-a. Bursumac N. Constantin (305, 306, 337, 354, 358).

ROMAN. Clasa VII-a. Zaharia Mihai (341, 349, 350, 361, 362, 398); clasa VIII-a. Murărescu Gh. (904, 905, 907, 910, 911, 913, 915, 916, 919, 930, 937, 938, 940, 942, E: 303, 304, 305, 306, 309, 312), Timofte Ortansa (387, 389, 390, 391, 393, 397); clasa IX-a. Gîmbuțan Viorel (1084, 88, 91, 93, 95, 118, E: 370, 378, 396, 404, 405); clasa XI-a. Cojocaru Vasile (906, 909, 910, 911, 913, 963, 965 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 981, 982, 984, 986, 993), Mitrofan Gh. (981, 985, 992, 993, 994, 999, 1000, 1, 2, 3, 38, 40, 43, E: 324, 325, 329, 336, 341, 343, 349, 350), Damaschin Alexandru (1124, 126, 127, 128, 129, E: 384, 386, 387, 389, 391, 396, 397, 398, 399, 400). *Școala medie siderurgică*, anul III. Floareș Alexandru (1005, 84, 87, 88, 102, 106, 107, 109, 138, 139, E: 325, 327, 328, 332, 335, 354, 355, 359, 360, 362, 366, 369, 370, 371, 372, 374, 376, 379, 380, 382, 383, 387, 388, 389, 398, 399, 400, P). S.M.C.A., anul II. Bacalu Ioan (980, 982, 992, 997, 998, 1018, 25, 40, 43, 49, 58, 65, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 96, 97, 98, 113, 118, 124, 126, 127, 128, 129, 132, 140, 142, 145, 149, 152, 154, 159).

SATU-MARE. Clasa VIII-a. Benea A. Cornel (1068, 70, 84, E: 375, 385, 391, 392, 394, 398), clasa IX-a. Bălănescu Horia (1068, 1078, 84, 102, E: 330, 335, 337, 347, 348), Mariș Ilieș (1084, 102, E: 358, 362, 369, 370, 371, 382, 385, 391, 392, 394, 398).

SIBIU. Clasa X-a. Vlădescu Ecaterina (1013, 96, 140, 148, 152), Dan Zorilescu (1000, 2, 20, 38, 40, 42, 62, 88, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 118, 122, 126, 127, 128, 140, 152). *Școala de măsurători terestre*, anul II. Halamaghi Eugen (1069, E: 332, 346, 384, 387, 388, 392, 396, 398, 399); anul III. Samoilă Mircea (118, 123, 126, 127, 128, 129, P). Liana Comert (1118, 127, 128, E: 303, 304, 305, 306, 309, 311, 312, 313, 314, 325, 329, 332, 335, 336, 339, 354, 360, 362, 366, 377, 384, 386, 387, 388, 391, 392, 398, 399, 400); funcționar Zimmermann Nicolae (384, 387, 389, 391, 392, 396, 397, 398, 400, P).

SIGHIȘOARA. Borzea Eugen (999, 1004, 25, 84, E: 337, 346, 369, 371, 373, 391, 397).

SIGHET. Clasa X-a. Codrea I. Gheorghe (1124, 128, 140, 149, 150).

SLATINA. Clasa VIII-a. Gagiu T. Mihai (1084, 102, 128, E: 358, 362, 369, 370, 371, 373, 381, 398, 402), Moraru I. Petre (304, 306, 318, 336, 356, 358, 362, 371), Șerbănescu N. Tiberiu (353, 358, 362, 378, 380, 381, 402, 404); clasa IX-a. Gheorgu N. Ion (1127, 152, 159, E: 329, 335, 378, 402, 404, 406), Luțu I. Marin (1118, 129, 140, 152, E: 370, 371. 373, 374, 375, 389, 394, 398, 407, 409), Ursu Gh. Mihai (1102, 127, 128, 152, 159, E: 306, 312, 382, 394, 397, 402, 404, P), Militaru D. Marius (904, 905, 910, 911, 913); clasa X-a. Petrulian I. Ștefan (952, 1025, 68, 84, E: 329, 356, 361, 362, 315, 370), Florea I. Ion (988, 996, 999, 1000, 25, 33, 38, 40); clasa XI-a. Popescu Gh. Sergiu (946, 949, 959, 961, 978, 988, 1018, 1020, P), *Cucurezeanu I.* (900, 902, 904, 905, 906, 017, 908, 909, 910,